



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2008

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Rappels et conventions utilisés dans tout le corrigé.

On note $f_U : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ la densité de U et F_U sa fonction de répartition. « $A \sim B$ » signifie que les variables A et B ont même loi ; deux variables de même loi ont même espérance, même variance, même ensemble $\mathcal{D}$ et même fonction Φ , car ces quantités ne dépendent que de la loi.

Théorème de transfert pour une variable X de densité f_X : pour une fonction h continue (sauf éventuellement en un nombre fini de points), $h(X)$ admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)| f_X(x) dx$ converge, et alors $E(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_X(x) dx$. Lorsque $h \geq 0$, convergence et convergence absolue coïncident.

Loi $\gamma(\nu)$ ($\nu > 0$) : densité $x \mapsto \frac{x^{\nu-1} e^{-x}}{\Gamma(\nu)}$ sur $]0, +\infty[$, nulle ailleurs, avec

$\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1} e^{-t} dt$, $\Gamma(\nu+1) = \nu \Gamma(\nu)$; espérance et variance égales à ν . Si Y_1 et Y_2 sont indépendantes de lois $\gamma(\nu_1)$ et $\gamma(\nu_2)$, alors $Y_1 + Y_2$ suit la loi $\gamma(\nu_1 + \nu_2)$.

Transformation affine : si Y a une densité f et si $c > 0$, alors cY a pour densité $x \mapsto \frac{1}{c} f\left(\frac{x}{c}\right)$.

Lemme des coalitions : des variables construites à partir de paquets disjoints de variables mutuellement indépendantes sont mutuellement indépendantes (le premier résultat admis de l'énoncé en est un cas particulier).

Produit de n facteurs. Si $V_1, \dots, V_n$ sont mutuellement indépendantes et admettent une espérance, alors $V_1 \cdots V_n$ admet une espérance égale à $E(V_1) \cdots E(V_n)$. Cela résulte, par récurrence sur n , du second résultat admis, puisque $V_1 \cdots V_k$ et V_{k+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions.

Préliminaire

1. a) On étudie séparément le cas $a < 0$ (divergence grossière) et le cas $a > 0$ (changement de variable affine ramenant à l'intégrale rappelée).

Cas $a < 0$. Pour tout réel x , $-ax^2 \geq 0$, donc $\exp(-ax^2) \geq 1$. Pour $B > 0$,

$$\int_0^B \exp(-ax^2) dx \geq B \rightarrow +\infty, \text{ donc l'intégrale diverge.}$$

Cas $a > 0$. Soit $B > 0$. Le changement de variable affine $x = \frac{y}{\sqrt{2a}}$ donne

$$\int_{-B}^B \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-B\sqrt{2a}}^{B\sqrt{2a}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy. \text{ La fonction intégrée étant paire et positive, et l'intégrale rappelée étant convergente, on obtient en faisant tendre } B \text{ vers } +\infty \text{ (séparément sur } [0, B] \text{ et } [-B, 0]) \text{ que } \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) dx \text{ converge et vaut}$$

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Conclusion

pour $a \neq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) dx$ converge si et seulement si $a > 0$, et vaut alors $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

b) On met $-ax^2 + bx$ sous forme canonique et on se ramène à a) par une translation.

Comme $a \neq 0$, pour tout réel x : $-ax^2 + bx = -a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a}$, donc :

$$\exp(-ax^2 + bx) = \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \exp\left(-a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2\right)$$

Le changement de variable affine $y = x - \frac{b}{2a}$ transforme, sur tout segment, l'intégrale de $x \mapsto \exp\left(-a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2\right)$ en celle de $y \mapsto \exp(-ay^2)$; les deux intégrales sur $\mathbb{R}$ sont donc de même nature et égales en cas de convergence. Le facteur $\exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$ étant une constante non nulle, a) donne le résultat.

Conclusion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx) dx \text{ converge si et seulement si } a > 0, \text{ et vaut alors } \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right).$$

2. a) On applique le théorème de transfert à $h : x \mapsto e^{sx}$, positive et continue, puis 1. b).

Soit $s \in \mathbb{R}$. e^{sU} admet une espérance si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 + sx\right) dx$$

converge. D'après 1. b) avec $a = \frac{1}{2} > 0$ et $b = s$, cette intégrale converge et vaut

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{s^2}{2}\right).$$

Conclusion

$$\mathcal{D}_U = \mathbb{R} \text{ et, pour tout réel } s, \Phi_U(s) = e^{s^2/2}.$$

b) On applique le théorème de transfert à U et à la fonction positive et continue

$$h : x \mapsto e^{sx^2}.$$

Soit $s \in \mathbb{R}$. $e^{sZ} = e^{sU^2}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{1}{2} - s\right)x^2\right) dx \text{ converge.}$$

Si $s = \frac{1}{2}$, la fonction intégrée est la constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} > 0$ et l'intégrale diverge. Si

$s \neq \frac{1}{2}$, le réel $a = \frac{1}{2} - s$ est non nul et, d'après 1. a), l'intégrale converge si et seulement

si $\frac{1}{2} - s > 0$, c'est-à-dire $s < \frac{1}{2}$; elle vaut alors :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2} - s}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2\pi}{1 - 2s}} = (1 - 2s)^{-1/2}$$

Conclusion

$$\mathcal{D}_Z =]-\infty, \frac{1}{2}[\text{ et, pour tout } s < \frac{1}{2}, \Phi_Z(s) = (1 - 2s)^{-1/2}.$$

3. a) On factorise $e^{s(\mu X + \beta)}$ par la constante $e^{\beta s}$.

Pour tout réel s , $e^{s(\mu X + \beta)} = e^{\beta s} e^{(\mu s)X}$, où $e^{\beta s}$ est une constante strictement positive. Par linéarité de l'espérance (utilisée dans les deux sens, en multipliant par $e^{\beta s}$ ou par $e^{-\beta s}$), $e^{s(\mu X + \beta)}$ admet une espérance si et seulement si $e^{(\mu s)X}$ en admet une, c'est-à-dire si et seulement si $\mu s \in \mathcal{D}_X$, et dans ce cas $E(e^{s(\mu X + \beta)}) = e^{\beta s} E(e^{(\mu s)X})$. (Si $\mu = 0$, la variable $\mu X + \beta$ est constante; l'ensemble $\mathcal{D}_\beta$ des s tels que $e^{s\beta}$ admet une espérance est $\mathbb{R}$, et $0 \in \mathcal{D}_X$ avec $\Phi_X(0) = 1$: le résultat reste vrai.)

Conclusion

$$s \in \mathcal{D}_{\mu X + \beta} \iff \mu s \in \mathcal{D}_X, \text{ et alors } \Phi_{\mu X + \beta}(s) = \exp(\beta s) \Phi_X(\mu s).$$

b) On applique le théorème de transfert avec la densité de la loi $\gamma(\nu)$, puis 3. a) pour $2X$.

Soit $s \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^{sx}$ étant positive, $s \in \mathcal{D}_X$ si et seulement si

$$I(s) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{+\infty} x^{\nu-1} e^{-(1-s)x} dx \text{ converge.}$$

Si $s \geq 1$: pour $x \geq 1$, $e^{-(1-s)x} \geq 1$ et $x^{\nu-1} \geq x^{-1}$ (car $\nu - 1 \geq -1$ et $x \geq 1$), donc $x^{\nu-1} e^{-(1-s)x} \geq \frac{1}{x} \geq 0$. L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, donc $I(s)$ diverge par comparaison de fonctions positives.

Si $s < 1$: le changement de variable affine $t = (1-s)x$, avec $1-s > 0$, donne, sur tout segment $[\varepsilon, B]$ puis par passage à la limite, que $I(s)$ converge, avec :

$$I(s) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1-s} \right)^{\nu-1} e^{-t} \frac{dt}{1-s} = \frac{(1-s)^{-\nu}}{\Gamma(\nu)} \int_0^{+\infty} t^{\nu-1} e^{-t} dt = (1-s)^{-\nu}$$

Pour $2X$: d'après 3. a) avec $\mu = 2$ et $\beta = 0$, $s \in \mathcal{D}_{2X}$ si et seulement si $2s \in \mathcal{D}_X$, c'est-à-dire $2s < 1$, et alors $\Phi_{2X}(s) = \Phi_X(2s) = (1 - 2s)^{-\nu}$.

Conclusion

$$\mathcal{D}_X =]-\infty, 1[\text{ et } \Phi_X(s) = (1-s)^{-\nu}; \quad \mathcal{D}_{2X} =]-\infty, \frac{1}{2}[\text{ et } \Phi_{2X}(s) = (1-2s)^{-\nu}.$$

Partie I. Loi du χ^2 centré

1. On étudie la fonction f_{X_4} sur $] -\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$, puis on décrit sa courbe.

Expression. Pour $r = 4$, $2^{r/2} = 4$ et $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$. Donc $f_{X_4}(x) = \frac{1}{4}xe^{-x/2}$ si $x > 0$, et $f_{X_4}(x) = 0$ si $x \leq 0$. Notons $f = f_{X_4}$.

Continuité et comportement en 0. Sur $] -\infty, 0]$, f est nulle. Quand $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow 0 = f(0)$: f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{4}e^{-x/2} \rightarrow \frac{1}{4}$ quand $x \rightarrow 0^+$: la courbe admet en l'origine une demi-tangente à droite de pente $\frac{1}{4}$, et une demi-tangente à gauche horizontale ; f n'est pas dérivable en 0.

Variations sur $]0, +\infty[$. f y est de classe C^2 et :

$$f'(x) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-x/2}, \quad f''(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{x}{4} - 1\right) e^{-x/2}$$

f' est du signe de $2 - x$: f est strictement croissante sur $]0, 2]$, strictement décroissante sur $[2, +\infty[$, et admet en 2 un maximum global $f(2) = \frac{1}{2e} \approx 0,184$.

Limite en $+\infty$. Par croissances comparées, $xe^{-x/2} \rightarrow 0$: l'axe des abscisses est asymptote en $+\infty$, la courbe restant au-dessus.

Convexité. f'' est du signe de $x - 4$: f est concave sur $]0, 4]$ et convexe sur $[4, +\infty[$; le point $(4, e^{-2})$, avec $e^{-2} \approx 0,135$, est un point d'inflexion.

Tableau de valeurs (valeurs approchées) :

x	1	2	4	6	8	10
$f(x)$	0,152	0,184	0,135	0,075	0,037	0,017

Tracé. La courbe est confondue avec l'axe des abscisses sur $] -\infty, 0]$; elle part de l'origine avec la pente $\frac{1}{4}$, monte de façon concave jusqu'au sommet $\left(2, \frac{1}{2e}\right)$, redescend, change de concavité en $(4, e^{-2})$, puis décroît vers 0 en restant au-dessus de l'axe des abscisses, asymptote en $+\infty$.

Le code Python suivant (exécuté) trace cette courbe et affiche les valeurs du tableau. La fonction `np.linspace(a, b, N)` renvoie N points régulièrement espacés de a à b , et les opérations sur le tableau `x` sont faites coefficient par coefficient.

Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(0, 14, 500)          # 500 points régulièrement espacés de 0 à 14
y = x * np.exp(-x / 2) / 4          # f_{X_4}(x) pour x >= 0 (calcul coefficient par coefficient)

plt.plot(x, y)                       # partie x >= 0 de la courbe
plt.plot([-2, 0], [0, 0])            # partie x <= 0 : la densité y est nulle
plt.plot([2, 2], [0, np.exp(-1) / 2], '--') # abscisse du maximum
plt.plot([4], [np.exp(-2)], 'o')     # point d'inflexion
plt.show()

for t in [1, 2, 4, 6, 8, 10]:
    print(t, round(t * np.exp(-t / 2) / 4, 4))
```

Sortie obtenue : 0,1516; 0,1839; 0,1353; 0,0747; 0,0366; 0,0168, en accord avec l'étude.

Conclusion

f_{X_4} est nulle sur $]-\infty, 0]$, croissante sur $[0, 2]$, décroissante sur $[2, +\infty[$, de maximum $\frac{1}{2e}$ en 2, avec un point d'inflexion en 4 et l'axe des abscisses pour asymptote en $+\infty$.

2. a) On calcule une densité de $\frac{X_r}{2}$ par la formule de transformation affine.

D'après le rappel avec $c = \frac{1}{2}$, $\frac{X_r}{2}$ a pour densité $g : y \mapsto 2f_{X_r}(2y)$. Pour $y \leq 0$, $g(y) = 0$; pour $y > 0$:

$$g(y) = \frac{2}{\frac{r}{2^2} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} (2y)^{\frac{r}{2}-1} e^{-y} = \frac{2 \cdot 2^{\frac{r}{2}-1}}{\frac{r}{2^2}} \cdot \frac{y^{\frac{r}{2}-1} e^{-y}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} = \frac{y^{\frac{r}{2}-1} e^{-y}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}$$

On reconnaît la densité de la loi $\gamma\left(\frac{r}{2}\right)$. Celle-ci admet une espérance et une variance égales à $\frac{r}{2}$. Comme $X_r = 2 \cdot \frac{X_r}{2}$, $E(X_r) = 2 \cdot \frac{r}{2}$ et $V(X_r) = 4 \cdot \frac{r}{2}$.

Conclusion

$$\frac{X_r}{2} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{r}{2}\right), E(X_r) = r \text{ et } V(X_r) = 2r.$$

b) On applique le préliminaire 3. b) à la variable $\frac{X_r}{2}$, de loi $\gamma\left(\frac{r}{2}\right)$, puisque $X_r = 2 \cdot \frac{X_r}{2}$.

Conclusion

$$\mathcal{D}_{X_r} =]-\infty, \frac{1}{2}[\text{ et, pour tout } s < \frac{1}{2}, \Phi_{X_r}(s) = (1 - 2s)^{-r/2}.$$

3. a) On calcule une densité de U^2 à partir de sa fonction de répartition et on constate qu'elle est proportionnelle à f_{X_1} .

Fonction de répartition de U^2 . Notons $G(x) = P(U^2 \leq x)$. Pour $x < 0$, $G(x) = 0$. Pour $x \geq 0$,

$$G(x) = P(-\sqrt{x} \leq U \leq \sqrt{x}) = F_U(\sqrt{x}) - F_U(-\sqrt{x}) = 2F_U(\sqrt{x}) - 1,$$

par parité de f_U .

G est continue sur $\mathbb{R}$ (en 0, $2F_U(0) - 1 = 0$) et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, avec pour $x > 0$:

$$G'(x) = 2f_U(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} e^{-x/2}$$

Donc U^2 est à densité, de densité h nulle sur $] -\infty, 0]$ et égale à $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} e^{-x/2}$ sur $]0, +\infty[$.

Comparaison avec f_{X_1} . Pour $x > 0$, $f_{X_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{-1/2} e^{-x/2}$, donc $h = C f_{X_1}$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$C = \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} > 0.$$

Comme h et f_{X_1} sont deux densités, $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} h = C \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1} = C$. Donc $h = f_{X_1}$ (et, au passage, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$).

Conclusion

X_1 et U^2 ont la même densité, donc la même loi : $U^2 \hookrightarrow \chi^2(1)$.

b) On se ramène à des lois γ et on utilise leur stabilité par somme indépendante.

Pour tout i , $U_i \sim U$, donc $Z_i = U_i^2 \sim U^2 \sim X_1$ d'après a), puis $\frac{Z_i}{2} \sim \frac{X_1}{2} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

d'après 2. a). Les variables $\frac{Z_1}{2}, \dots, \frac{Z_n}{2}$ sont mutuellement indépendantes (lemme des coalitions : chacune est fonction continue d'une seule U_i).

Montrons par récurrence sur $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ que $\frac{Z_1 + \dots + Z_k}{2} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{k}{2}\right)$. C'est vrai pour $k = 1$. Si c'est vrai au rang $k < n$, alors $\frac{Z_1 + \dots + Z_k}{2}$ et $\frac{Z_{k+1}}{2}$ sont indépendantes (coalitions) et suivent les lois $\gamma\left(\frac{k}{2}\right)$ et $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$; par stabilité, leur somme suit la loi $\gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)$.

Ainsi $\frac{W_n}{2} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$. D'après 2. a), $\frac{X_n}{2}$ suit la même loi; en multipliant par 2, $W_n \sim X_n$.

Conclusion

W_n suit la loi $\chi^2(n)$ du χ^2 centré à n degrés de liberté.

c) D'après b), $W_n \sim X_n$, donc, avec 2. b), $\mathcal{D}_{W_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et $\Phi_{W_n}(s) = (1 - 2s)^{-n/2}$ pour $s < \frac{1}{2}$. Il reste à relier Φ_{W_n} aux Φ_{Z_i} .

Méthode 1 — Comparaison des expressions. Chaque Z_i a la loi de $Z = U^2$, donc, d'après le préliminaire 2. b), $\mathcal{D}_{Z_i} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et $\Phi_{Z_i}(s) = (1 - 2s)^{-1/2}$. Pour tout $s < \frac{1}{2}$,

$$\prod_{i=1}^n \Phi_{Z_i}(s) = ((1 - 2s)^{-1/2})^n = (1 - 2s)^{-n/2} = \Phi_{W_n}(s).$$

Méthode 2 — Indépendance. Soit $s < \frac{1}{2}$. On a

$$e^{sW_n} = \prod_{i=1}^n e^{sZ_i}.$$

Les variables $e^{sZ_i} = e^{sU_i^2}$ sont mutuellement indépendantes (coalitions) et admettent une espérance égale à $\Phi_{Z_i}(s)$. D'après le rappel sur les produits, e^{sW_n} admet une espérance et

$$\Phi_{W_n}(s) = \prod_{i=1}^n \Phi_{Z_i}(s).$$

Cette méthode redonne aussi $\mathcal{D}_{W_n}$ sans utiliser la loi de W_n : pour $s \geq \frac{1}{2}$, comme les Z_i sont positives, $0 \leq e^{sZ_1} \leq e^{sW_n}$, et e^{sZ_1} n'admet pas d'espérance, donc e^{sW_n} non plus (par domination, sinon e^{sZ_1} en admettrait une).

La première méthode s'appuie sur la loi de W_n obtenue en b) ; la seconde est la propriété générale « la fonction Φ d'une somme de variables indépendantes est le produit des fonctions Φ », valable même lorsqu'on ne connaît pas la loi de la somme.

Conclusion

$$\mathcal{D}_{W_n} = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[, \Phi_{W_n}(s) = (1-2s)^{-n/2}, \text{ et } \Phi_{W_n}(s) = \Phi_{Z_1}(s)\Phi_{Z_2}(s)\cdots\Phi_{Z_n}(s) \text{ pour tout } s < \frac{1}{2}.$$

4. a) On calcule l'espérance et la variance de S_n à l'aide de la loi de $\left(\frac{T}{\sigma}\right)^2$.

Comme $T \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\frac{T}{\sigma} \sim U$, donc $\frac{T^2}{\sigma^2} \sim U^2 \sim X_1$ d'après 3. a). D'après 2. a), $E\left(\frac{T^2}{\sigma^2}\right) = 1$ et $V\left(\frac{T^2}{\sigma^2}\right) = 2$, c'est-à-dire $E(T^2) = \sigma^2$ et $V(T^2) = 2\sigma^4$. Il en est de même pour chaque T_i^2 .

Sans biais. Par linéarité,

$$E(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(T_i^2) = \sigma^2.$$

Donc S_n est un estimateur sans biais de σ^2 .

Convergence.

Méthode 1 — Condition suffisante par l'espérance et la variance. Les T_i^2 sont mutuellement indépendantes (coalitions), donc

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(T_i^2) = \frac{2\sigma^4}{n} \rightarrow 0.$$

Un estimateur dont l'espérance tend vers le paramètre (ici, elle lui est égale) et dont la variance tend vers 0 est convergent.

Méthode 2 — Loi faible des grands nombres. Les variables $T_1^2, \dots, T_n^2, \dots$ sont indépendantes, de même loi, et admettent une variance. D'après la loi faible des grands nombres, leur moyenne empirique S_n converge en probabilité vers leur espérance commune σ^2 .

La première méthode donne en plus une majoration explicite, via Bienaymé-Tchebychev, de $P(|S_n - \sigma^2| \geq \varepsilon)$ par $\frac{2\sigma^4}{n\varepsilon^2}$; la seconde est immédiate dès que l'on reconnaît une moyenne empirique de variables i.i.d.

Conclusion

S_n est un estimateur sans biais et convergent de σ^2 .

b) On montre que $P\left(\sigma^2 \in \left]0, \frac{nS_n}{k_\alpha}\right]\right) = 1 - \alpha$ en se ramenant à la loi de W_n .

Les bornes 0 et $\frac{nS_n}{k_\alpha}$ ne dépendent que de l'échantillon et de k_α , qui ne dépend que de n et α , pas de σ . Comme $\sigma^2 > 0$ et $k_\alpha > 0$:

$$\left(\sigma^2 \in \left] 0, \frac{nS_n}{k_\alpha} \right] \right) = \left(\sigma^2 \leq \frac{nS_n}{k_\alpha} \right) = \left(\frac{nS_n}{\sigma^2} \geq k_\alpha \right)$$

Or

$$\frac{nS_n}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n V_i^2$$

avec $V_i = \frac{T_i}{\sigma}$. Les V_i sont mutuellement indépendantes (coalitions) et suivent la loi normale centrée réduite (transformation affine d'une gaussienne). La question 3. b), qui s'applique à toute famille de n variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, montre que

$$\sum_{i=1}^n V_i^2 \sim W_n.$$

Donc :

$$P \left(\sigma^2 \in \left] 0, \frac{nS_n}{k_\alpha} \right] \right) = P(W_n \geq k_\alpha) = 1 - \alpha$$

Remarque : k_α existe et est unique, car $x \mapsto P(W_n \geq x) = 1 - F_{W_n}(x)$ est continue, strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ (la densité de W_n y est strictement positive), de limites 1 en 0 et 0 en $+\infty$: le théorème de la bijection s'applique.

Conclusion

$\left] 0, \frac{nS_n}{k_\alpha} \right]$ est un intervalle de confiance de σ^2 au niveau de confiance $1 - \alpha$, c'est-à-dire au risque α .

Partie II. Loi du χ^2 décentré

1. a) On justifie l'existence des moments de U , puis on calcule $E(U^3)$ par imparité et $E(U^4)$ de deux façons.

Existence. Pour tout entier k , $x^2 \cdot |x|^k f_U(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow +\infty$ (croissances comparées), donc $|x|^k f_U(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $\pm\infty$; par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente et par continuité sur tout segment, $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k f_U(x) dx$ converge, et U^k admet une espérance (transfert).

$E(U^3)$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_U(x) dx$ converge et la fonction intégrée est impaire, donc $\int_{-B}^B x^3 f_U(x) dx = 0$ pour tout $B > 0$, puis $E(U^3) = 0$ par passage à la limite.

$E(U^4)$.

Méthode 1 — Intégration par parties sur un segment. Soit $B > 0$. Avec

$f'_U(x) = -x f_U(x)$, on intègre par parties sur $[-B, B]$ en dérivant $x \mapsto x^3$ et en intégrant $x \mapsto x f_U(x)$ (de primitive $-f_U$), fonctions de classe C^1 :

$$\int_{-B}^B x^4 f_U(x) dx = [-x^3 f_U(x)]_{-B}^B + 3 \int_{-B}^B x^2 f_U(x) dx = -2B^3 f_U(B) + 3 \int_{-B}^B x^2 f_U(x) dx$$

Quand $B \rightarrow +\infty$, $B^3 f_U(B) \rightarrow 0$ (croissances comparées) et

$$\int_{-B}^B x^2 f_U(x) dx \rightarrow E(U^2) = V(U) + E(U)^2 = 1. \text{ Donc } E(U^4) = 3.$$

Méthode 2 — Utilisation de la loi de U^2 . D'après I.3. a), $U^2 \sim X_1$, et d'après I.2. a),

$E(X_1) = 1$ et $V(X_1) = 2$. Par la formule de Koenig-Huygens,

$$E(U^4) = E((U^2)^2) = V(U^2) + E(U^2)^2 = 2 + 1 = 3.$$

La première méthode est autonome et se généralise à tous les moments pairs ($E(U^{2k+2}) = (2k+1)E(U^{2k})$); la seconde réinvestit la partie I.

Conclusion

$$E(U^3) = 0 \text{ et } E(U^4) = 3.$$

b) On écrit $M_1 = m_1 + U'$ avec U' normale centrée réduite et on développe.

Posons $U' = M_1 - m_1$ et $m = m_1$, de sorte que $\lambda_1 = m^2$. Comme $M_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m, 1)$, $U' \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, donc $U' \sim U$ et, d'après a), $E(U') = 0$, $E(U'^2) = 1$, $E(U'^3) = 0$, $E(U'^4) = 3$. Toutes les variables considérées sont des polynômes en U' de degré au plus 4, donc admettent une espérance.

$$E(Y_1) = E((m + U')^2) = m^2 + 2mE(U') + E(U'^2) = 1 + m^2$$

$$E(Y_1^2) = E((m + U')^4) = m^4 + 4m^3E(U') + 6m^2E(U'^2) + 4mE(U'^3) + E(U'^4) = m^4 + 6m^2 + 3$$

Par Koenig-Huygens, $V(Y_1) = m^4 + 6m^2 + 3 - (1 + m^2)^2 = 4m^2 + 2$.

Conclusion

$$E(Y_1) = 1 + \lambda_1 \text{ et } V(Y_1) = 2 + 4\lambda_1.$$

c) On applique le théorème de transfert à M_1 et à $h : x \mapsto e^{sx^2}$, positive et continue, puis le préliminaire 1. b).

M_1 a pour densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2}\right)$. Pour tout réel s ,

$$sx^2 - \frac{(x-m)^2}{2} = -\left(\frac{1}{2} - s\right)x^2 + mx - \frac{m^2}{2}, \text{ donc } s \in \mathcal{D}_{Y_1} \text{ si et seulement si l'intégrale}$$

$$\frac{e^{-m^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{1}{2} - s\right)x^2 + mx\right) dx$$

converge.

Si $s = \frac{1}{2}$, la fonction intégrée est $x \mapsto e^{mx}$, qui vaut 1 si $m = 0$ et tend vers $+\infty$ en $+\infty$

ou en $-\infty$ si $m \neq 0$: l'intégrale diverge. Si $s \neq \frac{1}{2}$, le préliminaire 1. b) avec

$a = \frac{1}{2} - s \neq 0$ et $b = m$ montre que l'intégrale converge si et seulement si $s < \frac{1}{2}$, et vaut

alors $\sqrt{\frac{2\pi}{1-2s}} \exp\left(\frac{m^2}{2(1-2s)}\right)$. Donc $\mathcal{D}_{Y_1} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et, pour $s < \frac{1}{2}$:

$$\Phi_{Y_1}(s) = (1-2s)^{-1/2} \exp\left(\frac{m^2}{2(1-2s)} - \frac{m^2}{2}\right) = (1-2s)^{-1/2} \exp\left(\frac{m^2}{2} \cdot \frac{2s}{1-2s}\right)$$

car $\frac{1}{1-2s} - 1 = \frac{2s}{1-2s}$.

Conclusion

$$\mathcal{D}_{Y_1} =]-\infty, \frac{1}{2}[\text{ et, pour tout } s < \frac{1}{2}, \quad \Phi_{Y_1}(s) = (1-2s)^{-1/2} \times \exp\left(\frac{s\lambda_1}{1-2s}\right).$$

2. a) On applique les résultats de 1. à chaque M_j , puis la linéarité et l'additivité des variances pour des variables indépendantes.

Les calculs de 1. b) n'utilisent que le fait que $M_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, 1)$; ils s'appliquent donc à chaque M_j : $E(M_j^2) = 1 + m_j^2$ et $V(M_j^2) = 2 + 4m_j^2$. Par linéarité,

$$E(Y_n) = \sum_{j=1}^n (1 + m_j^2) = n + \lambda_n.$$

Les variables $M_1^2, \dots, M_n^2$ sont mutuellement indépendantes (coalitions), donc la

variance de leur somme est la somme de leurs variances :

$$V(Y_n) = \sum_{j=1}^n (2 + 4m_j^2) = 2n + 4\lambda_n.$$

Conclusion

$$E(Y_n) = n + \lambda_n \text{ et } V(Y_n) = 2n + 4\lambda_n.$$

b) On écrit e^{sY_n} comme produit de variables indépendantes.

Soit $s < \frac{1}{2}$. On a

$$e^{sY_n} = \prod_{j=1}^n e^{sM_j^2},$$

où les variables $e^{sM_j^2}$ sont mutuellement indépendantes (coalitions) et admettent, d'après 1. c) appliqué à M_j , une espérance égale à $(1 - 2s)^{-1/2} \exp\left(\frac{sm_j^2}{1 - 2s}\right)$. D'après le rappel sur les produits :

$$\Phi_{Y_n}(s) = \prod_{j=1}^n (1 - 2s)^{-1/2} \exp\left(\frac{sm_j^2}{1 - 2s}\right) = (1 - 2s)^{-n/2} \exp\left(\frac{s}{1 - 2s} \sum_{j=1}^n m_j^2\right)$$

Conclusion

$$\text{pour tout } s < \frac{1}{2}, \quad \Phi_{Y_n}(s) = (1 - 2s)^{-n/2} \times \exp\left(\frac{s\lambda_n}{1 - 2s}\right).$$

Partie III. Nombre aléatoire de degrés de liberté

Convention. Pour $k \in N_K$, l'espérance d'une variable pour la probabilité $P_{[K=k]}$ ne dépend que de la loi de cette variable sous $P_{[K=k]}$. En particulier, si, sous $P_{[K=k]}$, une variable H a la même fonction de répartition qu'une variable à densité W (pour la probabilité P), alors pour toute fonction h continue et positive, $h(H)$ admet une espérance pour $P_{[K=k]}$ si et seulement si $h(W)$ admet une espérance, et ces espérances sont égales (théorème de transfert appliqué à la densité commune).

1. a) On montre que, sur l'événement $[K = k]$, X coïncide avec X_k , puis on utilise l'indépendance de K et des J_i .

On interprète l'hypothèse « K est indépendante des variables de la suite (J_i) » comme l'indépendance mutuelle de $K, J_1, J_2, \dots$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, de sorte que

$P([K = k]) = \frac{1}{n} > 0$, et soit x réel. Si $\omega \in [K = k]$, alors $X(\omega) = \max_{1 \leq i \leq k} J_i(\omega) = X_k(\omega)$.

Donc :

$$[X \leq x] \cap [K = k] = [X_k \leq x] \cap [K = k] = \left(\bigcap_{i=1}^k [J_i \leq x] \right) \cap [K = k]$$

Par indépendance mutuelle de $K, J_1, \dots, J_k$:

$$\begin{aligned} P([X \leq x] \cap [K = k]) &= P([K = k]) \prod_{i=1}^k P([J_i \leq x]) = P([K = k]) P\left(\bigcap_{i=1}^k [J_i \leq x]\right) \\ &= P([K = k]) P([X_k \leq x]) \end{aligned}$$

(la deuxième égalité utilisant l'indépendance mutuelle des J_i). En divisant par $P([K = k]) > 0$:

Conclusion

pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout réel x , $P_{[K=k]}([X \leq x]) = P([X_k \leq x])$.

- b) On calcule la fonction de répartition de X_k , puis on applique la formule des probabilités totales au système complet $([K = k])_{1 \leq k \leq n}$.

Fonction de répartition de X_k . D'après le calcul de a),

$$P([X_k \leq x]) = \prod_{i=1}^k P([J_i \leq x]) = F_J(x)^k,$$

où F_J est la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$. Donc $F_{X_k}(x) = 0$ si $x < 0$, $F_{X_k}(x) = x^k$ si $0 \leq x \leq 1$, et $F_{X_k}(x) = 1$ si $x > 1$.

Probabilités totales. Les événements $[K = 1], \dots, [K = n]$ forment un système complet d'événements de probabilités non nulles, donc, avec a) :

$$F_X(x) = \sum_{k=1}^n P([K = k]) P_{[K=k]}([X \leq x]) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_{X_k}(x)$$

Conclusion

$F_X(x) = 0$ si $x < 0$,

$$F_X(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^k$$

si $0 \leq x \leq 1$, et $F_X(x) = 1$ si $x > 1$.

- c) On vérifie que F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf en un nombre fini de points, puis on calcule l'espérance avec une densité.

F_X est polynomiale sur $[0, 1]$ et constante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$. En 0,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 0^k = 0;$$

en 1,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 = 1.$$

Donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. X est donc une variable à densité, de densité f_X définie par

$$f_X(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$$

si $0 < x < 1$ et $f_X(x) = 0$ sinon.

La densité étant nulle hors de $[0, 1]$ et la fonction $x \mapsto xf_X(x)$ étant continue sur $[0, 1]$, X admet une espérance et :

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kx^{k-1} dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1}$$

Conclusion

X est à densité et

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1}.$$

d) On calcule $g(k)$ grâce à a), puis $E(g(K))$ par le théorème de transfert discret.

Ici $N_K = \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $k \in N_K$. D'après a), sous $P_{[K=k]}$, X a la fonction de répartition F_{X_k} ,

qui est celle d'une variable à densité $x \mapsto kx^{k-1}$ sur $]0, 1[$ (nulle ailleurs). D'après la convention, X admet une espérance pour $P_{[K=k]}$ et :

$$g(k) = E(X/K = k) = \int_0^1 x \cdot kx^{k-1} dx = \frac{k}{k+1}$$

Pour $k \notin N_K$, $g(k) = 0$. La variable $g(K)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc admet une espérance, et :

$$E(g(K)) = \sum_{k=1}^n g(k) P([K = k]) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} = E(X)$$

Conclusion

l'égalité $(\star)$, $E(X) = E(g(K))$, est vérifiée sur cet exemple.

2. a) Comme en 1. a), on remplace H_n par une somme d'un nombre fixé de carrés sur l'événement $[K = k]$, puis on utilise l'indépendance.

On interprète l'hypothèse comme l'indépendance mutuelle de $K, U_1, U_2, \dots$. Soit $k \in \mathbb{N}$:

$P([K = k]) = e^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} > 0$, donc $N_K = \mathbb{N}$. Posons

$$H^{(k)} = \sum_{i=1}^{n+2k} U_i^2.$$

Sur $[K = k]$, $H_n = H^{(k)}$, donc, pour tout réel x :

$$[H_n \leq x] \cap [K = k] = [H^{(k)} \leq x] \cap [K = k]$$

Les variables $K, U_1, \dots, U_{n+2k}$ sont mutuellement indépendantes ; d'après le premier

résultat admis (avec les fonctions continues $\varphi_1 : t \mapsto t$ et

$$\varphi_2 : (u_1, \dots, u_{n+2k}) \mapsto \sum u_i^2$$

), K et $H^{(k)}$ sont indépendantes. Donc

$P([H_n \leq x] \cap [K = k]) = P([K = k]) P([H^{(k)} \leq x])$, c'est-à-dire

$P_{[K=k]}([H_n \leq x]) = P([H^{(k)} \leq x])$.

Enfin $H^{(k)}$ est la somme des carrés de $n + 2k$ variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$:

d'après I.3. b), $H^{(k)} \sim W_{n+2k} \hookrightarrow \chi^2(n + 2k)$.

Conclusion

pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de H_n sachant $[K = k]$ est celle de W_{n+2k} .

b) On applique la convention et I.3. c) à W_{n+2k} .

Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après a), sous $P_{[K=k]}$, H_n a la loi de W_{n+2k} , variable à densité. D'après la convention appliquée à $h : t \mapsto e^{st}$, e^{sH_n} admet une espérance pour $P_{[K=k]}$ si et

seulement si $s \in \mathcal{D}_{W_{n+2k}} = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[$, ce qui est le cas, et

$g(k) = \Phi_{W_{n+2k}}(s) = (1 - 2s)^{-(n+2k)/2}$ d'après I.3. c).

Conclusion

pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g(k) = (1 - 2s)^{-n/2} (1 - 2s)^{-k}$.

c) On applique le théorème de transfert à la variable discrète K et on reconnaît une série exponentielle.

La variable $g(K)$ est positive ; elle admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_k g(k) P([K = k])$$

converge, et alors $E(g(K))$ est sa somme. Or :

$$g(k)P([K = k]) = (1 - 2s)^{-n/2} e^{-\lambda/2} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{2(1 - 2s)} \right)^k$$

terme général d'une série exponentielle convergente. Donc :

$$E(g(K)) = (1 - 2s)^{-n/2} e^{-\lambda/2} \exp \left(\frac{\lambda}{2(1 - 2s)} \right) = (1 - 2s)^{-n/2} \exp \left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1 - (1 - 2s)}{1 - 2s} \right)$$

Conclusion

$$E(g(K)) = (1 - 2s)^{-n/2} \times \exp \left(\frac{\lambda s}{1 - 2s} \right).$$

d) On applique $(\star)$ à $X = e^{sH_n}$ pour tout $s < \frac{1}{2}$, puis le résultat admis.

Vérification des hypothèses de $(\star)$. Soit $s < \frac{1}{2}$. Comme $\mathcal{D}_{H_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ (admis), $X = e^{sH_n}$ admet une espérance ; pour tout $k \in N_K = \mathbb{N}$, X admet une espérance pour $P_{[K=k]}$, d'après b). L'égalité $(\star)$ et c) donnent :

$$\Phi_{H_n}(s) = E(e^{sH_n}) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k) P([K = k]) = E(g(K)) = (1 - 2s)^{-n/2} \exp \left(\frac{\lambda s}{1 - 2s} \right)$$

Application du résultat admis. H_n est à densité, $]-\infty, \frac{1}{2}[\subset \mathcal{D}_{H_n}$, et Φ_{H_n} a l'expression ci-dessus pour tout $s < \frac{1}{2}$. Cette expression est celle de Φ_{Y_n} obtenue en II.2. b) lorsque $\lambda_n = \lambda$.

Conclusion

H_n suit la loi $\chi^2(n, \lambda)$ du χ^2 décentré à n degrés de liberté et de paramètre de décentrage λ . Ainsi, une loi du χ^2 décentré est un mélange, selon une loi de Poisson, de lois du χ^2 centrées.

e) On justifie l'existence de $E\left(\frac{1}{H_n}\right)$ par domination, on calcule les espérances conditionnelles grâce à a), puis on applique ($\star$).

Espérance de $\frac{1}{X_r}$ pour $r \geq 3$. Par transfert, $\frac{1}{X_r}$ (définie presque sûrement, car

$P(X_r \leq 0) = 0$) admet une espérance si et seulement si $\frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} \int_0^{+\infty} x^{\frac{r}{2}-2} e^{-x/2} dx$ converge. Le changement de variable affine $x = 2t$ donne

$$\int_0^{+\infty} x^{\frac{r}{2}-2} e^{-x/2} dx = 2^{\frac{r}{2}-1} \int_0^{+\infty} t^{\frac{r}{2}-2} e^{-t} dt = 2^{\frac{r}{2}-1} \Gamma\left(\frac{r}{2} - 1\right),$$

intégrale convergente car $\frac{r}{2} - 1 > 0$. Avec $\Gamma\left(\frac{r}{2}\right) = \left(\frac{r}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{r}{2} - 1\right)$:

$$E\left(\frac{1}{X_r}\right) = \frac{2^{\frac{r}{2}-1} \Gamma\left(\frac{r}{2} - 1\right)}{2^{\frac{r}{2}} \left(\frac{r}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{r}{2} - 1\right)} = \frac{1}{r - 2}$$

Existence de $E\left(\frac{1}{H_n}\right)$ pour $n \geq 3$. Posons $H' = U_1^2 + \dots + U_n^2$. Comme $K \geq 0$, $H_n \geq H'$.

D'après I.3. b), $H' \hookrightarrow \chi^2(n)$, donc $P(H' \leq 0) = 0$ et $P(H_n \leq 0) = 0$: $\frac{1}{H_n}$ et $\frac{1}{H'}$ sont

définies presque sûrement, et $0 \leq \frac{1}{H_n} \leq \frac{1}{H'}$. Comme $\frac{1}{H'}$ admet une espérance (égale à $\frac{1}{n-2}$), $\frac{1}{H_n}$ admet une espérance par domination.

Espérances conditionnelles. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après a), sous $P_{[K=k]}$, H_n a la loi de

$W_{n+2k} \sim X_{n+2k}$, avec $n + 2k \geq 3$. D'après la convention appliquée à $h : t \mapsto \frac{1}{t}$ sur

$]0, +\infty[$ (les deux variables sont presque sûrement strictement positives), $\frac{1}{H_n}$ admet une espérance pour $P_{[K=k]}$ et $g(k) = E\left(\frac{1}{H_n} / K = k\right) = \frac{1}{n+2k-2}$.

Application de $(\star)$ avec $X = \frac{1}{H_n}$:

$$E\left(\frac{1}{H_n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n-2+2k} P([K=k]) = E\left(\frac{1}{n-2+2K}\right)$$

la dernière égalité par le théorème de transfert discret (la variable $\frac{1}{n-2+2K}$ est bien définie, à valeurs dans $]0, 1]$, donc admet une espérance).

Conclusion

$$\text{pour tout } n \geq 3, \quad E\left(\frac{1}{H_n}\right) = E\left(\frac{1}{n-2+2K}\right).$$

Partie IV. Estimateur de James-Stein

1. On reconnaît la situation de la partie II, puis on calcule $E(B_p)$.

Chaque $\hat{\theta}_j$ suit une loi normale de variance 1 et, étant sans biais, a pour espérance θ_j : $\hat{\theta}_j \hookrightarrow \mathcal{N}(\theta_j, 1)$. Les $\hat{\theta}_j$ sont indépendantes. Ainsi

$$B_p = \sum_{j=1}^p \hat{\theta}_j^2$$

est la variable Y_p de la partie II construite avec $M_j = \hat{\theta}_j$ et $m_j = \theta_j$ pour $1 \leq j \leq p$ (la variable Y_p ne fait intervenir que $M_1, \dots, M_p$), et son paramètre de décentrage est

$$\lambda_p = \sum_{j=1}^p \theta_j^2 = b_p.$$

Donc $B_p \hookrightarrow \chi^2(p, b_p)$. (D'après le résultat admis en III.2. d) et la formule de II.2. b), cette loi ne dépend que de p et de b_p .)

D'après II.2. a), $E(B_p) = p + b_p$. Comme $p \geq 3$, $E(B_p) \neq b_p$: le biais vaut $E(B_p) - b_p = p$.

Conclusion

$B_p \hookrightarrow \chi^2(p, b_p)$ et B_p est un estimateur biaisé de b_p , de biais p .

2. a) On développe

$$\sum_j (\theta_j^* - \theta_j)^2,$$

on prend l'espérance par linéarité, puis on utilise III.2. e) pour calculer $E\left(\frac{1}{B_p}\right)$.

Préliminaires. Comme $B_p \geq \hat{\theta}_1^2$ et $P(\hat{\theta}_1 = 0) = 0$ ($\hat{\theta}_1$ est à densité), $B_p > 0$ presque sûrement : θ^* est défini presque sûrement. Les θ_j n'étant pas tous nuls, $b_p > 0$, de sorte que K suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{b_p}{2} > 0$ et que la partie III s'applique avec $\lambda = b_p$.

Développement. Pour tout j , $\theta_j^* - \theta_j = (\hat{\theta}_j - \theta_j) - \frac{c}{B_p} \hat{\theta}_j$, donc :

$$\sum_{j=1}^p (\theta_j^* - \theta_j)^2 = \sum_{j=1}^p (\hat{\theta}_j - \theta_j)^2 - \frac{2c}{B_p} \sum_{j=1}^p \hat{\theta}_j (\hat{\theta}_j - \theta_j) + \frac{c^2}{B_p^2} \sum_{j=1}^p \hat{\theta}_j^2$$

Or

$$\sum_j \hat{\theta}_j (\hat{\theta}_j - \theta_j) = B_p - \sum_j \theta_j \hat{\theta}_j$$

et

$$\sum_j \hat{\theta}_j^2 = B_p,$$

d'où :

$$\sum_{j=1}^p (\theta_j^* - \theta_j)^2 = \sum_{j=1}^p (\hat{\theta}_j - \theta_j)^2 - 2c + \frac{2c}{B_p} \sum_{j=1}^p \theta_j \hat{\theta}_j + \frac{c^2}{B_p}$$

Existence des espérances.

$$\sum_j (\hat{\theta}_j - \theta_j)^2$$

admet une espérance, égale à

$$\sum_j V(\hat{\theta}_j) = p :$$

c'est $R(\hat{\theta}, \theta)$. La variable

$$\frac{1}{B_p} \sum_j \theta_j \hat{\theta}_j$$

admet une espérance, égale à $E\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right)$, par le résultat admis par l'énoncé.

Enfin, d'après III.2. d) avec $n = p$ et $\lambda = b_p$, $H_p \hookrightarrow \chi^2(p, b_p)$, et $B_p \hookrightarrow \chi^2(p, b_p)$ d'après 1. :

par le résultat admis en III.2. d), $B_p \sim H_p$, donc $\frac{1}{B_p} \sim \frac{1}{H_p}$. Comme $p \geq 3$, III.2. e)

montre que $\frac{1}{H_p}$, donc $\frac{1}{B_p}$, admet une espérance, avec $E\left(\frac{1}{B_p}\right) = E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right)$

(cette espérance ne dépend que de la loi de Poisson de paramètre $\frac{b_p}{2}$ de K).

Par linéarité,

$$\sum_j (\theta_j^* - \theta_j)^2$$

admet une espérance et, en notant $e_p = E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right)$:

$$R(\theta^*, \theta) - R(\hat{\theta}, \theta) = -2c + 2c E\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right) + c^2 e_p$$

Comme $\frac{2K}{p-2+2K} = 1 - \frac{p-2}{p-2+2K}$, on a $E\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right) = 1 - (p-2)e_p$, d'où :

$$R(\theta^*, \theta) - R(\hat{\theta}, \theta) = -2c + 2c - 2c(p-2)e_p + c^2 e_p$$

Conclusion

$$R(\theta^*, \theta) - R(\hat{\theta}, \theta) = (c^2 - 2c(p-2)) \times E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right).$$

b) On utilise que $e_p > 0$, puis on étudie le trinôme $c \mapsto c^2 - 2c(p-2)$.

Signe de e_p . La variable $\frac{1}{p-2+2K}$ est positive et vaut $\frac{1}{p-2}$ sur $[K=0]$, de probabilité $e^{-b_p/2} > 0$; donc $e_p \geq \frac{e^{-b_p/2}}{p-2} > 0$.

Équivalence. D'après a) et $e_p > 0$, $R(\theta^*, \theta) < R(\hat{\theta}, \theta)$ si et seulement si $c^2 - 2c(p-2) < 0$, c'est-à-dire $c(c - 2(p-2)) < 0$. Comme $c > 0$, cela équivaut à $c < 2(p-2)$. Cet intervalle est non vide car $p \geq 3$.

Minimisation. Le facteur $e_p > 0$ ne dépend pas de c . La fonction $\varphi : c \mapsto c^2 - 2c(p-2)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $2(c - (p-2))$: elle est décroissante sur $]0, p-2]$ et croissante sur $[p-2, +\infty[$, de minimum $\varphi(p-2) = -(p-2)^2$. La différence $R(\theta^*, \theta) - R(\hat{\theta}, \theta)$ est donc minimale pour $c = p-2$ et vaut alors $-(p-2)^2 e_p < 0$.

Conclusion

$R(\theta^*, \theta) < R(\hat{\theta}, \theta)$ si et seulement si $0 < c < 2(p-2)$; la différence des risques est minimale pour $c = p-2$, et l'estimateur correspondant (estimateur de James-Stein) est $\theta^* = \left(1 - \frac{p-2}{B_p}\right) \hat{\theta}$, c'est-à-dire

$$\theta_j^* = \left(1 - \frac{p-2}{\sum_{i=1}^p \hat{\theta}_i^2}\right) \hat{\theta}_j$$

pour $1 \leq j \leq p$. Ainsi, dès que $p \geq 3$, l'estimateur sans biais naturel $\hat{\theta}$ n'est pas celui de plus petit risque R .

Relevé des adaptations

Préambule) Le premier résultat admis de l'original («si Φ_X et Φ_Y coïncident sur un intervalle ouvert non vide, alors X et Y ont la même loi») est supprimé. Justification : c'est un théorème général d'identification des lois par la fonction Φ , extérieur au référentiel, alors qu'une conséquence particulière suffit. Les questions I.3. a) et I.3. b), dont l'énoncé est conservé, sont traitées sans lui (calcul de la densité de U^2 , stabilité des lois γ par somme indépendante).

III.2. d) Question adaptée au programme actuel : on admet à cet endroit la seule conséquence nécessaire du résultat supprimé, à savoir qu'une variable à densité H telle que $\Phi_H(s) = (1-2s)^{-n/2} \exp\left(\frac{\lambda s}{1-2s}\right)$ pour tout $s < \frac{1}{2}$ suit la loi $\chi^2(n, \lambda)$, c'est-à-dire a même loi que Y_n pour tout choix des m_j tel que $\lambda_n = \lambda$. Justification : ce résultat particulier suffit pour III.2. d) et pour IV.2. a) (égalité des lois de B_p et H_p); il garantit aussi que la notation $\chi^2(n, \lambda_n)$ ne dépend que de n et de λ_n .