



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2006

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Le problème a pour objet l'étude de quelques propriétés concernant le nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n ($n \geq 1$), à coefficients réels fixés ou aléatoires.

Dans les parties II et III, les polynômes considérés sont à coefficients réels et on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

Pour toute fonction Ψ dérivable sur son domaine de définition, la dérivée de Ψ est notée Ψ' .

Les quatre parties du problème sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie I : Nombre de racines réelles d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires

On considère dans cette partie deux variables aléatoires réelles X_0 et X_1 définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi.

Pour tout ω de Ω , on considère le polynôme Q_ω d'indéterminée y , défini par :

$$Q_\omega(y) = y^2 + X_1(\omega)y + X_0(\omega)$$

On désigne par $M(\omega)$ le nombre de racines réelles de Q_ω .

- 1) Exprimer $M(\omega)$ en fonction du signe du réel $X_1(\omega)^2 - 4X_0(\omega)$. En admettant que $X_1^2 - 4X_0$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, en déduire que l'application M , qui à tout ω de Ω associe $M(\omega)$, est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- 2) Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in]0, 1[$). On suppose dans cette question que X_0 et X_1 suivent la même loi que $2Z - 1$.
 - a) Déterminer la loi de X_0 .

- b)** Déterminer la loi de M et calculer son espérance $E(M)$.

Dans les questions suivantes, on suppose que X_0 et X_1 suivent une même loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose $Y_0 = -4X_0$, $Y_1 = X_1^2$, $Y = Y_1 + Y_0$, et on note F_{Y_0} , F_{Y_1} et F_Y les fonctions de répartition de Y_0 , Y_1 et Y respectivement.

- 3)** Montrer que l'on a, pour tout x réel :

$$F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_{Y_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ e^{x/8} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En déduire l'expression d'une densité f_{Y_0} de Y_0 et d'une densité f_{Y_1} de Y_1 .

- 4)** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{4} + \sqrt{t} \right) \right]$, où $\exp$ désigne la fonction exponentielle.

- a)** Établir la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} g(t) dt$.

- b)** En déduire qu'une densité f_Y de la variable aléatoire Y est donnée, pour tout x réel, par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{32} e^{x/8} \int_0^{+\infty} g(t) dt & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{32} e^{x/8} \int_x^{+\infty} g(t) dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 5)** On désigne par Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

- a)** Justifier la validité du changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} g(t) dt$.

- b) En déduire que $\int_0^{+\infty} g(t) dt = 4\sqrt{e} \int_1^{+\infty} e^{-v^2/2} dv$, et donner, pour tout réel x négatif, l'expression de $f_Y(x)$ en fonction de Φ .
- c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a :

$$f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8} e^{x/8} \left[1 - \Phi \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1 \right) \right]$$

- d) Déterminer la loi de M et son espérance $E(M)$ (on fera intervenir le nombre $\Phi(1)$).

Partie II : Suites de Sturm

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, et soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ un polynôme normalisé ($a_n = 1$) donné, à coefficients réels. On suppose que toutes les racines réelles de P sont simples.

L'objectif de cette partie est de décrire un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de P appartenant à un intervalle donné $[a, b]$.

On associe au polynôme P la suite $(R_i)_{i \geq 0}$ de polynômes définie de la manière suivante : $R_0 = P$, $R_1 = -P'$, et pour tout entier j tel que $R_{j+1} \neq 0$, le polynôme R_{j+2} est l'opposé du reste de la division euclidienne de R_j par R_{j+1} . Si $R_{j+1} = 0$, on pose $R_{j+2} = 0$.

- 1) Montrer qu'il existe un entier k ($k \geq 2$) tel que $R_k = 0$. On note R_m ($m \geq 1$) le dernier polynôme non nul de la suite $(R_i)_{i \geq 0}$.

Dans toute cette partie, on pose :

$$\begin{aligned} R_0 &= S_1 R_1 - R_2, & R_1 &= S_2 R_2 - R_3, & \dots, & & R_{m-2} &= S_{m-1} R_{m-1} - R_m, & R_{m-1} \\ &= S_m R_m \end{aligned}$$

- 2) a) Montrer que s'il existe un entier j de $\llbracket 0, m-1 \rrbracket$ et un réel x_0 tels que $R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0) = 0$, alors $P(x_0) = P'(x_0) = 0$.

- b)** En déduire que le polynôme R_m n'admet pas de racine réelle.
- c)** Soit j un entier de $\llbracket 1, m-1 \rrbracket$. Montrer que si x_0 est une racine réelle de R_j , alors $R_{j-1}(x_0) \times R_{j+1}(x_0) < 0$.
- 3)** Soit $s = (s_1, s_2, \dots, s_t)$ une t -liste ($t \geq 2$) de nombres réels non tous nuls. On ôte de s tous les éléments nuls en préservant l'ordre, et on obtient ainsi une p -liste ($p \leq t$) $\hat{s} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_p)$. On appelle nombre de changements de signe de s le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par :

$$\mathcal{E} = \{i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket / \hat{s}_i \hat{s}_{i+1} < 0\}$$

Si $p = 1$, on dit que le nombre de changements de signe est nul.

Par exemple, si $s = (0, 3, 0, 5, -3, 2)$, on a $\hat{s} = (3, 5, -3, 2)$, et le nombre de changements de signe est égal à 2.

Pour tout réel x , on note respectivement $C_1(x)$, $C_2(x)$ et $C(x)$ le nombre de changements de signe du couple $(R_0(x), R_1(x))$, de la m -liste $(R_1(x), R_2(x), \dots, R_m(x))$, et de la $(m+1)$ -liste $(R_0(x), R_1(x), R_2(x), \dots, R_m(x))$.

On désigne par x_0 une racine réelle du polynôme P .

- a)** En étudiant les variations de P au voisinage de x_0 , montrer qu'il existe un réel $\delta_1 > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta_1[$, on a : $C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h) = 1$.
- b)** À l'aide de la question 2) c), montrer qu'il existe un réel $\delta_2 > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta_2[$, on a : $C_2(x_0 + h) = C_2(x_0 - h)$ (on distinguera les deux éventualités : soit x_0 n'est racine d'aucun des polynômes $R_1, R_2, \dots, R_m$, soit il existe un entier j de $\llbracket 1, m-1 \rrbracket$ tel que $R_j(x_0) = 0$).
- c)** Dédurre des deux questions précédentes que pour $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ et $h \in]0, \delta[$, on a $C(x_0 + h) - C(x_0 - h) = 1$, et que si a et b sont deux réels qui ne sont pas racines de

P et qui vérifient $a < b$, alors le nombre de racines réelles de P dans $[a, b]$ est égal à $C(b) - C(a)$.

4) a) Soit α une racine réelle de P . Montrer que si $|\alpha| \geq 1$, alors

$$|\alpha|^n \leq |\alpha|^{n-1} \times \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|.$$

En déduire, pour toute racine réelle α de P , l'inégalité :

$$|\alpha| \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$$

b) Écrire en français un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de P .

5) On représente une suite finie de réels par une liste Python T . On rappelle que $\text{len}(T)$ renvoie le nombre d'éléments de la liste T et que, si n désigne ce nombre, les éléments de T sont $T[0], T[1], \dots, T[n-1]$.

Écrire une fonction Python, d'en-tête `def nbchgs(T) :`, qui renvoie le nombre de changements de signe dans la suite de réels $(T[0], T[1], \dots, T[n-1])$.

On tiendra compte du fait que la liste T peut contenir des éléments nuls. La fonction `nbchgs` n'utilisera que la liste T et aucune autre liste auxiliaire. On expliquera en français la démarche utilisée.

Partie III : Un majorant du nombre de racines réelles de P

Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V(X) = v_m X^m + v_{m-1} X^{m-1} + \dots + v_1 X + v_0$, avec $v_m \neq 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On note V^* le polynôme réciproque du polynôme V , défini par :

$$V^*(X) = v_0 X^m + v_1 X^{m-1} + \dots + v_{m-1} X + v_m$$

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'application T qui, à tout polynôme P de degré n à coefficients réels, associe le polynôme $T(P)$ défini par $T(P)(X) = XP'(X)$; on remarquera que $T(P)$ est encore de degré n .

Pour tout polynôme P non nul, on désigne par $N_0(P)$ le nombre de racines non nulles de P dans l'intervalle $[-1, 1]$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, par $N_1(P)$ le nombre de racines de P dans $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, et par $N(P)$ le nombre de racines réelles de P comptées avec leurs ordres de multiplicité.

Dans les questions 1) et 2), P désigne un polynôme de degré n à coefficients réels.

1) a) Établir, à l'aide du théorème de Rolle, l'inégalité : $N_1(P) \leq N_1(T(P)) + 2$.

b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose $T^k = T \circ T \circ \dots \circ T$ (k fois). Montrer que $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k$.

2) a) Montrer que pour tout réel x non nul, on a $P^*(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) Montrer que $N_1(P) = N_0(P^*)$.

Dans les questions 3) et 4), $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ est un polynôme normalisé de degré n , à coefficients réels.

3) Pour tout réel x et pour tout entier naturel k non nul, on pose :

$$Q_k(x) = 1 + a_{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k x + a_{n-2} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k x^2 + \dots + a_1 \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^k x^{n-1}$$

Montrer que $(T^k(P))^* = n^k Q_k$.

4) a) Établir, pour tout réel y de $[0, 1]$, l'inégalité : $(1 - y)e^y \leq 1$.

- b)** On admet la propriété suivante. Soit r et ρ deux réels tels que $0 < r < \rho$. Soit $U(X) = u_0 + u_1X + \dots + u_dX^d$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $U(0) \neq 0$, et soit μ un réel strictement positif tel que :

$$\sum_{i=0}^d |u_i| \rho^i \leq \mu$$

Alors le nombre de racines réelles de U comptées avec leurs ordres de multiplicité, dans l'intervalle $[-r, r]$, est majoré par le réel :

$$\frac{1}{\ln\left(\frac{\rho}{r}\right)} \times \ln\left(\frac{\mu}{|U(0)|}\right)$$

En appliquant cette propriété au polynôme Q_k avec $r = 1$ et $\rho = e^{k/n}$ ($k \in \mathbb{N}^*$), déduire des questions précédentes que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$N_1(P) \leq 2k + \frac{n}{k} \ln(L(P)), \quad \text{avec} \quad L(P) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$$

- c)** Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\psi(x) = 2x + \frac{\theta}{x}$, où θ est un paramètre réel positif.

i) Étudier les variations de ψ .

ii) Montrer que $\psi(\sqrt{\theta/2} + 1) \leq 2 + 2\sqrt{2\theta}$.

iii) En déduire l'inégalité : $N_1(P) \leq 2 + 2\sqrt{2n \ln(L(P))}$.

- d)** En supposant $a_0 \neq 0$, on démontrerait de même (et on admettra dans la suite du problème) que :

$$N_0(P) \leq 2 + 2\sqrt{2n \ln \left(\frac{L(P)}{|a_0|} \right)}$$

Conclure en donnant un majorant de $N(P)$, fonction des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

Partie IV : Nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n à coefficients aléatoires

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on considère dans cette partie les variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ , strictement positif.

Pour tout ω de Ω , on considère le polynôme Q_ω d'indéterminée y , défini par :

$$Q_\omega(y) = y^n + X_{n-1}(\omega) y^{n-1} + \dots + X_1(\omega) y + 1$$

Soit $M_n(\omega)$ le nombre de racines réelles de Q_ω . On admet que l'application $M_n : \omega \mapsto M_n(\omega)$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) On définit la variable aléatoire L_n par :

$$L_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i.$$

Soit $Z_n = L_n - 2$. Rappeler la loi de Z_n .

2) À l'aide des résultats de la partie III, montrer que pour tout ω de Ω , on a :

$$M_n(\omega) \leq 4 + 4\sqrt{2n} \times \sqrt{\ln(Z_n(\omega) + 2)}$$

- 3) Soit h une fonction de classe C^2 , concave sur $\mathbb{R}_+$. Soit W une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose l'existence des espérances $E(W)$ et $E(h(W))$.
- a) Montrer que, pour tout couple (x_0, x) de réels positifs, on a :

$$h(x) \leq h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0).$$
- b) En prenant $x_0 = E(W)$, établir l'inégalité suivante : $E(h(W)) \leq h(E(W))$.
- 4) a) Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(x) = \sqrt{\ln(x+2)}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.
- b) Soit a un réel positif. Montrer que la série de terme général $\sqrt{\ln(k+2)} \times \frac{a^k}{k!}$ est convergente.
- 5) a) Prouver l'existence de l'espérance $E(M_n)$.
- b) Montrer que, pour tout réel β strictement supérieur à $\frac{1}{2}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(M_n)}{n^\beta} = 0$$