



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2009

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Notations utilisées dans tout le corrigé : pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on note $p_k = P([T_n = k])$, et pour tout entier $j \geq 1$, $D_n(j) = (j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n$. Toutes les variables aléatoires considérées (U_i, T_n, Z_n, S_n , et plus généralement toute fonction de $(U_1, \dots, U_{n+1})$) prennent un nombre fini de valeurs : elles admettent donc des moments de tout ordre.

Preliminaire

1) Méthode 1 — Écriture de Y et Y^2 comme sommes d'indicatrices.

Soit $\omega \in \Omega$ et $y = Y(\omega) \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Les entiers $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ tels que $y > k$ sont $0, 1, \dots, y-1$ (car $y-1 \leq N-1$) ; il y en a y . Donc :

$$Y = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{1}_{[Y > k]}$$

De même, la somme des y premiers entiers impairs vaut

$$\sum_{k=0}^{y-1} (2k+1) = 2 \frac{(y-1)y}{2} + y = y^2,$$

donc :

$$Y^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) \mathbf{1}_{[Y > k]}$$

Par linéarité de l'espérance et puisque $E(\mathbf{1}_C) = P(C)$, on obtient les deux formules.

Méthode 2 — Transformation d'Abel.

Pour $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $[Y = j] = [Y > j-1] \setminus [Y > j]$ avec $[Y > j] \subset [Y > j-1]$, donc

$P([Y = j]) = P([Y > j - 1]) - P([Y > j])$. Soit h une fonction définie sur $\llbracket 0, N \rrbracket$ avec $h(0) = 0$. Comme $P([Y > N]) = 0$:

$$\begin{aligned} E(h(Y)) &= \sum_{j=1}^N h(j)(P([Y > j - 1]) - P([Y > j])) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k+1)P([Y > k]) \\ &- \sum_{k=1}^{N-1} h(k)P([Y > k]) = \sum_{k=0}^{N-1} (h(k+1) - h(k))P([Y > k]) \end{aligned}$$

Avec $h(y) = y$, $h(k+1) - h(k) = 1$; avec $h(y) = y^2$, $h(k+1) - h(k) = 2k + 1$.

La méthode 1 est une identité valable pour chaque ω , qui explique d'où viennent les coefficients ; la méthode 2 est un calcul de sommes (sommation par parties) qui s'adapte à toute fonction h .

Conclusion

et

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} P([Y > k])$$

$$E(Y^2) = \sum_{k=0}^{N-1} (2k + 1)P([Y > k]).$$

Partie I : Inf et Sup

2) Pour la loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$:

Conclusion

$$E(U_1) = \frac{N+1}{2} \text{ et } V(U_1) = \frac{N^2-1}{12}.$$

- 3) a) Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$. On a $[T_n \leq k] = \bigcap_{i=1}^n [U_i \leq k]$. Par indépendance mutuelle des U_i ,
et puisque $P([U_i \leq k]) = \frac{k}{N}$:

Conclusion

$P([T_n \leq k]) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$ pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ (formule encore vraie pour $k = 0$, les deux membres étant nuls).

- b) T_n prend ses valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$ et, pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$,
 $[T_n = k] = [T_n \leq k] \setminus [T_n \leq k-1]$ avec $[T_n \leq k-1] \subset [T_n \leq k]$, donc :

Conclusion

$T_n(\Omega) = \llbracket 1, N \rrbracket$ et $P([T_n = k]) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}$ pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$. En particulier $p_k > 0$ pour tout k .

- 4) a) Si $N = 1$, la suite est nulle. Si $N \geq 2$, $d_n(N)$ est une somme d'un nombre fixe
 $N-1$ de termes $\left(\frac{k}{N}\right)^n$, où $0 < \frac{k}{N} < 1$: chacun tend vers 0 (suite géométrique de
raison dans $]0, 1[$).

Conclusion

$(d_n(N))_{n \geq 1}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(N) = 0$.

- b) D'après 1) et 3) a), avec $P([T_n > k]) = 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n$ pour $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$:

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n\right) = N - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n = N - d_n(N)$$

(le terme $k = 0$ est nul car $n \geq 1$, et la formule reste vraie pour $N = 1$). Avec a) :

Conclusion

$$E(T_n) = N - d_n(N) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n) = N.$$

c) D'après 1) :

$$\begin{aligned} E(T_n^2) &= \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) \left(1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n\right) = N^2 - 2N \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k}{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n = N^2 \\ &\quad - 2N d_{n+1}(N) - d_n(N) \end{aligned}$$

en utilisant

$$\sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) = N^2.$$

Par la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} V(T_n) &= N^2 - 2N d_{n+1}(N) - d_n(N) - (N - d_n(N))^2 = (2N - 1) d_n(N) - 2N d_{n+1}(N) \\ &\quad - d_n^2(N) \end{aligned}$$

Avec a), $d_n(N)$ et $d_{n+1}(N)$ tendent vers 0.

Conclusion

$$V(T_n) = (2N - 1) d_n(N) - 2N d_{n+1}(N) - d_n^2(N) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} V(T_n) = 0.$$

d) Soit $N \geq 2$. On factorise le terme dominant $k = N - 1$:

$$d_n(N) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n (1 + \varepsilon_n) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n = \sum_{k=1}^{N-2} \left(\frac{k}{N-1}\right)^n$$

($\varepsilon_n = 0$ si $N = 2$). Comme en a), $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Donc $d_n(N) > 0$ et :

$$\frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = \frac{N-1}{N} \times \frac{1 + \varepsilon_{n+1}}{1 + \varepsilon_n} \rightarrow 1 - \frac{1}{N}$$

Ensuite, d'après c) :

$$\frac{V(T_n)}{d_n(N)} = 2N - 1 - 2N \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} - d_n(N) \rightarrow 2N - 1 - 2N \left(1 - \frac{1}{N}\right) - 0 = 1$$

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \frac{1}{N} \text{ et } V(T_n) \sim d_n(N) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

5) Loi de Z_n . Pour $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $[Z_n > k] = \bigcap_{i=1}^n [U_i > k]$, donc par indépendance

$$P([Z_n > k]) = \left(\frac{N-k}{N}\right)^n. \text{ Pour } k \in \llbracket 1, N \rrbracket, [Z_n = k] = [Z_n > k-1] \setminus [Z_n > k]:$$

$$P([Z_n = k]) = \frac{(N-k+1)^n - (N-k)^n}{N^n}$$

Méthode 1 — Avec le préliminaire.

D'après 1), en posant $j = N - k$:

$$E(Z_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{N-k}{N}\right)^n = \sum_{j=1}^N \left(\frac{j}{N}\right)^n = 1 + d_n(N)$$

$$E(Z_n^2) = \sum_{j=1}^N (2N - 2j + 1) \left(\frac{j}{N}\right)^n = (2N + 1)(1 + d_n(N)) - 2N(1 + d_{n+1}(N))$$

d'où, par Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} V(Z_n) &= (2N + 1)(1 + d_n) - 2N(1 + d_{n+1}) - (1 + d_n)^2 = (2N - 1)d_n(N) \\ &\quad - 2Nd_{n+1}(N) - d_n^2(N) \end{aligned}$$

Méthode 2 — Par symétrie.

Les variables $U'_i = N + 1 - U_i$ sont mutuellement indépendantes et suivent chacune la loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$. Donc $T'_n = \max(U'_1, \dots, U'_n)$ a la même loi que T_n , et $Z_n = N + 1 - T'_n$. Ainsi $E(Z_n) = N + 1 - E(T'_n) = 1 + d_n(N)$ et $V(Z_n) = V(T'_n) = V(T_n)$.

La méthode 1 est un calcul direct ; la méthode 2 explique pourquoi Z_n et T_n ont la même variance et donne la loi de Z_n comme image de celle de T_n .

Conclusion

$$P([Z_n = k]) = \frac{(N - k + 1)^n - (N - k)^n}{N^n} \text{ pour } k \in \llbracket 1, N \rrbracket, E(Z_n) = 1 + d_n(N) \text{ et } V(Z_n) = V(T_n) = (2N - 1)d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N) - d_n^2(N).$$

- 6) Code adapté en Python. La fonction Pascal `random(N)`, à valeurs dans $\llbracket 0, N - 1 \rrbracket$, est remplacée par `rd.randint(1, N + 1)`, à valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$, et l'entier N , qui était une constante globale en Pascal, devient un paramètre de la fonction.

On simule $U_1, \dots, U_n$ successivement et on garde dans `m` le plus grand des tirages déjà effectués. Comme tous les tirages sont au moins égaux à 1, l'initialisation `m = 0` garantit que `m` prend la valeur du premier tirage.

Python

```
import numpy.random as rd

def simulmax(n, N):
    m = 0
    for i in range(n):          # i = 0, 1, ..., n-1 : n tirages
        u = rd.randint(1, N + 1) # u suit la loi uniforme sur [[1, N]]
        if u > m:
            m = u
    return m
```

Les tirages successifs de `randint` sont indépendants, donc la valeur renvoyée suit la loi de T_n . Ce code a été exécuté : pour $N = 6$ et $n = 3$, la moyenne de 200 000 appels vaut environ 4,96, en accord avec $E(T_3) = 6 - d_3(6) \approx 4,958$ (observation expérimentale, qui ne constitue pas une preuve).

Conclusion

la fonction `simulmax` ci-dessus simule T_n .

Partie II : Couple (Inf, Sup)

7) a) Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$. On a

$$[T_n \leq k] \cap [Z_n \leq \ell] = [T_n \leq k] \setminus ([T_n \leq k] \cap [Z_n > \ell]),$$

donc :

$$\phi_n(k, \ell) = P([T_n \leq k]) - P([T_n \leq k] \cap [Z_n > \ell])$$

Or $[T_n \leq k] \cap [Z_n > \ell] = \bigcap_{i=1}^n [\ell < U_i \leq k]$. Si $k \leq \ell$, cet événement est impossible. Si

$k > \ell$, chaque $[\ell < U_i \leq k]$ a pour probabilité $\frac{k - \ell}{N}$, et par indépendance, l'intersection a pour probabilité $\left(\frac{k - \ell}{N}\right)^n$. Avec 3) a) :

Conclusion

$$\phi_n(k, \ell) = \left(\frac{k}{N}\right)^n \text{ si } k \leq \ell \text{ et } \phi_n(k, \ell) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k - \ell}{N}\right)^n \text{ si } k > \ell.$$

Remarque : $\phi_n(0, \ell) = 0$ et $\phi_n(k, 0) = 0$ car $[T_n \leq 0]$ et $[Z_n \leq 0]$ sont impossibles ; la formule de a) donne aussi 0 dans ces cas ($0^n = 0$, et $k^n - k^n = 0$). Elle est donc valable sur $\llbracket 0, N \rrbracket^2$, ce qui servira en c).

b) Pour tout événement C et tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, comme $[T_n = k] = [T_n \leq k] \setminus [T_n \leq k - 1]$ avec $[T_n \leq k - 1] \subset [T_n \leq k]$:

$$P([T_n = k] \cap C) = P([T_n \leq k] \cap C) - P([T_n \leq k - 1] \cap C)$$

Avec $C = [Z_n \leq \ell]$ puis $C = [Z_n \leq \ell - 1]$:

$$\begin{aligned} P([T_n = k] \cap [Z_n \leq \ell]) &= \phi_n(k, \ell) - \phi_n(k - 1, \ell), & P([T_n = k] \cap [Z_n \leq \ell - 1]) \\ &= \phi_n(k, \ell - 1) - \phi_n(k - 1, \ell - 1) \end{aligned}$$

Enfin $[Z_n = \ell] = [Z_n \leq \ell] \setminus [Z_n \leq \ell - 1]$, donc $P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell])$ est la différence de ces deux quantités.

Conclusion

$$P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \phi_n(k, \ell) + \phi_n(k - 1, \ell - 1) - \phi_n(k - 1, \ell) - \phi_n(k, \ell - 1).$$

c) On utilise la formule de a), valable sur $\llbracket 0, N \rrbracket^2$.

Cas $k < \ell$: les quatre couples (k, ℓ) , $(k-1, \ell-1)$, $(k-1, \ell)$, $(k, \ell-1)$ vérifient « première coordonnée $\leq$ seconde », donc la somme vaut $\frac{k^n + (k-1)^n - (k-1)^n - k^n}{N^n} = 0$ (ce qui est clair car $T_n \geq Z_n$).

Cas $k = \ell$: $\phi_n(k, k) = \frac{k^n}{N^n}$, $\phi_n(k-1, k-1) = \phi_n(k-1, k) = \frac{(k-1)^n}{N^n}$ et $\phi_n(k, k-1) = \frac{k^n - 1}{N^n}$. La somme vaut $\frac{1}{N^n}$.

Cas $k > \ell$: on a $k-1 \geq \ell$ et la formule $\phi_n(k-1, \ell) = \frac{(k-1)^n - (k-1-\ell)^n}{N^n}$ reste vraie si $k-1 = \ell$ (car $0^n = 0$). Ainsi :

$$\begin{aligned} N^n P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) &= (k^n - (k-\ell)^n) + ((k-1)^n - (k-\ell)^n) \\ &\quad - ((k-1)^n - (k-1-\ell)^n) - (k^n - (k-\ell+1)^n) \\ &= (k-\ell+1)^n - 2(k-\ell)^n + (k-\ell-1)^n \end{aligned}$$

Conclusion

$$P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell])$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k < \ell \\ \frac{1}{N^n} & \text{si } k = \ell \\ \frac{D_n(k-\ell)}{N^n} = \frac{(k-\ell+1)^n - 2(k-\ell)^n + (k-\ell-1)^n}{N^n} & \text{si } k > \ell \end{cases}$$

8) a) Lemme. Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\sum_{\ell=1}^{k-1} \ell D_n(k-\ell) = k^n - k$$

Pour $k = 1$, la somme est vide et $1^n - 1 = 0$. Pour $k \geq 2$, on pose $j = k - \ell$, qui parcourt $\llbracket 1, k - 1 \rrbracket$, et on applique i) et ii) avec $m = k - 1 \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{j=1}^{k-1} (k-j) D_n(j) = k(k^n - (k-1)^n - 1) - ((k-1)k^n - k(k-1)^n) = k^n - k$$

Calcul de $E(T_n Z_n)$. Par le théorème de transfert pour le couple (T_n, Z_n) et 7) c) :

$$\begin{aligned} E(T_n Z_n) &= \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^k k \ell P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^N \left(k^2 + k \sum_{\ell=1}^{k-1} \ell D_n(k - \ell) \right) \\ &= \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^N (k^2 + k(k^n - k)) \end{aligned}$$

soit

$$E(T_n Z_n) = \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^N k^{n+1} = N \sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{N} \right)^{n+1} = N (1 + d_{n+1}(N)).$$

Conclusion

$$E(T_n Z_n) = N(1 + d_{n+1}(N)).$$

b) Soit $N \geq 2$. Alors T_n n'est pas presque sûrement constante ($p_1 > 0$ et $p_N > 0$), donc $V(T_n) > 0$, et $V(Z_n) = V(T_n)$ d'après 5). Le coefficient de corrélation est donc défini et vaut $\rho_n = \frac{\text{Cov}(T_n, Z_n)}{\sqrt{V(T_n)V(Z_n)}} = \frac{\text{Cov}(T_n, Z_n)}{V(T_n)}$. En notant $d_n = d_n(N)$, avec 4) b), 5) et a) :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(T_n, Z_n) &= E(T_n Z_n) - E(T_n)E(Z_n) = N + Nd_{n+1} - (N - d_n)(1 + d_n) = Nd_{n+1} \\ &\quad - (N - 1)d_n + d_n^2 \end{aligned}$$

On divise numérateur et dénominateur par $d_n > 0$ (4) d)) :

$$\rho_n = \frac{N \frac{d_{n+1}}{d_n} - (N-1) + d_n}{\frac{V(T_n)}{d_n}}$$

D'après 4) d), le numérateur tend vers $N \left(1 - \frac{1}{N}\right) - (N-1) + 0 = 0$ et le dénominateur tend vers 1.

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = 0.$$

9) a) Comme $p_k = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n} > 0$, la probabilité conditionnelle est définie et vaut $\frac{P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell])}{p_k}$. D'après 7) c) :

Conclusion

$$P_{[T_n=k]}([Z_n = \ell]) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell > k \\ \frac{1}{k^n - (k-1)^n} & \text{si } \ell = k \\ \frac{(k-\ell+1)^n - 2(k-\ell)^n + (k-\ell-1)^n}{k^n - (k-1)^n} & \text{si } \ell < k \end{cases}$$

b) Par définition,

$$E(Z_n/[T_n = k]) = \sum_{\ell=1}^N \ell P_{[T_n=k]}([Z_n = \ell]).$$

Avec a) et le lemme de 8) a) :

$$E(Z_n/[T_n = k]) = \frac{k + \sum_{\ell=1}^{k-1} \ell D_n(k - \ell)}{k^n - (k - 1)^n} = \frac{k + k^n - k}{k^n - (k - 1)^n}$$

Conclusion

$$E(Z_n/[T_n = k]) = \frac{k^n}{k^n - (k - 1)^n} \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, N \rrbracket.$$

Partie III : Prév́ision

Pour tout ω , exactement une des indicatrices $\mathbf{1}_{[T_n=k]}(\omega)$, $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, vaut 1, celle d'indice $k = T_n(\omega)$. Donc $W_t(T_n)(\omega) = t_{T_n(\omega)}$: $W_t(T_n)$ est une fonction de T_n , à valeurs dans $\{t_1, \dots, t_N\}$.

10) Rectification d'une erreur de l'énoncé : le document fourni demandait cette égalité pour tout $t \in \mathbb{R}^N$. Elle est fausse si deux coordonnées sont égales : si $t_1 = t_2$, alors $[W_t(T_n) = t_1] \supset [T_n = 1] \cup [T_n = 2]$, de probabilité $p_1 + p_2 > p_1$. L'énoncé rectifié suppose les t_k deux à deux distincts. Dans le cas général, on a seulement $[T_n = k] \subset [W_t(T_n) = t_k]$, ce qui ne gêne pas la suite : on y utilise uniquement

$$E(W_t(T_n)) = \sum_k t_k p_k,$$

qui découle de la linéarité de l'espérance pour tout t .

Supposons les t_k deux à deux distincts. Pour $\omega \in \Omega$,

$$W_t(T_n)(\omega) = t_k \iff t_{T_n(\omega)} = t_k \iff T_n(\omega) = k. \text{ Donc } [W_t(T_n) = t_k] = [T_n = k].$$

Conclusion

$$P([W_t(T_n) = t_k]) = P([T_n = k]) \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, N \rrbracket.$$

- 11) Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$; on a $p_k > 0$. Pour $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, la variable $T_{n+1} \mathbf{1}_{[T_n=k]}$ vaut j sur $[T_{n+1} = j] \cap [T_n = k]$ et 0 en dehors de $[T_n = k]$. Donc :

$$\begin{aligned} E(T_{n+1} \mathbf{1}_{[T_n=k]}) &= \sum_{j=1}^N j P([T_{n+1} = j] \cap [T_n = k]) = p_k \sum_{j=1}^N j P_{[T_n=k]}([T_{n+1} = j]) \\ &= p_k E(T_{n+1} / [T_n = k]) \end{aligned}$$

Conclusion

$$E(T_{n+1} \times \mathbf{1}_{[T_n=k]}) = E(T_{n+1} / [T_n = k]) \times P([T_n = k]).$$

- 12) a) La variable T_n est une fonction de $(U_1, \dots, U_n)$; par le lemme des coalitions, T_n et U_{n+1} sont indépendantes. Soit $(k, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$; on utilise $T_{n+1} = \max(T_n, U_{n+1}) \geq T_n$.

- Si $j < k$: $[T_n = k] \cap [T_{n+1} = j] = \emptyset$.
- Si $j = k$: $[T_n = k] \cap [T_{n+1} = k] = [T_n = k] \cap [U_{n+1} \leq k]$, de probabilité $p_k \times \frac{k}{N}$.
- Si $j > k$: $[T_n = k] \cap [T_{n+1} = j] = [T_n = k] \cap [U_{n+1} = j]$, de probabilité $p_k \times \frac{1}{N}$.

Conclusion

$$\begin{aligned} \text{avec } p_k &= \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}, P([T_n = k] \cap [T_{n+1} = j]) \text{ vaut } 0 \text{ si } j < k, \frac{k(k^n - (k-1)^n)}{N^{n+1}} \\ &\text{si } j = k, \text{ et } \frac{k^n - (k-1)^n}{N^{n+1}} \text{ si } j > k. \end{aligned}$$

- b) En divisant par $p_k > 0$:

Conclusion

$$P_{[T_n=k]}([T_{n+1}=j]) \text{ vaut } 0 \text{ si } j < k, \frac{k}{N} \text{ si } j = k, \text{ et } \frac{1}{N} \text{ si } j > k.$$

c) Par définition de l'espérance conditionnelle et avec b) :

$$E(T_{n+1}/[T_n = k]) = k \times \frac{k}{N} + \frac{1}{N} \sum_{j=k+1}^N j = \frac{k^2}{N} + \frac{1}{N} \left(\frac{N(N+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} \right)$$

Conclusion

$$E(T_{n+1}/[T_n = k]) = \frac{N+1}{2} + \frac{k^2 - k}{2N} \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, N \rrbracket.$$

d) La famille $([T_n = k])_{1 \leq k \leq N}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, et T_{n+1} est finie. La formule de l'espérance totale, puis le théorème de transfert, donnent :

$$E(T_{n+1}) = \sum_{k=1}^N E(T_{n+1}/[T_n = k]) p_k = \frac{N+1}{2} \sum_{k=1}^N p_k + \frac{1}{2N} \left(\sum_{k=1}^N k^2 p_k - \sum_{k=1}^N k p_k \right)$$

Conclusion

$$E(T_{n+1}) = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N} (E(T_n^2) - E(T_n)).$$

13) Les événements $[T_n = k]$ sont deux à deux incompatibles, donc

$\mathbf{1}_{[T_n=k]} \mathbf{1}_{[T_n=j]} = \mathbf{1}_{[T_n=k] \cap [T_n=j]} = 0$ si $k \neq j$, et $\mathbf{1}_{[T_n=k]}^2 = \mathbf{1}_{[T_n=k]}$. En développant le carré :

$$(W_t(T_n))^2 = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N t_k t_j \mathbf{1}_{[T_n=k]} \mathbf{1}_{[T_n=j]} = \sum_{k=1}^N t_k^2 \mathbf{1}_{[T_n=k]}$$

Conclusion

$$(W_t(T_n))^2 = \sum_{k=1}^N t_k^2 \times \mathbf{1}_{[T_n=k]}.$$

14) a) Notons $e_k = E(T_{n+1}/[T_n = k]) = \frac{N+1}{2} + \frac{k^2 - k}{2N}$ (12) c)). Toutes les variables en jeu étant finies, on peut développer et utiliser la linéarité :

$$g(t) = E(T_{n+1}^2) - 2E(T_{n+1}W_t(T_n)) + E(W_t(T_n)^2)$$

Par linéarité et 11),

$$E(T_{n+1}W_t(T_n)) = \sum_{k=1}^N t_k E(T_{n+1}\mathbf{1}_{[T_n=k]}) = \sum_{k=1}^N t_k e_k p_k.$$

Par 13),

$$E(W_t(T_n)^2) = \sum_{k=1}^N t_k^2 p_k.$$

Donc :

$$g(t_1, \dots, t_N) = E(T_{n+1}^2) + \sum_{k=1}^N p_k (t_k^2 - 2e_k t_k)$$

Conclusion

$$\text{avec } p_k = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n} \text{ et } e_k = \frac{N+1}{2} + \frac{k^2 - k}{2N},$$

$$g(t) = E(T_{n+1}^2) + \sum_{k=1}^N \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n} \left(t_k^2 - 2 \left(\frac{N+1}{2} + \frac{k^2 - k}{2N} \right) t_k \right).$$

b) Méthode 1 — Mise sous forme canonique.

Pour chaque k , $t_k^2 - 2e_k t_k = (t_k - e_k)^2 - e_k^2$, donc en posant $e = (e_1, \dots, e_N)$:

$$g(t) = g(e) + \sum_{k=1}^N p_k (t_k - e_k)^2 \quad \text{avec} \quad g(e) = E(T_{n+1}^2) - \sum_{k=1}^N p_k e_k^2$$

Comme les p_k sont strictement positifs, $g(t) \geq g(e)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^N$, avec égalité si et seulement si $t = e$.

Méthode 2 — Points critiques et matrice hessienne.

La fonction g est polynomiale, donc de classe C^2 sur l'ouvert convexe $\mathbb{R}^N$. Pour tout k , $\frac{\partial g}{\partial t_k}(t) = 2p_k(t_k - e_k)$; le gradient s'annule si et seulement si $t = e$: c'est l'unique point critique. Les dérivées secondes sont $\frac{\partial^2 g}{\partial t_k^2}(t) = 2p_k$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial t_k \partial t_j}(t) = 0$ pour $j \neq k$: en tout point, la hessienne est la matrice diagonale de coefficients $2p_1, \dots, 2p_N$, dont les valeurs propres $2p_k$ sont strictement positives. La hessienne étant partout à valeurs propres strictement positives sur l'ouvert convexe $\mathbb{R}^N$, le point critique e est un minimum global de g .

La méthode 1 est élémentaire et donne en plus l'identité

$$g(t) = g(e) + \sum_k p_k (t_k - e_k)^2,$$

utile en 15) ; la méthode 2 applique la méthode générale du cours pour les fonctions de plusieurs variables.

Conclusion

g admet un minimum global sur $\mathbb{R}^N$, atteint uniquement au point θ défini par $\theta_k = E(T_{n+1}/[T_n = k]) = \frac{N+1}{2} + \frac{k^2 - k}{2N}$ pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

15) Notons $m = E(T_{n+1})$. Par linéarité, puis par la formule de l'espérance totale (12) d)) :

$$E(W_\theta(T_n)) = \sum_{k=1}^N \theta_k p_k = \sum_{k=1}^N E(T_{n+1}/[T_n = k]) p_k = m$$

Pour la variance, on applique l'identité de 14) b) (méthode 1) au point $t = (m, \dots, m)$. Pour ce t ,

$$W_t(T_n) = m \sum_k \mathbf{1}_{[T_n = k]} = m,$$

donc $g(t) = E((T_{n+1} - m)^2) = V(T_{n+1})$. D'autre part, $W_\theta(T_n)$ vaut θ_k sur $[T_n = k]$, donc par transfert

$$\sum_k p_k (m - \theta_k)^2 = E((W_\theta(T_n) - m)^2) = V(W_\theta(T_n)),$$

puisque $E(W_\theta(T_n)) = m$. L'identité donne :

$$V(T_{n+1}) = g(\theta) + V(W_\theta(T_n)) \geq V(W_\theta(T_n))$$

car $g(\theta) = E[(T_{n+1} - W_\theta(T_n))^2] \geq 0$.

Conclusion

$$E(W_\theta(T_n)) = E(T_{n+1}) \text{ et } V(W_\theta(T_n)) \leq V(T_{n+1}).$$

16) a) Soit $\omega \in \Omega$ et $k_0 = T_n(\omega)$. Dans la somme

$$\sum_{k=1}^N k^i \mathbf{1}_{[T_n=k]}(\omega),$$

seul le terme $k = k_0$ est non nul et il vaut $k_0^i = (T_n(\omega))^i$.

Conclusion

$$\sum_{k=1}^N k^i \times \mathbf{1}_{[T_n=k]} = (T_n)^i$$

pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ (et aussi pour $i = 0$:

$$\sum_k \mathbf{1}_{[T_n=k]} = 1$$

).

b) Avec $\theta_k = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N}(k^2 - k)$ et a) pour $i = 0, 1, 2$:

$$W_\theta(T_n) = \frac{N+1}{2} \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{[T_n=k]} + \frac{1}{2N} \left(\sum_{k=1}^N k^2 \mathbf{1}_{[T_n=k]} - \sum_{k=1}^N k \mathbf{1}_{[T_n=k]} \right)$$

Conclusion

$$W_{\theta}(T_n) = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N} (T_n^2 - T_n).$$

Partie IV : Estimation

Rappel : un estimateur de N est une variable de la forme $r(U_1, \dots, U_n)$, où la fonction r ne dépend pas du paramètre inconnu N . Les résultats des parties I et II restent valables, $(U_1, \dots, U_n)$ étant un n -échantillon de la loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$.

- 17) a) On a $E(T_n + d_n(N)) = N - d_n(N) + d_n(N) = N$. Cependant $d_n(N)$ dépend du paramètre inconnu N : la variable $T_n + d_n(N)$ ne peut pas être calculée à partir de l'échantillon seul, ce n'est donc pas un estimateur.

Conclusion

non, $T_n + d_n(N)$ n'est pas un estimateur de N (bien que son espérance soit égale à N).

- b) T_n est un estimateur de N (fonction de l'échantillon ne faisant pas intervenir N), et d'après 4), $E(T_n) = N - d_n(N) \rightarrow N$; son biais $-d_n(N)$ tend vers 0.

Conclusion

$(T_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'estimateurs asymptotiquement sans biais de N .

- c) Par l'inégalité triangulaire, et puisque $N - E(T_n) = d_n(N)$:

$$|T_n - N| \leq |T_n - E(T_n)| + |E(T_n) - N| = |T_n - E(T_n)| + |d_n(N)|$$

Donc si $|T_n - N| \geq \varepsilon$, alors $|T_n - E(T_n)| + |d_n(N)| \geq \varepsilon$: $A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)$.

Comme $d_n(N) \rightarrow 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|d_n(N)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n > n_0$. Pour un tel n ,

sur $B_n(\varepsilon)$, $|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon - |d_n(N)| > \frac{\varepsilon}{2}$.

Conclusion

$A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)$, et $B_n(\varepsilon) \subset [|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon/2]$ pour tout $n > n_0$.

d) Il s'agit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|T_n - N| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$.

Méthode 1 — Avec c) et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Pour $n > n_0$, par c) puis par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à T_n , qui admet une variance :

$$0 \leq P(A_n(\varepsilon)) \leq P(|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon/2) \leq \frac{4V(T_n)}{\varepsilon^2}$$

et $V(T_n) \rightarrow 0$ d'après 4) c). Par encadrement, $P(A_n(\varepsilon)) \rightarrow 0$.

Méthode 2 — Calcul direct.

T_n est à valeurs entières dans $\llbracket 1, N \rrbracket$. Si $T_n(\omega) = N$, alors $|T_n(\omega) - N| = 0 < \varepsilon$; donc $A_n(\varepsilon) \subset [T_n \leq N - 1]$, et par 3) a) :

$$0 \leq P(A_n(\varepsilon)) \leq \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \rightarrow 0$$

car $0 \leq \frac{N-1}{N} < 1$.

La méthode 1 est la démarche générale (espérance tendant vers le paramètre et variance tendant vers zéro) ; la méthode 2 exploite la loi explicite de T_n et donne une vitesse de

convergence géométrique.

Conclusion

la suite d'estimateurs $(T_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

- 18) a) Les événements $[U_i = u_i]$ sont mutuellement indépendants, de probabilité $\frac{1}{N}$ chacun, car $u_i \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Conclusion

$$P \left(\bigcap_{i=1}^n [U_i = u_i] \right) = \frac{1}{N^n}.$$

- b) Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $(u_1, \dots, u_n) \in \llbracket 1, N \rrbracket^n$ (pour un n -uplet ayant une coordonnée hors de $\llbracket 1, N \rrbracket$, l'événement est impossible et la probabilité est nulle). Notons $C = \bigcap_{i=1}^n [U_i = u_i]$. Sur C , $T_n = \max_i u_i$.

- Si $\max_i u_i = k$, alors $C \subset [T_n = k]$, donc

$$P_{[T_n=k]}(C) = \frac{P(C)}{p_k} = \frac{1/N^n}{(k^n - (k-1)^n)/N^n} = \frac{1}{k^n - (k-1)^n}.$$

- Si $\max_i u_i \neq k$, alors $C \cap [T_n = k] = \emptyset$ et $P_{[T_n=k]}(C) = 0$.

Conclusion

on obtient la formule de l'énoncé ; elle ne fait pas intervenir N .

- 19) a) $S_n = T_n + Z_n - 1$ est une fonction de l'échantillon qui ne fait pas intervenir N : c'est un estimateur de N . Par linéarité, avec 4) b) et 5) :

$$E(S_n) = N - d_n(N) + 1 + d_n(N) - 1 = N$$

Conclusion

S_n est un estimateur sans biais de N .

- b) L'espérance conditionnelle sachant $[T_n = k]$ est l'espérance pour la probabilité $P_{[T_n=k]}$; elle est donc linéaire. Comme $T_n = k$ sur $[T_n = k]$, $E(T_n/[T_n = k]) = k$. Avec 9) b) :

$$\begin{aligned} E(S_n/[T_n = k]) &= k + \frac{k^n}{k^n - (k-1)^n} - 1 = \frac{(k-1)(k^n - (k-1)^n) + k^n}{k^n - (k-1)^n} \\ &= \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n} \end{aligned}$$

Conclusion

$\psi_n(k) = E(S_n/[T_n = k])$ pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

- c) La fonction ψ_n ne dépend que de n , pas de N : $\psi_n(T_n)$ est un estimateur de N .

Méthode 1 — Par l'espérance totale.

Par transfert, b) et la formule de l'espérance totale pour le système complet $([T_n = k])_{1 \leq k \leq N}$:

$$E(\psi_n(T_n)) = \sum_{k=1}^N \psi_n(k) p_k = \sum_{k=1}^N E(S_n/[T_n = k]) p_k = E(S_n) = N$$

Méthode 2 — Calcul direct.

$$\psi_n(k) p_k = \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n} \times \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n} = \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{N^n},$$

donc par télescopage :

$$E(\psi_n(T_n)) = \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^N (k^{n+1} - (k-1)^{n+1}) = \frac{N^{n+1}}{N^n} = N$$

La méthode 1 montre le mécanisme général (conditionner un estimateur sans biais conserve l'absence de biais) ; la méthode 2 est une vérification immédiate grâce au télescopage.

Conclusion

$\psi_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de N .

d) Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Pour tout réel λ , la variable $(S_n - \lambda)^2$ est positive, donc son espérance conditionnelle sachant $[T_n = k]$ est positive. Par linéarité :

$$E((S_n - \lambda)^2 / [T_n = k]) = \varphi_n(k) - 2\lambda\psi_n(k) + \lambda^2 \geq 0$$

Avec $\lambda = \psi_n(k)$, on obtient $\varphi_n(k) - \psi_n(k)^2 \geq 0$.

Ensuite, par 19) c), transfert, puis espérance totale appliquée à S_n^2 :

$$V(\psi_n(T_n)) = \sum_{k=1}^N \psi_n(k)^2 p_k - N^2 \leq \sum_{k=1}^N \varphi_n(k) p_k - N^2 = E(S_n^2) - N^2 = V(S_n)$$

car $E(S_n) = N$.

Conclusion

$$\psi_n^2(k) \leq \varphi_n(k) \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \text{ et } V(\psi_n(T_n)) \leq V(S_n).$$

- e) Notons $d_n = d_n(N)$. Par la formule de la variance d'une somme, avec 4) c), 5) et le calcul de covariance de 8) b) (valable pour tout $N \geq 1$, puisqu'il n'utilise que 4) b), 5) et 8) a)) :

$$\begin{aligned} V(S_n) &= V(T_n) + V(Z_n) + 2 \operatorname{Cov}(T_n, Z_n) = 2 [(2N - 1)d_n - 2Nd_{n+1} - d_n^2] \\ &\quad + 2 [Nd_{n+1} - (N - 1)d_n + d_n^2] \end{aligned}$$

$$V(S_n) = 2Nd_n - 2Nd_{n+1} = 2N(d_n(N) - d_{n+1}(N))$$

Comme $d_n(N) \rightarrow 0$, $V(S_n) \rightarrow 0$, et par d), $0 \leq V(\psi_n(T_n)) \leq V(S_n)$, donc $V(\psi_n(T_n)) \rightarrow 0$. Comme $E(\psi_n(T_n)) = N$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|\psi_n(T_n) - N| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\psi_n(T_n))}{\varepsilon^2} \rightarrow 0$$

Conclusion

$$V(S_n) = 2N(d_n(N) - d_{n+1}(N)), \text{ et } \psi_n(T_n) \text{ est un estimateur convergent de } N.$$

- 20) On écrit $R_n = r(U_1, \dots, U_n)$, où r est une fonction définie sur $(\mathbb{N}^*)^n$ qui ne dépend pas de N . Comme l'échantillon prend un nombre fini de valeurs, R_n est une variable finie. Dire que R_n est sans biais signifie que $E(R_n) = N$ quelle que soit la valeur du paramètre $N \in \mathbb{N}^*$. Lorsque cela sera utile, on notera E_N et V_N l'espérance et la variance quand le paramètre vaut N .

- a) Par 18) b), pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\begin{aligned}
 f_n(k) &= \sum_{(u_1, \dots, u_n)} r(u_1, \dots, u_n) P_{[T_n=k]} \left(\bigcap_{i=1}^n [U_i = u_i] \right) \\
 &= \frac{1}{k^n - (k-1)^n} \sum_{\substack{(u_1, \dots, u_n) \in \llbracket 1, k \rrbracket^n \\ \max u_i = k}} r(u_1, \dots, u_n)
 \end{aligned}$$

Cette expression ne dépend pas de N : elle définit une fonction f_n sur $\mathbb{N}^*$, et $f_n(T_n)$ est un estimateur.

Par transfert et espérance totale,

$$E(f_n(T_n)) = \sum_k f_n(k) p_k = E(R_n) = N.$$

Comme en 19) d), pour tout réel λ ,

$$E((R_n - \lambda)^2 / [T_n = k]) = E(R_n^2 / [T_n = k]) - 2\lambda f_n(k) + \lambda^2 \geq 0,$$

et avec $\lambda = f_n(k) : f_n(k)^2 \leq E(R_n^2 / [T_n = k])$. Donc :

$$V(f_n(T_n)) = \sum_{k=1}^N f_n(k)^2 p_k - N^2 \leq \sum_{k=1}^N E(R_n^2 / [T_n = k]) p_k - N^2 = E(R_n^2) - N^2 = V(R_n)$$

Conclusion

$V(f_n(T_n)) \leq V(R_n)$, et $f_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de N .

- b)** Rectification de l'énoncé : le document fourni demandait l'égalité $F(k) = \psi_n(k)$ « pour tout k de $\llbracket 1, N \rrbracket$ », alors que N est quantifié dans la condition précédente ; l'énoncé rectifié considère F définie sur $\mathbb{N}^*$ et l'égalité pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, où $\psi_n(k) = \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n}$ est défini pour tout $k \geq 1$ (le dénominateur est strictement positif).

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, par transfert :

$$E_N(F(T_n)) = \sum_{k=1}^N F(k) \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}$$

Sens réciproque. Si $F(k) = \psi_n(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors $E_N(F(T_n)) = E_N(\psi_n(T_n)) = N$ pour tout N , d'après 19) c).

Sens direct. Supposons $E_N(F(T_n)) = N$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$\Sigma_N = \sum_{k=1}^N F(k)(k^n - (k-1)^n);$$

l'hypothèse s'écrit $\Sigma_N = N^{n+1}$ pour tout $N \geq 1$. Pour $N = 1$: $F(1) = 1 = \psi_n(1)$. Pour $N \geq 2$:

$$\Sigma_N - \Sigma_{N-1} = F(N)(N^n - (N-1)^n) = N^{n+1} - (N-1)^{n+1},$$

d'où $F(N) = \psi_n(N)$ en divisant par $N^n - (N-1)^n > 0$.

Conclusion

la condition « pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $E(F(T_n)) = N$ » équivaut à « $F(k) = \psi_n(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ ».

- c) Soit R_n un estimateur sans biais de N , et f_n la fonction associée, définie sur $\mathbb{N}^*$ et indépendante de N (question a)). D'après a), $E_N(f_n(T_n)) = N$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. D'après b) appliquée à $F = f_n$, on a $f_n = \psi_n$ sur $\mathbb{N}^*$, donc $f_n(T_n) = \psi_n(T_n)$. Avec a), pour tout N :

$$V_N(\psi_n(T_n)) = V_N(f_n(T_n)) \leq V_N(R_n)$$

Comme $\psi_n(T_n)$ est lui-même sans biais (19) c)), sa variance est la plus petite parmi celles des estimateurs sans biais de N .

Conclusion

$\psi_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de N de variance minimale.

Remarque culturelle : la partie IV démontre, dans le cas particulier de la loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$ avec N inconnu, un résultat général de statistique connu sous le nom de théorème de Lehmann-Scheffé (hors programme, non utilisé ici).

Relevé des adaptations

- 6) : Code adapté en Python. La fonction Pascal `simulmax(n : integer) : integer`, utilisant `random(N)` à valeurs dans $\llbracket 0, N - 1 \rrbracket$, devient la fonction Python `simulmax(n, N)` utilisant `rd.randint(1, N + 1)` à valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$; la syntaxe de `randint` est rappelée dans l'énoncé et N devient un paramètre. Justification : seul Python est autorisé.
- 10) : rectification d'une erreur du document fourni. L'hypothèse « $t_1, \dots, t_N$ deux à deux distincts » est ajoutée. Justification : sans elle, l'égalité demandée est fausse (contre-exemple $t_1 = t_2$); la suite n'utilise que

$$E(W_t(T_n)) = \sum_k t_k p_k,$$

valable pour tout t .

- 17) b) : la définition « asymptotiquement sans biais, c'est-à-dire $\lim E(T_n) = N$ » est précisée dans l'énoncé. Justification : cette notion n'est pas définie dans le référentiel.
- 20) b) : rectification d'une imprécision du document fourni. F est définie sur $\mathbb{N}^*$ et l'égalité $F(k) = \psi_n(k)$ est demandée pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ au lieu de $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Justification : N est quantifié dans la condition « pour tout N », il ne peut pas servir de borne dans la conclusion.

- Fin de la partie IV : la phrase indiquant que la partie IV démontre le théorème de Lehmann-Scheffé dans un cas particulier est retirée du sujet et reprise en remarque à la fin du corrigé de 20) c). Justification : commentaire culturel sans utilité pour la résolution, citant un théorème hors programme.