



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2007

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Rappel utilisé dans tout le corrigé (espérance conditionnelle).

Soit Y une variable aléatoire discrète admettant une espérance et C un événement tel que $P(C) > 0$. Pour tout y , $P_C([Y = y]) = \frac{P([Y = y] \cap C)}{P(C)}$, donc, sous réserve de convergence absolue,

$$E(Y/C) = \frac{1}{P(C)} \sum_y y P([Y = y] \cap C).$$

La variable $Y\mathbf{1}_C$ vaut y sur $[Y = y] \cap C$ et 0 en dehors de C , donc

$$E(Y\mathbf{1}_C) = \sum_y y P([Y = y] \cap C).$$

Ainsi :

$$E(Y\mathbf{1}_C) = P(C) E(Y/C)$$

En particulier, si Y ne prend qu'un nombre fini de valeurs, toutes ces espérances existent. Plus généralement, pour toute fonction g ,

$$E(g(Y)/C) = \sum_y g(y) P_C([Y = y])$$

(théorème de transfert pour la probabilité P_C).

Partie I.

- 1) a) On décrit l'événement « l'urne i est vide » à l'aide des placements indépendants des m boules.

Pour $b \in \llbracket 1, m \rrbracket$, notons B_b l'événement « la boule b n'est pas placée dans l'urne i ». On a $P(B_b) = 1 - \frac{1}{n}$ et les événements $B_1, \dots, B_m$ sont mutuellement indépendants (placements indépendants). L'urne i est vide si et seulement si aucune boule n'y est placée :

$$P([X_i = 1]) = P\left(\bigcap_{b=1}^m B_b\right) = \prod_{b=1}^m P(B_b) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$$

Conclusion

X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$.

- b) Même méthode avec deux urnes, puis formule de Koenig-Huygens pour la covariance.

Soit $i \neq j$. Les urnes i et j sont toutes deux vides si et seulement si chaque boule est placée dans l'une des $n - 2$ autres urnes, ce qui, pour une boule donnée, a la probabilité $1 - \frac{2}{n}$. Par indépendance des placements :

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m = b_n$$

Comme $X_i X_j$ suit la loi de Bernoulli de paramètre b_n et $E(X_i) = E(X_j) = a_n$:

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m}$$

Signe. On a $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} > 1 - \frac{2}{n} \geq 0$ (car $n \geq 3$). La fonction $t \mapsto t^m$ étant

strictement croissante sur $[0, +\infty[$, $\left(1 - \frac{2}{n}\right)^m < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m}$, donc $\text{Cov}(X_i, X_j) < 0$.

Deux variables indépendantes ont une covariance nulle ; ici elle est non nulle.

Conclusion

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m, \quad \text{Cov}(X_i, X_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} < 0,$$

et X_i, X_j ne sont pas indépendantes.

2) a) Par linéarité de l'espérance (variables finies) :

$$E(W_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$$

Conclusion

$$E(W_n) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m.$$

b) On utilise la formule de la variance d'une somme, les X_i n'étant pas indépendantes :

$$V(W_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

où la seconde somme porte sur les $n(n-1)$ couples (i, j) d'indices distincts. Avec $V(X_i) = a_n(1 - a_n)$ et 1) b) :

$$V(W_n) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right) + n(n-1) \left[\left(1 - \frac{2}{n}\right)^m - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} \right]$$

Conclusion

en notant $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$ et $b_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m$, $V(W_n) = na_n(1 - a_n) + n(n - 1)(b_n - a_n^2)$.

c) On soustrait, puis on compare a_n^2 et b_n .

$$E(W_n) - V(W_n) = na_n - na_n + na_n^2 - n(n - 1)b_n + n(n - 1)a_n^2 = n^2a_n^2 - n(n - 1)b_n$$

ce qui est l'égalité demandée puisque $a_n^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m}$.

D'après 1) b), $a_n^2 > b_n \geq 0$, et $n^2 \geq n(n - 1)$, donc :

$$n^2a_n^2 \geq n(n - 1)a_n^2 \geq n(n - 1)b_n$$

Conclusion

$$E(W_n) - V(W_n) = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} - n(n - 1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m \geq 0.$$

3) Ici $m = m_n = \lfloor n \ln n + \theta n \rfloor$ dépend de n . Par définition de la partie entière :

$$n \ln n + \theta n - 1 < m_n \leq n \ln n + \theta n$$

Pour $n \geq 4$, $m_n \geq \lfloor 4 \ln 4 \rfloor = 5$, donc l'hypothèse $m \geq 4$ est satisfaite dès que $n \geq 4$, ce qui suffit pour l'étude des limites. On déduit de l'encadrement les deux résultats suivants, utilisés plusieurs fois :

$$\ln n - \frac{m_n}{n} \in \left[-\theta, -\theta + \frac{1}{n}\right], \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln n - \frac{m_n}{n}\right) = -\theta, \text{ et } \frac{m_n}{n \ln n} \rightarrow 1, \text{ soit } m_n \sim n \ln n.$$

a) On étudie $\ln E(W_n) = \ln n + m_n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Méthode 1 — Développement limité et équivalents.

On écrit $\ln E(W_n) = \left(\ln n - \frac{m_n}{n}\right) + m_n \left(\ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\right)$.

Le premier terme tend vers $-\theta$. Pour le second, le développement limité usuel

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ en 0, appliqué à $x = -\frac{1}{n}$, donne $\ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{2n^2}$.

Par produit d'équivalents :

$$m_n \left(\ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\right) \sim n \ln n \times \left(-\frac{1}{2n^2}\right) = -\frac{\ln n}{2n} \rightarrow 0$$

Donc $\ln E(W_n) \rightarrow -\theta$.

Méthode 2 — Encadrement du logarithme.

Pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a $-x - x^2 \leq \ln(1-x) \leq -x$. En effet, $\psi_1(x) = \ln(1-x) + x$ vérifie

$\psi_1'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} \leq 0$ et $\psi_1(0) = 0$, donc $\psi_1 \leq 0$; et $\psi_2(x) = \ln(1-x) + x + x^2$

vérifie $\psi_2'(x) = \frac{x(1-2x)}{1-x} \geq 0$ et $\psi_2(0) = 0$, donc $\psi_2 \geq 0$. Avec $x = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ et $m_n > 0$:

$$\ln n - \frac{m_n}{n} - \frac{m_n}{n^2} \leq \ln E(W_n) \leq \ln n - \frac{m_n}{n}$$

Or $\frac{m_n}{n^2} \leq \frac{\ln n + \theta}{n} \rightarrow 0$ (croissances comparées), et $\ln n - \frac{m_n}{n} \rightarrow -\theta$. Par encadrement, $\ln E(W_n) \rightarrow -\theta$.

La méthode 1 utilise les développements limités et les équivalents ; la méthode 2 n'utilise qu'une étude de fonction et le théorème d'encadrement, ce qui évite toute manipulation d'équivalents.

Par continuité de l'exponentielle :

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(W_n) = e^{-\theta}.$$

b) D'après 2) c), $E(W_n) - V(W_n) = (E(W_n))^2 - n(n-1)b_n$. Le premier terme tend vers $e^{-2\theta}$ d'après a). On étudie le second par son logarithme (licite car $n \geq 3$ donne $1 - \frac{2}{n} > 0$) :

$$\ln(n(n-1)b_n) = 2 \left(\ln n - \frac{m_n}{n} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) + m_n \left(\ln \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \frac{2}{n} \right)$$

Le premier terme tend vers -2θ , le deuxième vers 0. Pour le troisième, le développement limité de a) avec $x = -\frac{2}{n}$ donne $\ln \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \frac{2}{n} \sim -\frac{2}{n^2}$, donc

$$m_n \left(\ln \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \frac{2}{n} \right) \sim -\frac{2 \ln n}{n} \rightarrow 0.$$

Ainsi $\ln(n(n-1)b_n) \rightarrow -2\theta$ et $n(n-1)b_n \rightarrow e^{-2\theta}$. Par différence de limites finies :

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (E(W_n) - V(W_n)) = e^{-2\theta} - e^{-2\theta} = 0.$$

c) La variable W_n prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$: il suffit d'étudier la limite de $P([W_n = k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $\mu_n > 0$, $\min \left(1, \frac{1}{\mu_n} \right) \leq 1$ et $\mu_n - V(W_n) \geq 0$ d'après 2) c). Le résultat admis donne donc :

$$0 \leq |P([W_n = k]) - P([T_n = k])| \leq \mu_n - V(W_n)$$

et le majorant tend vers 0 d'après b). Par ailleurs, d'après a) et la continuité de

$$x \mapsto e^{-x} \frac{x^k}{k!} :$$

$$P([T_n = k]) = e^{-\mu_n} \frac{\mu_n^k}{k!} \rightarrow e^{-e^{-\theta}} \frac{(e^{-\theta})^k}{k!}$$

Donc $P([W_n = k]) \rightarrow e^{-e^{-\theta}} \frac{(e^{-\theta})^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour des variables à valeurs dans $\mathbb{N}$, cette convergence des probabilités ponctuelles caractérise la convergence en loi.

Conclusion

la suite $(W_n)_{n \geq 3}$ converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre $e^{-\theta}$.

Remarque : l'inégalité admise est un cas particulier du résultat général établi en IV.2) b), avec $\lambda_n = \mu_n$, sous réserve de construire des variables Z_i vérifiant les hypothèses de IV.2) ; cette construction n'est pas demandée.

4) a) On calcule l'espérance et la variance de $\overline{T}_p$.

Chaque T_i suit la loi de Poisson de paramètre μ , donc $E(T_i) = V(T_i) = \mu$. Par linéarité, $E(\overline{T}_p) = \mu$: l'estimateur $\overline{T}_p$ (qui ne dépend que de l'échantillon) est sans biais. Par indépendance des T_i :

$$V(\overline{T}_p) = \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^p V(T_i) = \frac{\mu}{p}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$0 \leq P(|\overline{T}_p - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mu}{p\varepsilon^2} \rightarrow 0 \text{ quand } p \rightarrow +\infty$$

donc $\overline{T}_p$ converge en probabilité vers μ (c'est la loi faible des grands nombres).

Conclusion

$\overline{T}_p$ est un estimateur sans biais et convergent de μ .

b) On applique le théorème limite central.

Les variables $T_1, \dots, T_p, \dots$ sont indépendantes, de même loi, d'espérance μ et de variance μ strictement positive. Avec

$$S_p = \sum_{i=1}^p T_i :$$

$$U_p = \sqrt{p} \frac{\overline{T}_p - \mu}{\sqrt{\mu}} = \frac{S_p - p\mu}{\sqrt{p\mu}} = \frac{S_p - E(S_p)}{\sqrt{V(S_p)}}$$

Conclusion

d'après le théorème limite central, $(U_p)_{p \geq 1}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

c) On passe à la limite dans $P(|U_p| \leq u)$, puis on résout en μ l'inégalité $|U_p| \leq u$, sans remplacer μ par un estimateur au dénominateur.

Existence de u . Soit Φ la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$, continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$. Pour $\alpha \in]0, 1[$, $P([U \geq u]) = 1 - \Phi(u) = \frac{\alpha}{2}$ équivaut à

$$\Phi(u) = 1 - \frac{\alpha}{2} \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[; \text{ par le théorème de la bijection, } u \text{ existe, est unique, et } u > 0 \text{ car } \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Limite. Par b), $P([U_p \leq x]) \rightarrow \Phi(x)$ pour tout réel x (Φ est continue). Pour tout $\varepsilon > 0$, les inclusions $[-u < U_p \leq u] \subset [|U_p| \leq u] \subset [-u - \varepsilon < U_p \leq u]$ donnent :

$$P([U_p \leq u]) - P([U_p \leq -u]) \leq P(|U_p| \leq u) \leq P([U_p \leq u]) - P([U_p \leq -u - \varepsilon])$$

Le minorant tend vers $\Phi(u) - \Phi(-u) = 2\Phi(u) - 1 = 1 - \alpha$ et le majorant vers $\Phi(u) - \Phi(-u - \varepsilon)$. Soit $\eta > 0$. Par continuité de Φ en $-u$, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\Phi(-u) - \Phi(-u - \varepsilon) \leq \frac{\eta}{2}$; le majorant tend alors vers un réel inférieur ou égal à $1 - \alpha + \frac{\eta}{2}$. Il existe donc un rang à partir duquel $1 - \alpha - \eta \leq P(|U_p| \leq u) \leq 1 - \alpha + \eta$. Ainsi :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} P(|U_p| \leq u) = 1 - \alpha$$

C'est le sens de l'égalité « $P(|U_p| \leq u) = 1 - \alpha$ pour p assez grand » : il s'agit d'une approximation, exacte à la limite.

Intervalle. Comme $\mu > 0$ et $p \geq 1$:

$$|U_p| \leq u \iff (\overline{T}_p - \mu)^2 \leq \frac{u^2 \mu}{p} \iff \mu^2 - \left(2\overline{T}_p + \frac{u^2}{p}\right) \mu + \overline{T}_p^2 \leq 0$$

Le discriminant de ce trinôme en μ vaut $\left(2\overline{T}_p + \frac{u^2}{p}\right)^2 - 4\overline{T}_p^2 = \frac{4u^2}{p} \left(\overline{T}_p + \frac{u^2}{4p}\right) > 0$ (car $\overline{T}_p \geq 0$). Le trinôme est négatif ou nul exactement entre ses racines :

$$I_p = \overline{T}_p + \frac{u^2}{2p} - u\sqrt{\frac{\overline{T}_p}{p} + \frac{u^2}{4p^2}} \text{ et } J_p = \overline{T}_p + \frac{u^2}{2p} + u\sqrt{\frac{\overline{T}_p}{p} + \frac{u^2}{4p^2}}$$

Ainsi $[|U_p| \leq u] = [I_p \leq \mu \leq J_p]$, et I_p, J_p ne dépendent que de l'échantillon et de u : ce sont des estimateurs.

Conclusion

$\lim_{p \rightarrow +\infty} P([I_p \leq \mu \leq J_p]) = 1 - \alpha$; l'intervalle $[I_p, J_p]$ ci-dessus est un intervalle de confiance asymptotique de μ au risque α .

Remarque : on n'a pas remplacé $\sqrt{\mu}$ par $\sqrt{\overline{T}_p}$ dans U_p , car la convergence en loi de la variable ainsi obtenue ne découle pas des résultats du programme; la résolution exacte en μ évite cette difficulté.

Partie II

Notations. On note $\pi(A) = P([M \in A])$ pour $A \subset \mathbb{N}$, avec $\pi(\emptyset) = 0$, et, pour $k \in \mathbb{N}$, $G_A(k) = P([M \in A] \cap [M \leq k]) - \pi(A)P([M \leq k])$, de sorte que $f_A(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^\lambda G_A(k)$. On note $q_i = P([M = i]) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} > 0$.

- 1) a) Si $A = \emptyset$, $[M \in A] \cap [M \leq k] = \emptyset$ et $\pi(A) = 0$, donc $G_A(k) = 0$ pour tout k . Si $A = \mathbb{N}$, $[M \in A] \cap [M \leq k] = [M \leq k]$ et $\pi(A) = 1$, donc $G_A(k) = P([M \leq k]) - P([M \leq k]) = 0$.

Conclusion

$f_\emptyset$ et $f_{\mathbb{N}}$ sont la fonction nulle sur $\mathbb{N}$.

- b) Avec $k = 0$: $f_A(1) = \frac{e^\lambda}{\lambda} (P([M \in A] \cap [M = 0]) - \pi(A)e^{-\lambda})$.

Si $0 \in A$, $[M \in A] \cap [M = 0] = [M = 0]$, donc

$$f_A(1) = \frac{e^\lambda}{\lambda} (e^{-\lambda} - \pi(A)e^{-\lambda}) = \frac{1 - P([M \in A])}{\lambda}.$$

Si $0 \in \bar{A}$, $[M \in A] \cap [M = 0] = \emptyset$, donc $f_A(1) = -\frac{P([M \in A])}{\lambda}$.

Si 0 et 1 appartiennent à A , avec $k = 1$: $[M \in A] \cap [M \leq 1] = [M \leq 1]$ et $P([M \leq 1]) = e^{-\lambda}(1 + \lambda)$, donc :

$$f_A(2) = \frac{1!}{\lambda^2} e^\lambda (e^{-\lambda}(1 + \lambda) - \pi(A)e^{-\lambda}(1 + \lambda)) = \frac{(1 + \lambda)(1 - P([M \in A]))}{\lambda^2}$$

Conclusion

$$f_A(1) = \frac{1 - P([M \in A])}{\lambda} \text{ si } 0 \in A, \quad f_A(1) = -\frac{P([M \in A])}{\lambda} \text{ si } 0 \in \bar{A}, \text{ et } f_A(2) = \frac{(1 + \lambda)(1 - P([M \in A]))}{\lambda^2} \text{ si } 0, 1 \in A.$$

2) a) On utilise l'additivité de P sur des événements incompatibles.

A et B étant disjointes, $[M \in A \cup B] = [M \in A] \cup [M \in B]$ avec $[M \in A] \cap [M \in B] = \emptyset$ (ce qui reste vrai si A ou B est vide, avec la convention). Donc $\pi(A \cup B) = \pi(A) + \pi(B)$ et, de même, pour tout k ,

$$P([M \in A \cup B] \cap [M \leq k]) = P([M \in A] \cap [M \leq k]) + P([M \in B] \cap [M \leq k]).$$

Ainsi $G_{A \cup B}(k) = G_A(k) + G_B(k)$, donc $f_{A \cup B}(k+1) = f_A(k+1) + f_B(k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et $f_{A \cup B}(0) = 0 = f_A(0) + f_B(0)$.

Conclusion

$$f_{A \cup B} = f_A + f_B.$$

b) A et $\bar{A}$ sont disjointes et $A \cup \bar{A} = \mathbb{N}$. Par a) et 1) a) : $f_A + f_{\bar{A}} = f_{\mathbb{N}} = 0$.

Conclusion

$$f_{\bar{A}} = -f_A.$$

3) a) On exprime $kf_A(k)$ à l'aide de $G_A(k-1)$ et on fait la différence.

Posons $G_A(-1) = 0$. Pour $k \geq 1$, $kf_A(k) = k \frac{(k-1)!}{\lambda^k} e^\lambda G_A(k-1) = \frac{k!}{\lambda^k} e^\lambda G_A(k-1)$;

pour $k = 0$, cette égalité est encore vraie ($0 = 0$). D'autre part $\lambda f_A(k+1) = \frac{k!}{\lambda^k} e^\lambda G_A(k)$.

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\lambda f_A(k+1) - kf_A(k) = \frac{k!}{\lambda^k} e^\lambda (G_A(k) - G_A(k-1))$$

Or $[M \leq k] = [M \leq k-1] \cup [M = k]$ (réunion disjointe), donc :

$$G_A(k) - G_A(k-1) = P([M \in A] \cap [M = k]) - \pi(A) q_k = q_k (\mathbf{1}_A(k) - \pi(A))$$

où $\mathbf{1}_A(k)$ vaut 1 si $k \in A$ et 0 sinon. Comme $\frac{k!}{\lambda^k} e^\lambda q_k = 1$:

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \mathbf{1}_A(k) - \pi(A)$$

Si $k \in A$, cela vaut $1 - \pi(A) = P([M \in \overline{A}])$; si $k \in \overline{A}$, cela vaut $-\pi(A) = -P([M \in A])$.

Conclusion

la relation demandée est vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) On raisonne par l'absurde.

Supposons A non vide, $A \neq \mathbb{N}$ et f_A identiquement nulle. Soit $k \in A$. Par a),
 $0 = \lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = P([M \in \overline{A}])$. Or $\overline{A}$ est non vide : pour $i \in \overline{A}$,
 $P([M \in \overline{A}]) \geq q_i > 0$. Contradiction.

Conclusion

si A est non vide et distincte de $\mathbb{N}$, f_A n'est pas identiquement nulle.

4) a) On calcule $G_{\{j\}}(k)$ selon la position de k par rapport à j .

Si $k \geq j$: $[M = j] \cap [M \leq k] = [M = j]$, donc

$G_{\{j\}}(k) = q_j (1 - P([M \leq k])) = q_j P([M \geq k+1])$ et :

$$f_j(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^\lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} P([M \geq k+1]) = \frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P([M \geq k+1])$$

Si $k < j$: $[M = j] \cap [M \leq k] = \emptyset$, donc $G_{\{j\}}(k) = -q_j P([M \leq k])$ et :

$$f_j(k+1) = -\frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P([M \leq k])$$

Conclusion

les formules demandées sont établies pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Le calcul est valable aussi pour $k = 0$ (qui relève du cas $k < j$), et le cas $k \geq j$ n'utilise pas $j \geq 1$: il vaut aussi pour $j = 0$.

b) On applique a) avec $k = j$ pour $f_j(j+1)$ et avec $k = j-1 < j$ (éventuellement $k = 0$, voir la fin de a)) pour $f_j(j)$:

$$f_j(j+1) = \frac{1}{\lambda} P([M \geq j+1]) \text{ et}$$

$$f_j(j) = -\frac{(j-1)!}{j! \lambda^0} P([M \leq j-1]) = -\frac{1}{j} P([M \leq j-1])$$

Donc :

$$f_j(j+1) - f_j(j) = \frac{1}{\lambda} P([M \geq j+1]) + \frac{1}{j} P([M \leq j-1])$$

Conclusion

$$f_j(j+1) - f_j(j) = \frac{1}{\lambda} P([M \geq j+1]) + \frac{1}{j} P([M \leq j-1]),$$

qui est strictement positif (somme de deux termes positifs, le premier non nul car $P([M \geq j+1]) \geq q_{j+1} > 0$).

c) On factorise et on écrit les probabilités comme des sommes de séries pour comparer.

Cas $k > j$. Alors $k \geq j$ et $k-1 \geq j$, donc par a) :

$$\begin{aligned} f_j(k+1) - f_j(k) &= \frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P([M \geq k+1]) - \frac{(k-1)!}{j! \lambda^{k-j}} P([M \geq k]) \\ &= \frac{(k-1)!}{j! \lambda^{k-j+1}} (k P([M \geq k+1]) - \lambda P([M \geq k])) \end{aligned}$$

Or, les séries ci-dessous convergent (séries exponentielles), et en posant $i = l + 1$:

$$\lambda P([M \geq k]) = \sum_{l=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{l+1}}{l!} = \sum_{i=k+1}^{+\infty} i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

donc

$$kP([M \geq k+1]) - \lambda P([M \geq k]) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} (k-i) e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} < 0,$$

chaque terme étant strictement négatif. Ainsi $f_j(k+1) - f_j(k) < 0$.

Cas $1 \leq k < j$. Alors $k-1 < j$, donc par a) (la formule valant aussi en 0) :

$$\begin{aligned} f_j(k+1) - f_j(k) &= -\frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P([M \leq k]) + \frac{(k-1)!}{j! \lambda^{k-j}} P([M \leq k-1]) \\ &= \frac{(k-1)!}{j! \lambda^{k-j+1}} (\lambda P([M \leq k-1]) - kP([M \leq k])) \end{aligned}$$

Or

$$\lambda P([M \leq k-1]) = \sum_{l=0}^{k-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{l+1}}{l!} = \sum_{i=1}^k i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!},$$

donc :

$$\lambda P([M \leq k-1]) - kP([M \leq k]) = \sum_{i=1}^k (i-k) e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} - ke^{-\lambda} < 0$$

car chaque $i - k$ est négatif ou nul et $-ke^{-\lambda} < 0$. Ainsi $f_j(k+1) - f_j(k) < 0$.

Conclusion

pour $k \in \mathbb{N}^*, k \neq j$,

$$f_j(k+1) - f_j(k) = \frac{(k-1)!}{j! \lambda^{k-j+1}} (kP([M \geq k+1]) - \lambda P([M \geq k])) < 0$$

si $k > j$ et

$$f_j(k+1) - f_j(k) = \frac{(k-1)!}{j! \lambda^{k-j+1}} (\lambda P([M \leq k-1]) - kP([M \leq k])) < 0$$

si $k < j$. Avec b), la différence $f_j(k+1) - f_j(k)$ est positive si et seulement si $k = j$.

d) On majore le terme $\frac{1}{j}P([M \leq j-1])$ terme à terme.

Pour $0 \leq i \leq j-1$, on a $i+1 \leq j$, donc $\frac{1}{j} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \leq \frac{\lambda^i}{(i+1)i!} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!}$. En sommant :

$$\frac{1}{j}P([M \leq j-1]) \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{j-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{1}{\lambda} \sum_{l=1}^j e^{-\lambda} \frac{\lambda^l}{l!} = \frac{1}{\lambda} P([1 \leq M \leq j])$$

Avec b) :

$$f_j(j+1) - f_j(j) \leq \frac{1}{\lambda} (P([M \geq j+1]) + P([1 \leq M \leq j])) = \frac{1}{\lambda} P([M \geq 1]) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$$

Seconde inégalité. D'une part $1 - e^{-\lambda} \leq 1$, donc $\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda}$. D'autre part, l'exponentielle étant convexe, elle est au-dessus de sa tangente en 0 : $e^{-\lambda} \geq 1 - \lambda$, donc $1 - e^{-\lambda} \leq \lambda$ et $\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leq 1$.

Conclusion

$$f_j(j+1) - f_j(j) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right).$$

5) On applique la formule de 4) a) dans le cas $k \geq j$ avec $j = 0$ (voir la fin de 4) a)) :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad f_0(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} P([M \geq k+1]).$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $k-1 \geq 0$, et le calcul du cas $k > j$ de 4) c) s'applique mot pour mot avec $j = 0$:

$$\begin{aligned} f_0(k+1) - f_0(k) &= \frac{(k-1)!}{\lambda^{k+1}} (kP([M \geq k+1]) - \lambda P([M \geq k])) \\ &= \frac{(k-1)!}{\lambda^{k+1}} \sum_{i=k+1}^{+\infty} (k-i) e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} < 0 \end{aligned}$$

Conclusion

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad f_0(k+1) - f_0(k) \leq 0 \text{ (et même } < 0 \text{)}.$$

6) a) On décompose f_A en somme des f_j , $j \in A$, puis on utilise les signes établis en 4) et 5).

Notations. Pour $j \in \mathbb{N}$, $f_j = f_{\{j\}}$ (y compris $j = 0$) et $d_j(k) = f_j(k+1) - f_j(k)$; de même $d_A(k) = f_A(k+1) - f_A(k)$.

Signes des $d_j(k)$:

- si $j \neq k$, $d_j(k) \leq 0$: pour $j \geq 1$ et $k \geq 1$, c'est 4) c) ; pour $j \geq 1$ et $k = 0$,
 $d_j(0) = f_j(1) = -\frac{q_j}{\lambda} < 0$ par 1) b) ($0 \notin \{j\}$) ; pour $j = 0$ et $k \geq 1$, c'est 5) ;
- $d_k(k) \geq 0$: pour $k \geq 1$, c'est 4) b) ; pour $k = 0$, $d_0(0) = f_0(1) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} > 0$ par 1) b).

Décomposition. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$, $f_j(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{\lambda} (\mathbf{1}_{j \leq k} q_j - q_j P([M \leq k]))$. La

série

$$\sum_j \mathbf{1}_A(j) q_j$$

converge et a pour somme $\pi(A)$, et

$$\sum_j \mathbf{1}_A(j) \mathbf{1}_{j \leq k} q_j = P([M \in A] \cap [M \leq k])$$

est une somme finie. Par linéarité des séries convergentes, la série

$$\sum_j \mathbf{1}_A(j) f_j(k+1)$$

converge et :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{1}_A(j) f_j(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^\lambda (P([M \in A] \cap [M \leq k]) - \pi(A)P([M \leq k])) = f_A(k+1)$$

Cette égalité vaut aussi en 0 (tous les termes sont nuls). Par différence de séries convergentes, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$d_A(k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{1}_A(j) d_j(k)$$

Cas $k \in A$. On isole le terme $j = k$:

$$d_A(k) = d_k(k) + \sum_{j \neq k} \mathbf{1}_A(j) d_j(k),$$

et la série restante a tous ses termes négatifs ou nuls, donc une somme négative ou nulle. Ainsi $d_A(k) \leq d_k(k)$.

Cas $k \in \bar{A}$. Tous les termes $\mathbf{1}_A(j) d_j(k)$ sont négatifs ou nuls (le terme $j = k$ est nul), donc $d_A(k) \leq 0 \leq d_k(k)$.

Conclusion

pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_A(k+1) - f_A(k) \leq f_k(k+1) - f_k(k)$.

b) On majore $d_A(k)$ et $-d_A(k)$ par $\min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$.

Pour $k \geq 1$, 4) d) donne $d_k(k) \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$; pour $k = 0$,

$d_0(0) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$ par la seconde inégalité de 4) d). Avec a), pour toute partie A et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$d_A(k) \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$$

En appliquant ce résultat à $\bar{A}$ et en utilisant 2) b), $-d_A(k) = d_{\bar{A}}(k) \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$. Donc $|d_A(k)| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$ pour tout k . L'ensemble $\{|d_A(k)|; k \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré par ce réel, donc admet une borne supérieure qui lui est inférieure ou égale.

Conclusion

$\sup_{k \geq 0} |f_A(k+1) - f_A(k)| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$.

Partie III.

Remarques préliminaires. Les variables W_n et R_i prennent leurs valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, donc $f(W_n)$, $f(1 + W_n)$, $f(1 + R_i)$, $f(2 + R_i)$, $X_i f(W_n)$, $W_n f(W_n)$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs : elles admettent une espérance. Pour tout i ,

$$R_i = \sum_{j \neq i} X_j$$

ne dépend que des X_j , $j \neq i$; par le lemme des coalitions, X_i et R_i sont indépendantes, et donc X_i est indépendante de toute variable $g(R_i)$. Enfin $\lambda_n > 0$, donc la partie II s'applique avec $\lambda = \lambda_n$ et $M = M_n$.

1) a) On distingue selon la valeur de X_i .

Si $X_i(\omega) = 1$, alors $W_n(\omega) = X_i(\omega) + R_i(\omega) = 1 + R_i(\omega)$ et les deux variables prennent la valeur $f(1 + R_i(\omega))$. Si $X_i(\omega) = 0$, les deux variables prennent la valeur 0.

Conclusion

$$X_i f(W_n) = X_i f(1 + R_i).$$

b) Par a), puis par indépendance de X_i et $f(1 + R_i)$ (variables finies) :

$$E(X_i f(W_n)) = E(X_i f(1 + R_i)) = E(X_i) E(f(1 + R_i)) = p_i E(f(1 + R_i))$$

Conclusion

$$E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1 + R_i)).$$

2) On écrit

$$W_n f(W_n) = \sum_{i=1}^n X_i f(W_n)$$

et

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^n p_i.$$

Par linéarité de l'espérance et 1) b) :

$$\begin{aligned} E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) &= \sum_{i=1}^n p_i E(f(1 + W_n)) - \sum_{i=1}^n p_i E(f(1 + R_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i E(f(1 + W_n) - f(1 + R_i)) \end{aligned}$$

Conclusion

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i E(Y_i).$$

3) a) On utilise le rappel initial avec $C = [X_i = 1]$, de probabilité $p_i > 0$.

Sur $[X_i = 1]$, $W_n = 1 + R_i$, donc $Y_i = f(2 + R_i) - f(1 + R_i)$. Ainsi

$Y_i \mathbf{1}_{[X_i=1]} = X_i (f(2 + R_i) - f(1 + R_i))$ (les deux membres sont nuls si $X_i = 0$). Par indépendance de X_i et de $f(2 + R_i) - f(1 + R_i)$:

$$\begin{aligned} E(Y_i / [X_i = 1]) &= \frac{E(Y_i \mathbf{1}_{[X_i=1]})}{p_i} = \frac{p_i E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))}{p_i} \\ &= E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i)) \end{aligned}$$

Conclusion

$$E(Y_i / [X_i = 1]) = E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i)).$$

b) Cette espérance conditionnelle existe si et seulement si $P([X_i = 0]) = 1 - p_i > 0$, c'est-à-dire $p_i < 1$. Dans ce cas, sur $[X_i = 0]$, $W_n = R_i$ donc

$Y_i = f(1 + R_i) - f(1 + R_i) = 0$; ainsi $Y_i \mathbf{1}_{[X_i=0]} = 0$ et, par le rappel initial, $E(Y_i/[X_i = 0]) = 0$.

Conclusion

pour tout i tel que $p_i < 1$, $E(Y_i/[X_i = 0]) = 0$ (si $p_i = 1$, l'événement $[X_i = 0]$ est de probabilité nulle et cette espérance conditionnelle n'est pas définie).

c) On calcule $E(Y_i)$, puis on reporte dans 2).

Méthode 1 — Formule de l'espérance totale.

Si $0 < p_i < 1$, les événements $[X_i = 1]$ et $[X_i = 0]$ forment un système complet d'événements de probabilités non nulles, et Y_i est une variable finie. Par la formule de l'espérance totale, a) et b) :

$$E(Y_i) = p_i E(Y_i/[X_i = 1]) + (1 - p_i) E(Y_i/[X_i = 0]) = p_i E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))$$

Si $p_i = 1$, $[X_i = 1]$ est presque sûr, donc $Y_i = Y_i \mathbf{1}_{[X_i=1]}$ presque sûrement et $E(Y_i) = p_i E(Y_i/[X_i = 1])$ par le rappel initial : la même formule vaut.

Méthode 2 — Écriture directe de Y_i .

On a vu en a) que Y_i est nulle sur $[X_i = 0]$ et vaut $f(2 + R_i) - f(1 + R_i)$ sur $[X_i = 1]$, donc $Y_i = X_i (f(2 + R_i) - f(1 + R_i))$. Par indépendance de X_i et R_i : $E(Y_i) = p_i E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))$, sans distinguer le cas $p_i = 1$.

La méthode 1 suit l'énoncé et utilise le conditionnement; la méthode 2 est plus directe et évite les espérances conditionnelles.

Dans les deux cas, en reportant dans 2) :

Conclusion

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i^2 E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i)).$$

4) On majore chaque espérance grâce à II.6) b).

D'après II.6) b) avec $\lambda = \lambda_n$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|f(k+1) - f(k)| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right)$. En appliquant ceci à $k = 1 + R_i(\omega)$, on obtient $|f(2 + R_i) - f(1 + R_i)| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right)$, donc, par croissance de l'espérance :

$$|E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))| \leq E(|f(2 + R_i) - f(1 + R_i)|) \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

Avec 3) c) et l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n))| &\leq \sum_{i=1}^n p_i^2 |E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))| \\ &\leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \sum_{i=1}^n p_i^2 \end{aligned}$$

Conclusion

l'inégalité demandée est établie.

5) On applique II.3) a) en chaque point ω , avec $k = W_n(\omega)$.

D'après II.3) a) (avec M_n et λ_n), pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$\lambda_n f(k+1) - kf(k) = \mathbf{1}_A(k) - P([M_n \in A])$, puisque $P([M_n \in \overline{A}]) = 1 - P([M_n \in A])$.

Comme W_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n) = \mathbf{1}_{[W_n \in A]} - P([M_n \in A])$$

En prenant l'espérance :

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])$$

Avec 4), on obtient la majoration demandée.

Conclusion

pour toute partie A de $\mathbb{N}$,

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

6) a) Ici $p_i = \frac{1}{n+i} \in]0, 1[$ et

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}.$$

Méthode 1 — Somme de Riemann.

$$\lambda_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}}$$

est une somme de Riemann de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$, continue sur $[0, 1]$. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$$

Méthode 2 — Comparaison avec une intégrale.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\int_{n+i}^{n+i+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n+i} \leq \int_{n+i-1}^{n+i} \frac{dt}{t}$$

En sommant pour i de 1 à n (relation de Chasles) :

$$\ln \frac{2n+1}{n+1} \leq \lambda_n \leq \ln \frac{2n}{n} = \ln 2$$

Le minorant tend vers $\ln 2$; par encadrement, $\lambda_n \rightarrow \ln 2$.

La méthode 1 est immédiate si l'on reconnaît une somme de Riemann ; la méthode 2 fournit en plus un encadrement explicite de λ_n pour tout n .

Somme des carrés. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 < p_i \leq \frac{1}{n+1}$, donc

$$0 \leq \sum_{i=1}^n p_i^2 \leq \frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n},$$

et par encadrement cette somme tend vers 0.

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \ln 2 \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n p_i^2 = 0.$$

b) On applique 5) avec $A = \{k\}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Par 5), avec $\min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \leq 1$:

$$0 \leq |P([W_n = k]) - P([M_n = k])| \leq \sum_{i=1}^n p_i^2 \rightarrow 0$$

et, par continuité de $x \mapsto e^{-x} \frac{x^k}{k!}$ et a),

$P([M_n = k]) = e^{-\lambda_n} \frac{\lambda_n^k}{k!} \rightarrow e^{-\ln 2} \frac{(\ln 2)^k}{k!} = \frac{(\ln 2)^k}{2^k k!}$. Donc $P([W_n = k]) \rightarrow \frac{(\ln 2)^k}{2^k k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Les variables W_n étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, cela caractérise la convergence en loi.

Conclusion

$(W_n)_{n \geq 2}$ converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre $\ln 2$.

Partie IV.

Les remarques préliminaires de la partie III restent valables, sauf l'indépendance de X_i et R_i , qui n'est plus disponible.

1) a) L'égalité de III.1) a) n'utilise pas l'indépendance :

$X_i f(W_n) = X_i f(1 + R_i) = f(1 + R_i) \mathbf{1}_{[X_i=1]}$. Par le rappel initial avec $C = [X_i = 1]$, de probabilité $p_i > 0$:

$$E(X_i f(W_n)) = E\left(f(1 + R_i) \mathbf{1}_{[X_i=1]}\right) = p_i E(f(1 + R_i) / [X_i = 1])$$

Conclusion

$$E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1 + R_i) / [X_i = 1]).$$

b) La première égalité de III.5) n'utilise que II.3) a) en chaque point, donc reste vraie :

$$P([W_n \in A]) - P([M_n \in A]) = E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)).$$

Avec

$$W_n f(W_n) = \sum_i X_i f(W_n),$$

$$\lambda_n = \sum_i p_i,$$

la linéarité et a) :

$$P([W_n \in A]) - P([M_n \in A]) = \sum_{i=1}^n p_i E(f(1 + W_n)) - \sum_{i=1}^n p_i E(f(1 + R_i) / [X_i = 1])$$

Conclusion

$$P([W_n \in A]) - P([M_n \in A]) = \sum_{i=1}^n p_i [E(f(1 + W_n)) - E(f(1 + R_i) / [X_i = 1])].$$

2) a) On télescope les accroissements de f , puis on remplace l'espérance conditionnelle par une espérance relative à Z_i .

Inégalité sur f . Soient ℓ et j deux entiers naturels ; par symétrie, on peut supposer $\ell \geq j$ (le cas $\ell = j$ est immédiat). Par télescopage, inégalité triangulaire et II.6) b) avec $\lambda = \lambda_n$:

$$|f(\ell) - f(j)| = \left| \sum_{k=j}^{\ell-1} (f(k+1) - f(k)) \right| \leq \sum_{k=j}^{\ell-1} |f(k+1) - f(k)| \leq (\ell - j) \min \left(1, \frac{1}{\lambda_n} \right)$$

Lien avec Z_i . La loi conditionnelle de R_i sachant $[X_i = 1]$ est portée par $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$; c'est donc aussi le cas de la loi de Z_i : $P([Z_i = r]) = 0$ pour $r \geq n$. Par le théorème de transfert, pour la probabilité $P_{[X_i=1]}$ puis pour P :

$$\begin{aligned} E(f(1 + R_i) / [X_i = 1]) &= \sum_{r=0}^{n-1} f(1 + r) P_{[X_i=1]}([R_i = r]) = \sum_{r=0}^{n-1} f(1 + r) P([Z_i = r]) \\ &= E(f(1 + Z_i)) \end{aligned}$$

(sommes finies, donc existence assurée). Ainsi, par linéarité, croissance de l'espérance et l'inégalité précédente appliquée en chaque ω avec $\ell = 1 + W_n(\omega)$ et $j = 1 + Z_i(\omega)$:

$$\begin{aligned} |E(f(1 + W_n)) - E(f(1 + R_i) / [X_i = 1])| &= |E(f(1 + W_n) - f(1 + Z_i))| \\ &\leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda_n} \right) E(|W_n - Z_i|) \end{aligned}$$

où $E(|W_n - Z_i|)$ existe car $|W_n - Z_i| \leq W_n + Z_i$ et ces deux variables positives admettent une espérance. En multipliant par $p_i \geq 0$, en sommant et en utilisant 1) b) et l'inégalité triangulaire :

Conclusion

$$|f(\ell) - f(j)| \leq |\ell - j| \min \left(1, \frac{1}{\lambda_n} \right) \text{ et}$$

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda_n} \right) \times \sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|).$$

b) On calcule $E(Z_i)$ à l'aide de la loi conditionnelle, puis on reconnaît la variance de W_n .

Comme $W_n \geq Z_i$, $|W_n - Z_i| = W_n - Z_i$ et $E(|W_n - Z_i|) = E(W_n) - E(Z_i)$, avec

$$E(W_n) = \sum_j p_j = \lambda_n.$$

Puisque Z_i a la même loi que R_i sous $P_{[X_i=1]}$, et par le rappel initial :

$$E(Z_i) = E(R_i/[X_i = 1]) = \frac{E(R_i \mathbf{1}_{[X_i=1]})}{p_i} = \frac{E(R_i X_i)}{p_i}$$

Or $R_i X_i = (W_n - X_i)X_i = W_n X_i - X_i$ car $X_i^2 = X_i$. Donc $p_i E(Z_i) = E(W_n X_i) - p_i$ et :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|) &= \sum_{i=1}^n p_i \lambda_n - \sum_{i=1}^n (E(W_n X_i) - p_i) = \lambda_n^2 - E\left(W_n \sum_{i=1}^n X_i\right) + \lambda_n \\ &= \lambda_n - (E(W_n^2) - \lambda_n^2) \end{aligned}$$

Par la formule de Koenig-Huygens, $E(W_n^2) - \lambda_n^2 = E(W_n^2) - (E(W_n))^2 = V(W_n)$.

Conclusion

$$\sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|) = \lambda_n - V(W_n),$$

et avec a), pour toute partie A de $\mathbb{N}$:

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times (\lambda_n - V(W_n))$$

Relevé des adaptations

Aucune question n'a nécessité d'adaptation : toutes les notions utilisées (lois de Bernoulli et de Poisson, covariance, espérance conditionnelle à un événement, espérance totale, convergence en loi pour des variables à valeurs dans $\mathbb{N}$, théorème limite central, intervalle de confiance asymptotique, sommes de Riemann) figurent au programme. Le sujet est transcrit sans modification ; seules les définitions par accolades (X_i en I, relations de II.3) a) et II.4) a)) sont écrites en texte. En I.4) c), l'intervalle de confiance est obtenu en résolvant exactement l'inégalité en μ , sans remplacer μ par un estimateur dans la convergence en loi.