



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

2006

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Pour tous entiers $p, q \geq 1$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels. La transposée d'une matrice A est notée A^T .

Pour tout $n \geq 1$, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire euclidien canonique, noté $\langle X, Y \rangle = Y^T X$. Pour $X = (x_0, \dots, x_{n-1})^T$, sa norme est

$$\|X\| = \sqrt{X^T X} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 \right)^{1/2}.$$

L'objet du problème est l'étude de la matrice de Hilbert $H_n = (h_{k,j}^{(n)}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, de terme générique $h_{k,j}^{(n)} = 1/(k+j-1)$ pour $1 \leq k, j \leq n$. Ainsi,

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

Préliminaire

La restriction de la fonction tangente à $] -\pi/2, \pi/2[$ admet une fonction réciproque notée $\arctan$; on note $(\arctan)'$ sa dérivée.

1. (a) Pour tout réel x , rappeler l'expression de $(\arctan)'(x)$.
1. (b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$.
1. (c) Établir, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq \arctan x \leq x$.
2. (a) Montrer que $\psi(x) = 1/(\pi(1+x^2))$, définie sur $\mathbb{R}$, est une densité de probabilité.

2. (b) Soit U une variable aléatoire réelle de densité ψ , et F sa fonction de répartition. Déterminer la loi de $F(U)$.
2. (c) La commande `np.random.random()` renvoie un nombre aléatoire uniforme dans $[0, 1[$. Écrire en Python une fonction Cauchy simulant U . On peut utiliser `np.tan(a)`, qui renvoie la tangente de l'angle a exprimé en radians, et `np.pi`, qui représente π . Si le tirage uniforme vaut 0, on effectuera un nouveau tirage avant d'appliquer la transformation.

Partie I. Dimension du sous-espace propre associé à la plus grande valeur propre de H_n

1. Calculer, pour tout $(k, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $\int_0^1 t^{k+j-2} dt$. En déduire, pour tout $X = (x_0, \dots, x_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$,

$$X^T H_n X = \int_0^1 (x_0 + x_1 t + \dots + x_{n-1} t^{n-1})^2 dt.$$
2. (a) Justifier l'existence d'une matrice diagonale D à coefficients diagonaux strictement positifs et d'une matrice P vérifiant $P^T P = I_n$ telles que $H_n = P D P^T$.
2. (b) On désigne par α_n et β_n la plus petite et la plus grande valeur propre de H_n . Montrer, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha_n \|X\|^2 \leq X^T H_n X \leq \beta_n \|X\|^2.$$
3. On note $\mathcal{V}$ le sous-espace propre de H_n associé à β_n .
3. (a) Soit $Y \in \mathcal{V}$. Montrer que $Y^T H_n Y = \beta_n \|Y\|^2$.
3. (b) Réciproquement, soit $Y \neq 0$ vérifiant $Y^T H_n Y = \beta_n \|Y\|^2$. Montrer que $Y \in \mathcal{V}$.

4. Soit $X_0 = (x_0, \dots, x_{n-1})^T$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$. On note $|X_0| = (|x_0|, \dots, |x_{n-1}|)^T$.
4. (a) Établir $|X_0|^T H_n |X_0| \geq X_0^T H_n X_0$.
4. (b) En déduire que $|X_0| \in \mathcal{V}$.
4. (c) Montrer que les composantes de $H_n |X_0|$ sont toutes strictement positives. En déduire que X_0 n'a aucune composante nulle.
4. (d) En utilisant $X_0^T H_n X_0 = |X_0|^T H_n |X_0|$, montrer que les composantes de X_0 sont toutes de même signe.
5. (a) Montrer qu'il n'existe pas deux vecteurs non nuls de $\mathcal{V}$ orthogonaux.
5. (b) En déduire la dimension de $\mathcal{V}$.

Partie II. Croissance et convergence de la suite $(\beta_n)_{n \geq 1}$

On rappelle que β_n est la plus grande valeur propre de H_n .

1. Soit $X' = (x'_0, \dots, x'_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de H_n associé à β_n . Soit $Z = (x'_0, \dots, x'_{n-1}, 0)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que $Z^T H_{n+1} Z = (X')^T H_n X'$. En déduire que (β_n) est croissante.
2. Pour un polynôme réel

$$P(X) = \sum_{r=0}^m a_r X^r,$$

on définit les deux fonctions réelles

$$C_P(\theta) = \sum_{r=0}^m a_r \cos(r\theta), \quad S_P(\theta) = \sum_{r=0}^m a_r \sin(r\theta).$$

2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, calculer les quatre intégrales $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\theta) d\theta$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\theta) d\theta$, $\int_0^{\pi} \cos(k\theta) d\theta$ et $\int_0^{\pi} \sin(k\theta) d\theta$.

2. (b) Montrer, pour tout entier $p \geq 0$, $\int_{-1}^1 x^p dx = \int_0^{\pi} \sin((p+1)\theta) d\theta$.

2. (c) En déduire, pour tout polynôme réel P , l'égalité

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = \int_0^{\pi} (C_P(\theta) \sin \theta + S_P(\theta) \cos \theta) d\theta.$$

2. (d) Établir, pour tout polynôme réel P ,

$$\left| \int_{-1}^1 P(x) dx \right| \leq \int_0^{\pi} \sqrt{C_P(\theta)^2 + S_P(\theta)^2} d\theta.$$

Dans les questions 3 et 4, $X = (x_0, \dots, x_{n-1})^T$ désigne un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$. On pose

$$R(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k,$$

$$C_X(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cos(k\theta)$$

et

$$S_X(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \sin(k\theta).$$

3. (a) Établir $0 \leq X^T H_n X \leq \int_{-1}^1 R(t)^2 dt$.
3. (b) En déduire $0 \leq X^T H_n X \leq \int_0^\pi (C_X(\theta)^2 + S_X(\theta)^2) d\theta$. On pourra établir, à l'aide des formules d'addition, $C_{R^2} = C_X^2 - S_X^2$ et $S_{R^2} = 2C_X S_X$.
4. (a) Soit $\varphi(\theta) = C_X(\theta)^2 + S_X(\theta)^2$. Montrer que φ est 2π -périodique et paire, puis que $\int_0^\pi \varphi(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \varphi(\theta) d\theta$.
4. (b) Établir $X^T H_n X \leq \pi \|X\|^2$.
4. (c) En déduire que (β_n) est majorée, puis qu'elle converge.

Partie III. Limite de la suite $(\beta_n)_{n \geq 1}$

Dans cette partie, $W \in \mathbb{R}^n$ est défini par $W = (1, 1/\sqrt{2}, \dots, 1/\sqrt{n})^T$.

1. Montrer les égalités

$$W^T H_n W = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} \sqrt{j} (k+j-1)} = \int_0^1 \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{t^{\ell-1}}{\sqrt{\ell}} \right)^2 dt.$$

2. En déduire, pour $n \geq 2$,

$$W^T H_n W \geq \sum_{p=2}^n \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{p-k}}.$$

On pourra utiliser le développement du produit de deux polynômes.

Dans les questions suivantes, p est un entier supérieur ou égal à 2.

3. (a) Étudier les variations de $g(x) = 1/\sqrt{x(p-x)}$ sur $]0, p[$.

3. (b) En déduire, quelle que soit la parité de p ,

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k(p-k)}} \geq \int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}}.$$

4. Justifier la validité du changement de variable $x = p/(1+t^2)$ dans l'intégrale précédente et établir

$$\int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}} = \pi - 4 \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{p-1}} \right).$$

5. On pose $u_p = \frac{1}{p-1} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{p-1}} \right)$. Montrer que la série de terme général u_p converge.

6. (a) Montrer que $\|W\|^2 \sim \ln n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

6. (b) En déduire la limite de (β_n) .