



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

2007

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, I la matrice identité et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne. On identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.

Préliminaire

Soit E un espace vectoriel réel. On appelle norme sur E toute application $\nu : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

- (i) $\nu(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$;
- (ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$, $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$;
- (iii) pour tous $x, y \in E$, $\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$.

Montrer que l'application $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, par

$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Partie I

A. Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que l'application qui, à toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe le réel

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La norme de A sera notée $\|A\|$.

2. (a) Établir, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité $\|AX\|_\infty \leq \|A\|\|X\|_\infty$.

(b) Montrer qu'il existe un vecteur $X_0 \in \mathbb{R}^n$, non nul, tel que $\|AX_0\|_\infty = \|A\|\|X_0\|_\infty$.

En déduire que $\|A\| = \sup_{X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$.

(c) Établir alors que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

On dit qu'une suite $(A_m)_{m \geq 0}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A si $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|A_m - A\| = 0$. On pose $A_m = (a_{i,j}(m))_{1 \leq i,j \leq n}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

3. (a) Montrer que $(A_m)_{m \geq 0}$ converge vers A si et seulement si, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} a_{i,j}(m) = a_{i,j}$.

(b) Montrer que, si $A_m \rightarrow A$ et $B_m \rightarrow B$, alors $A_m B_m \rightarrow AB$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| < 1$.

(a) Déterminer $\lim_{m \rightarrow +\infty} A^m$.

(b) Montrer que, si λ est une valeur propre réelle de A , alors $|\lambda| < 1$. En déduire que $I - A$ et $I + A$ sont inversibles.

(c) Montrer que la suite

$$\left(\sum_{k=0}^m A^k \right)_m$$

converge et exprimer sa limite en fonction de A .

Soit $(A_m)_{m \geq 0}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la série

$$\sum_{m \geq 0} A_m$$

converge si la suite

$$\left(\sum_{m=0}^p A_m \right)_p$$

converge. Dans ce cas, sa limite est notée

$$\sum_{m=0}^{+\infty} A_m.$$

5. On considère une matrice non nulle $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle il existe un entier $p \geq 2$ tel que $N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$.

(a) Montrer que la série

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} N^k$$

converge. On note

$$M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} N^k.$$

(b) Montrer que $\{X \in \mathbb{R}^n \mid (M - I)X = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid NX = 0\}$.

6. (a) Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la série

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} D^k$$

converge.

(b) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable, D une matrice diagonale et P une matrice inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Montrer que la série

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$$

converge, et exprimer sa somme en fonction de P et de

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k.$$

On admet jusqu'à la fin du problème que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la série

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$$

converge, et on note

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $A_m = (I + A/m)^m$.

(a) Établir l'inégalité

$$\left\| \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k - A_m \right\| \leq \sum_{k=0}^m \left(1 - \frac{m(m-1) \cdots (m-k+1)}{m^k} \right) \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

Pour $k = 0$, le produit vide et m^0 valent 1.

(b) En déduire que la suite $(A_m)_m$ converge vers $\exp(A)$.

B. Propriétés de l'exponentielle de matrice

On admet que, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient $AB = BA$, alors $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$.

1. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A)$ est inversible, et déterminer son inverse.

2. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice S_A telle que $\exp(A) - I = A(I + S_A)$.

(b) Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $x \mapsto e^x - 1 - 2x$.

(c) En déduire que, si $\|A\| < 1$, alors $\|S_A\| < 1$ pour la matrice construite en (a).

(d) On suppose que $\|A\| < 1$ et que $\exp(A) = I$. Montrer que A est la matrice nulle.

3. On note $\mathcal{S}_n$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre n , et $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n dont les valeurs propres sont strictement positives.

(a) Montrer que, si $A \in \mathcal{S}_n$, alors $\exp(A) \in \mathcal{S}_n^{++}$.

(b) Montrer que l'application $\exp$ restreinte à $\mathcal{S}_n$ est une surjection de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathcal{S}_n^{++}$.

4. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n$ telles que $\exp(A) = \exp(B)$. On note u , respectivement v , l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A , respectivement B , et $\exp(u)$, respectivement $\exp(v)$, celui canoniquement associé à $\exp(A)$, respectivement $\exp(B)$.

(a) Montrer que A et B ont les mêmes valeurs propres.

(b) Montrer que $A \exp(B) = \exp(B) A$.

(c) Soit F un sous-espace propre de v .

- (i) Montrer que F est également un sous-espace propre de $\exp(v)$.
- (ii) Montrer que la restriction de u à F induit un endomorphisme de F diagonalisable.
- (d) En se plaçant dans une base de diagonalisation de v , montrer que u et v ont les mêmes vecteurs propres. En déduire que $A = B$.

Partie II

1. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit f l'endomorphisme défini par $f(e_1) = 0$ et $f(e_i) = e_{i-1}$ pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$.

On note N la matrice associée à f relativement à $\mathcal{B}$. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice N^k .

2. Soit $p \in]0, 1[$. On définit R_p et Q_p par $R_p = (1 - p)I + pN = I + Q_p$.

(a) Établir l'égalité

$$\exp(Q_p) = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-p} \frac{p^j}{j!} N^j.$$

(b) Calculer $\|R_p\|$ et $\|Q_p\|$. Montrer que $\|\exp(Q_p)\| \leq 1$.

3. (a) Soient $m \geq 1$ un entier et $p_1, \dots, p_m \in]0, 1[$. On pose $R_i = R_{p_i}$ et $Q_i = Q_{p_i}$ pour $1 \leq i \leq m$. Montrer les égalités

$$\prod_{k=1}^m \exp(Q_k) = \exp\left(\sum_{k=1}^m Q_k\right) = \exp\left(-\left(\sum_{k=1}^m p_k\right)(I - N)\right).$$

Les produits matriciels sont pris dans l'ordre croissant des indices. Un produit vide de matrices vaut I .

(b) Établir la relation

$$\prod_{k=1}^m R_k - \prod_{k=1}^m \exp(Q_k) = (R_1 - \exp(Q_1))(R_2 \cdots R_m) \\ - \exp(Q_1)(\exp(Q_2) \cdots \exp(Q_m) - R_2 \cdots R_m).$$

(c) En déduire la majoration

$$\left\| \prod_{k=1}^m R_k - \prod_{k=1}^m \exp(Q_k) \right\| \leq \sum_{k=1}^m \|R_k - \exp(Q_k)\|.$$

4. (a) Montrer l'égalité

$$\|\exp(Q_1) - R_1\| = |e^{-p_1} - 1 + p_1| + p_1 |e^{-p_1} - 1| + e^{-p_1} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{p_1^k}{k!}.$$

Une somme vide vaut zéro.

(b) En déduire successivement les deux inégalités

$$\|\exp(Q_1) - R_1\| \leq 2p_1^2, \quad \left\| \prod_{k=1}^m R_k - \prod_{k=1}^m \exp(Q_k) \right\| \leq 2 \sum_{k=1}^m p_k^2.$$

Partie III

Les notations sont celles de la partie II.

On considère m pièces de monnaie, avec $1 \leq m < n$, telles que, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, la i -ième pièce donne Pile avec la probabilité p_i et Face avec la probabilité $1 - p_i$. On pose

$$\lambda = \sum_{i=1}^m p_i.$$

Un joueur lance successivement la première pièce, la deuxième pièce, puis les suivantes jusqu'à la m -ième. Les résultats de ces lancers sont mutuellement indépendants.

L'expérience est modélisée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, on note S_k la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus à l'issue des k premiers lancers.

1. (a) Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, les $k + 1$ premiers éléments de la première ligne du produit matriciel $R_1 \cdots R_k$ représentent la loi de S_k .

(b) Montrer la relation

$$\left\| \prod_{i=1}^m R_i - \prod_{i=1}^m \exp(Q_i) \right\| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| P(S_m = k) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right|.$$

(c) En déduire l'inégalité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| P(S_m = k) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq 2 \sum_{i=1}^m p_i^2.$$

2. En Python, on prépare un tableau `prob` de longueur `m` contenant les probabilités $p_1, \dots, p_m$, avec `prob[0]` égal à p_1 , puis les suivantes dans le même ordre.

Python

```
import numpy as np
```

```
m = ...
```

```
prob = np.zeros(m)
```

On suppose que le tableau `prob` a ensuite été rempli avec ces probabilités.

Écrire une fonction Python `Sm(prob)` renvoyant un entier et simulant la variable aléatoire S_m .