



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2007

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Pour toute variable aléatoire réelle Y définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et possédant une espérance mathématique, on note $E(Y)$ cette espérance pour la probabilité P .

Pour tout événement C de $\mathcal{A}$ tel que $P(C) > 0$, on note, sous réserve d'existence, $E(Y/C)$ l'espérance de Y pour la probabilité conditionnelle P_C (espérance conditionnelle de Y sachant C).

Partie I.

Cette partie constitue une application particulière des résultats généraux étudiés dans la suite du problème.

On possède n urnes ($n \geq 3$) numérotées de 1 à n , dans lesquelles on répartit au hasard et de façon indépendante, m boules indiscernables ($m \geq 4$), de sorte que, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité pour chaque boule d'être placée dans l'urne numéro i soit égale à $1/n$.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

À l'issue de cette expérience, on pose pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$X_i = 1$ si l'urne numéro i est vide, et $X_i = 0$ sinon.

On pose

$$W_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

- 1) a) Déterminer pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la loi de la variable aléatoire X_i .
- b) Pour tout couple (i, j) d'entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ distincts, calculer $P([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$, ainsi que la covariance de X_i et X_j . Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

- 2) a) Exprimer l'espérance $E(W_n)$ de W_n en fonction de n et m .
- b) On note $V(W_n)$ la variance de W_n . Calculer $V(W_n)$ en fonction de n et m .
- c) Vérifier l'égalité :

$$E(W_n) - V(W_n) = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} - n(n-1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m$$

En déduire que $E(W_n) - V(W_n) \geq 0$.

- 3) Dans cette question, l'entier m vérifie $m = \lfloor n \ln n + \theta n \rfloor$, où θ est une constante réelle positive et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x .

- a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(W_n)$.
- b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (E(W_n) - V(W_n)) = 0$.
- c) Soit T_n une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\mu_n = E(W_n)$. On admet que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$|P([W_n = k]) - P([T_n = k])| \leq \min \left(1, \frac{1}{\mu_n}\right) \times (\mu_n - V(W_n))$$

Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n \geq 3}$?

- 4) On pose $\mu = e^{-\theta}$, et on suppose que le paramètre μ est inconnu. Dans cette question, on veut estimer μ . Pour p entier de $\mathbb{N}^*$, on considère un p -échantillon indépendant, identiquement distribué $(T_1, T_2, \dots, T_p)$ de la loi de Poisson de paramètre μ . On

pose :

$$\overline{T}_p = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p T_i$$

et $U_p = \sqrt{p} \frac{\overline{T}_p - \mu}{\sqrt{\mu}}$

- a) Montrer que $\overline{T}_p$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre μ .
- b) Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires $(U_p)_{p \geq 1}$?
- c) On veut construire, pour p assez grand, un intervalle de confiance du paramètre μ au risque α donné. Soit u le réel strictement positif tel que $P([U \geq u]) = \alpha/2$, où U est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Justifier que pour p assez grand, on peut écrire : $P(|U_p| \leq u) = 1 - \alpha$, et déterminer alors un intervalle de confiance $[I_p, J_p]$ pour μ au risque α .

Partie II

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

Soit M une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi de Poisson de paramètre λ .

Soit A une partie quelconque de $\mathbb{N}$ et $\overline{A}$ son complémentaire dans $\mathbb{N}$. On rappelle que si A est non vide, alors

$$P([M \in A]) = \sum_{i \in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!},$$

et on pose par convention $[M \in \emptyset] = \emptyset$.

On considère la fonction f_A définie sur $\mathbb{N}$ par $f_A(0) = 0$, et pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$f_A(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^\lambda (P([M \in A] \cap [M \leq k]) - P([M \in A]) \times P([M \leq k]))$$

- 1) a) Déterminer la fonction f_A dans les cas particuliers $A = \emptyset$ et $A = \mathbb{N}$.
- b) Donner l'expression de $f_A(1)$ en fonction de λ et de $P([M \in A])$ dans les deux cas suivants : $0 \in A$ et $0 \in \overline{A}$.

Exprimer $f_A(2)$ en fonction de λ et de $P([M \in A])$ dans le cas où 0 et 1 appartiennent à A .

- 2) Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$ disjointes.

a) Montrer que $f_{A \cup B} = f_A + f_B$.

b) En déduire que $f_{\overline{A}} = -f_A$.

- 3) a) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, la fonction f_A vérifie la relation suivante :

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = P([M \in \overline{A}]) \text{ si } k \in A, \text{ et } \lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = -P([M \in A]) \text{ si } k \in \overline{A}.$$

- b) En déduire que si A est non vide et distincte de $\mathbb{N}$, la fonction f_A n'est pas identiquement nulle.

- 4) Dans cette question, j est un entier naturel non nul, et A est le singleton $\{j\}$. On pose $f_{\{j\}} = f_j$.

- a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, montrer l'égalité suivante :

$$f_j(k+1) = \frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P([M \geq k+1]) \text{ si } k \geq j, \text{ et } f_j(k+1) = -\frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P([M \leq k]) \text{ si } k < j.$$

- b) Calculer $f_j(j+1) - f_j(j)$, et déterminer son signe.
- c) Calculer pour tout k de $\mathbb{N}^*$, différent de j , $f_j(k+1) - f_j(k)$ en distinguant les deux cas : $k > j$ et $k < j$. En déduire que la différence $f_j(k+1) - f_j(k)$ est positive si et seulement si $k = j$.
- d) Établir les inégalités suivantes : $f_j(j+1) - f_j(j) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$.
- 5) On considère le singleton $\{0\}$ et on pose $f_{\{0\}} = f_0$. Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, l'inégalité suivante : $f_0(k+1) - f_0(k) \leq 0$.
- 6) a) Établir pour tout k de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante : $f_A(k+1) - f_A(k) \leq f_k(k+1) - f_k(k)$.
(on distinguera les deux cas : $k \in A$ et $k \in \overline{A}$)
- b) En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$\sup_{k \geq 0} |f_A(k+1) - f_A(k)| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$$

Partie III.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère n variables aléatoires discrètes indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i strictement positif.

On pose

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^n p_i,$$

$$W_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

et, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $R_i = W_n - X_i$.

On note M_n une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ_n . Soit A une partie quelconque de $\mathbb{N}$, et f_A la fonction définie dans la partie II, dans l'expression de laquelle on remplace M par M_n et λ par λ_n . On pose $f = f_A$.

1) a) Établir pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité des deux variables aléatoires $X_i f(W_n)$ et $X_i f(1 + R_i)$.

b) En déduire pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité : $E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1 + R_i))$.

2) Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on pose : $Y_i = f(1 + W_n) - f(1 + R_i)$.

Établir la relation suivante :

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i E(Y_i).$$

3) a) Établir pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la formule suivante :

$$E(Y_i / [X_i = 1]) = E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))$$

b) Calculer pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $E(Y_i / [X_i = 0])$.

c) Dédire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i^2 E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))$$

4) Établir l'inégalité suivante :

$$|E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n))| \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda_n} \right) \times \sum_{i=1}^n p_i^2$$

5) À l'aide de la question II.3.a, montrer, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante :

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])$$

En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, la majoration suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda_n} \right) \times \sum_{i=1}^n p_i^2$$

6) Dans cette question uniquement, on suppose que pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p_i = \frac{1}{n+i}$.

a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n p_i^2 = 0.$$

b) Déterminer la limite en loi de la suite $(W_n)_{n \geq 2}$.

Partie IV.

Les notations sont identiques à celles de la partie III, mais les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ne sont pas nécessairement indépendantes.

1) a) Montrer que pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1 + R_i) / [X_i = 1])$.

b) En déduire l'égalité suivante :

$$P([W_n \in A]) - P([M_n \in A]) = \sum_{i=1}^n p_i [E(f(1 + W_n)) - E(f(1 + R_i)/[X_i = 1])]$$

2) On suppose que pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, il existe une variable aléatoire Z_i définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que la loi de Z_i soit identique à la loi conditionnelle de R_i sachant $[X_i = 1]$.

a) Justifier, pour tout couple (ℓ, j) d'entiers naturels, l'inégalité :

$$|f(\ell) - f(j)| \leq |\ell - j| \times \min \left(1, \frac{1}{\lambda_n} \right), \text{ et en déduire la majoration suivante :}$$

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda_n} \right) \times \sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|)$$

b) On suppose de plus que pour tout ω de Ω , pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a $W_n(\omega) \geq Z_i(\omega)$. Établir l'égalité :

$$\sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|) = \lambda_n - V(W_n),$$

où $V(W_n)$ désigne la variance de W_n .

En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda_n} \right) \times (\lambda_n - V(W_n))$$