



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2006

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Partie I : Nombre de racines réelles d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires

- 1) Question adaptée au programme actuel : la mesurabilité n'étant pas au programme, on admet que $\Delta = X_1^2 - 4X_0$ est une variable aléatoire et l'on en déduit que M en est une.

Pour $\omega \in \Omega$, Q_ω est un trinôme du second degré à coefficients réels, de discriminant $\Delta(\omega) = X_1(\omega)^2 - 4X_0(\omega)$. D'après le cours sur les polynômes du second degré :

- si $\Delta(\omega) > 0$, Q_ω admet deux racines réelles distinctes, donc $M(\omega) = 2$;
- si $\Delta(\omega) = 0$, Q_ω admet une racine réelle double, comptée une fois : $M(\omega) = 1$;
- si $\Delta(\omega) < 0$, Q_ω n'admet aucune racine réelle, donc $M(\omega) = 0$.

Ainsi $M(\Omega) \subset \{0, 1, 2\}$ et :

$$[M = 2] = [\Delta > 0], \quad [M = 1] = [\Delta = 0], \quad [M = 0] = [\Delta < 0]$$

Comme Δ est une variable aléatoire, ces trois ensembles sont des événements de $\mathcal{A}$.

Conclusion

M est une variable aléatoire discrète finie, à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$, et $M = 2 \cdot \mathbf{1}_{[\Delta > 0]} + \mathbf{1}_{[\Delta = 0]}$.

Remarque : si l'on comptait la racine double deux fois, seule la valeur prise sur $[\Delta = 0]$ changerait ; dans les questions 2) et 5), cet événement est de probabilité nulle, de sorte que la loi de M n'en dépend pas.

- 2) a) Z prend les valeurs 0 et 1, donc $2Z - 1$ prend les valeurs -1 et 1 , avec
 $P([2Z - 1 = 1]) = P([Z = 1]) = p$ et $P([2Z - 1 = -1]) = P([Z = 0]) = 1 - p$.
 Comme X_0 a la même loi que $2Z - 1$:

Conclusion

$$X_0(\Omega) = \{-1, 1\}, P([X_0 = 1]) = p \text{ et } P([X_0 = -1]) = 1 - p.$$

- b) X_1 a la même loi, donc X_1 prend presque sûrement ses valeurs dans $\{-1, 1\}$ et
 $X_1^2 = 1$ presque sûrement. Ainsi $\Delta = 1 - 4X_0$ presque sûrement :

- sur $[X_0 = 1]$, $\Delta = -3 < 0$, donc $M = 0$;
- sur $[X_0 = -1]$, $\Delta = 5 > 0$, donc $M = 2$.

Par conséquent $P([M = 0]) = P([X_0 = 1]) = p$, $P([M = 2]) = P([X_0 = -1]) = 1 - p$ et
 $P([M = 1]) = 0$. La variable M est finie, donc admet une espérance :

$$E(M) = 0 \times p + 2 \times (1 - p) = 2(1 - p)$$

Conclusion

M prend les valeurs 0 et 2 avec les probabilités p et $1 - p$, et $E(M) = 2(1 - p)$.
 (L'indépendance de X_0 et X_1 n'a pas servi ici.)

- 3) Rappelons que si X suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$, alors $P([X < 0]) = 0$,
 $P([X = c]) = 0$ pour tout réel c , et $P([X > t]) = e^{-t/2}$ pour tout $t \geq 0$.

Fonction de répartition de $Y_1 = X_1^2$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$, $[X_1^2 \leq x] = \emptyset$, donc $F_{Y_1}(x) = 0$.

- Si $x = 0$, $[X_1^2 \leq 0] = [X_1 = 0]$, de probabilité nulle : $F_{Y_1}(0) = 0$.
- Si $x > 0$, $[X_1^2 \leq x] = [-\sqrt{x} \leq X_1 \leq \sqrt{x}]$, et comme $P([X_1 < -\sqrt{x}]) = 0$:

$$F_{Y_1}(x) = P([X_1 \leq \sqrt{x}]) = 1 - P([X_1 > \sqrt{x}]) = 1 - e^{-\sqrt{x}/2}$$

Fonction de répartition de $Y_0 = -4X_0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $[-4X_0 \leq x] = [X_0 \geq -x/4]$.

- Si $x \geq 0$, $-x/4 \leq 0$ et $P([X_0 \geq -x/4]) \geq P([X_0 \geq 0]) = 1$, donc $F_{Y_0}(x) = 1$.
- Si $x < 0$, $-x/4 > 0$ et

$$F_{Y_0}(x) = P([X_0 > -x/4]) + P([X_0 = -x/4]) = e^{-(x/4)/2} = e^{x/8}.$$

Les deux expressions annoncées sont établies.

Densités. La fonction F_{Y_1} est continue sur $\mathbb{R}^*$ (expressions continues), et continue en 0 car $1 - e^{-\sqrt{x}/2} \rightarrow 1 - e^0 = 0$ quand $x \rightarrow 0^+$. Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Donc Y_1 est une variable à densité, et une densité s'obtient en dérivant F_{Y_1} sur $\mathbb{R}^*$, la valeur en 0 étant arbitraire. Pour $x > 0$, $\frac{d}{dx} \left(-\frac{\sqrt{x}}{2} \right) = -\frac{1}{4\sqrt{x}}$, donc :

$$f_{Y_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

De même, F_{Y_0} est continue sur $\mathbb{R}$ (en 0, $e^{x/8} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0^-$) et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, donc :

$$f_{Y_0}(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} e^{x/8} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Conclusion

les fonctions de répartition sont celles de l'énoncé, et f_{Y_1} , f_{Y_0} ci-dessus sont des densités de Y_1 et Y_0 .

4) a) La fonction g est continue et positive sur $]0, +\infty[$; l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$. On écrit $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t/8} e^{-\sqrt{t}/2}$.

- Sur $]0, 1]$: $0 \leq g(t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ car les deux exponentielles sont majorées par 1. L'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}}$ converge ($\frac{1}{2} < 1$), donc par comparaison de fonctions positives $\int_0^1 g(t) dt$ converge.
- Sur $[1, +\infty[$: $0 \leq g(t) \leq e^{-t/8}$ car $\frac{1}{\sqrt{t}} \leq 1$ et $e^{-\sqrt{t}/2} \leq 1$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t/8} dt$ converge (intégrale de référence de type exponentiel), donc $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ converge.

Conclusion

l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge.

b) Les variables X_0 et X_1 sont indépendantes, donc $Y_0 = -4X_0$ et $Y_1 = X_1^2$, fonctions respectivement de X_0 et de X_1 , sont indépendantes. Elles admettent les densités f_{Y_0} et f_{Y_1} de la question 3), et f_{Y_0} est bornée (par $\frac{1}{8}$).

On utilise le résultat du cours sur la convolution : si U et V sont deux variables à densité indépendantes, de densités f_U et f_V , l'une des deux étant bornée, alors $U + V$ admet pour densité la fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x - t) dt$. Ici, une densité de $Y = Y_1 + Y_0$ est donc :

$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(t) f_{Y_0}(x-t) dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Le produit $f_{Y_1}(t)f_{Y_0}(x-t)$ est non nul si et seulement si $t > 0$ et $x-t < 0$, c'est-à-dire $t > \max(0, x)$. Pour un tel t :

$$f_{Y_1}(t) f_{Y_0}(x-t) = \frac{1}{4\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}/2} \times \frac{1}{8} e^{(x-t)/8} = \frac{1}{32} e^{x/8} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t/8-\sqrt{t}/2} = \frac{1}{32} e^{x/8} g(t)$$

car $-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{4} + \sqrt{t} \right) = -\frac{t}{8} - \frac{\sqrt{t}}{2}$. Par conséquent :

$$f_Y(x) = \frac{1}{32} e^{x/8} \int_{\max(0, x)}^{+\infty} g(t) dt$$

et ces intégrales convergent d'après a) (pour $x \geq 0$, $\int_x^{+\infty} g$ est le reste d'une intégrale convergente).

Conclusion

$f_Y(x) = \frac{1}{32} e^{x/8} \int_0^{+\infty} g(t) dt$ si $x < 0$ et $f_Y(x) = \frac{1}{32} e^{x/8} \int_x^{+\infty} g(t) dt$ si $x \geq 0$ définit une densité de Y .

- 5) a) La fonction $u \mapsto u^2$ est de classe C^1 et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, et réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$: c'est exactement le cadre du changement de variable dans une intégrale impropre. Pour le justifier à partir du cas des segments, soit $0 < \varepsilon < A$. Le changement de variable $t = u^2$, $dt = 2u du$, sur le segment $[\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{A}]$ donne :

$$\int_{\varepsilon}^A g(t) dt = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{A}} g(u^2) 2u du = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{A}} \frac{1}{u} e^{-u^2/8-u/2} 2u du = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{A}} 2 e^{-u^2/8-u/2} du$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et $A \rightarrow +\infty$, on a $\sqrt{\varepsilon} \rightarrow 0^+$ et $\sqrt{A} \rightarrow +\infty$; le membre de gauche a une limite finie d'après 4) a), donc le membre de droite aussi.

Conclusion

le changement de variable $u = \sqrt{t}$ est valide et $\int_0^{+\infty} g(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2/8 - u/2} du$, cette dernière intégrale étant convergente.

b) On met l'exposant sous forme canonique :

$$-\frac{u^2}{8} - \frac{u}{2} = -\frac{u^2 + 4u}{8} = -\frac{(u+2)^2 - 4}{8} = -\frac{(u+2)^2}{8} + \frac{1}{2}$$

donc $\int_0^{+\infty} g(t) dt = 2\sqrt{e} \int_0^{+\infty} e^{-(u+2)^2/8} du$. Le changement de variable affine

$v = \frac{u+2}{2}$, $du = 2 dv$, envoie $]0, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = 4\sqrt{e} \int_1^{+\infty} e^{-v^2/2} dv$$

La fonction $v \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2}$ est une densité de la loi normale centrée réduite, d'intégrale

1 sur $\mathbb{R}$, et $\Phi(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^1 e^{-v^2/2} dv$. Donc :

$$\int_1^{+\infty} e^{-v^2/2} dv = \sqrt{2\pi} (1 - \Phi(1)) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} g(t) dt = 4\sqrt{2\pi e} (1 - \Phi(1))$$

D'après 4) b), pour $x < 0$:

$$f_Y(x) = \frac{1}{32} e^{x/8} \times 4\sqrt{2\pi e} (1 - \Phi(1)) = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8} e^{x/8} (1 - \Phi(1))$$

Conclusion

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = 4\sqrt{e} \int_1^{+\infty} e^{-v^2/2} dv \text{ et, pour tout } x < 0, \quad f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8} e^{x/8} (1 - \Phi(1)).$$

c) Pour $x = 0$, le résultat découle de b), puisque $\int_0^{+\infty} g = 4\sqrt{2\pi e}(1 - \Phi(1))$ et

$\frac{\sqrt{0}}{2} + 1 = 1$. Soit $x > 0$. Le même raisonnement qu'en a), sur des segments $[x, A]$ puis avec $A \rightarrow +\infty$ (ici seule la borne $+\infty$ est impropre), donne :

$$\int_x^{+\infty} g(t) dt = 2 \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-u^2/8 - u/2} du = 2\sqrt{e} \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-(u+2)^2/8} du = 4\sqrt{e} \int_{\frac{\sqrt{x}}{2} + 1}^{+\infty} e^{-v^2/2} dv$$

avec le même changement de variable affine $v = \frac{u+2}{2}$. Comme en b),

$$\int_c^{+\infty} e^{-v^2/2} dv = \sqrt{2\pi}(1 - \Phi(c)) \text{ pour tout réel } c, \text{ d'où :}$$

$$f_Y(x) = \frac{1}{32} e^{x/8} \times 4\sqrt{e} \sqrt{2\pi} \left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1\right) \right] = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8} e^{x/8} \left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1\right) \right]$$

Conclusion

$$\text{pour tout } x \geq 0, \quad f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8} e^{x/8} \left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1\right) \right].$$

d) Le discriminant de Q_ω est $\Delta = X_1^2 - 4X_0 = Y_1 + Y_0 = Y$. D'après 1),

$$[M = 0] = [Y < 0], [M = 1] = [Y = 0] \text{ et } [M = 2] = [Y > 0].$$

Comme Y est à densité, $P([Y = 0]) = 0$. Ensuite, par 5) b) :

$$P([Y < 0]) = \int_{-\infty}^0 f_Y(x) dx = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8} (1 - \Phi(1)) \int_{-\infty}^0 e^{x/8} dx = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8} (1 - \Phi(1)) \times 8$$

$$= \sqrt{2\pi e} (1 - \Phi(1))$$

car $\int_{-\infty}^0 e^{x/8} dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} [8e^{x/8}]_B^0 = 8$. Enfin $P([Y > 0]) = 1 - P([Y < 0]) - P([Y = 0])$.

La variable M est finie, donc admet une espérance, $E(M) = 2P([M = 2])$.

Conclusion

$M(\Omega) = \{0, 2\}$ presque sûrement, avec

$$P([M = 0]) = \sqrt{2\pi e} (1 - \Phi(1)), \quad P([M = 1]) = 0, \quad P([M = 2]) = 1 - \sqrt{2\pi e} (1 - \Phi(1))$$

et $E(M) = 2 - 2\sqrt{2\pi e} (1 - \Phi(1))$. Numériquement, $P([M = 0]) \approx 0,656$ et $E(M) \approx 0,689$ (valeurs confirmées par une simulation de Monte-Carlo, qui ne constitue pas une preuve).

Partie II : Suites de Sturm

- 1) Le polynôme P est de degré $n \geq 1$, donc $R_0 = P \neq 0$ et $R_1 = -P'$ est de degré $n - 1$, de coefficient dominant $-n \neq 0$: $R_1 \neq 0$.

Si $R_{j+1} \neq 0$, le reste de la division euclidienne de R_j par R_{j+1} est de degré strictement inférieur à $\deg R_{j+1}$, donc R_{j+2} est nul ou vérifie $\deg R_{j+2} < \deg R_{j+1}$. Si, par l'absurde, tous les R_i étaient non nuls, la suite $(\deg R_i)_{i \geq 1}$ serait une suite d'entiers naturels strictement décroissante, ce qui est impossible. Il existe donc un indice k tel que $R_k = 0$, et $k \geq 2$ puisque R_0 et R_1 sont non nuls.

Enfin, si $R_k = 0$, alors $R_{k+1} = 0$ par convention, puis tous les termes suivants sont nuls. Notons k_0 le plus petit indice tel que $R_{k_0} = 0$; alors $m = k_0 - 1 \geq 1$, les polynômes $R_0, \dots, R_m$ sont non nuls et $R_i = 0$ pour $i > m$.

Pour $0 \leq j \leq m - 1$, en notant S_{j+1} le quotient de la division euclidienne de R_j par R_{j+1} , on a $R_j = S_{j+1}R_{j+1} - R_{j+2}$, avec $R_{m+1} = 0$, ce qui justifie les relations de l'énoncé.

Conclusion

il existe $k \geq 2$ tel que $R_k = 0$, et le dernier polynôme non nul R_m vérifie $m \geq 1$.

- 2) a) On raisonne par récurrence descendante. Soit $j \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ et x_0 tel que $R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0) = 0$. Si $j = 0$, on a directement $P(x_0) = 0$ et $P'(x_0) = -R_1(x_0) = 0$. Si $j \geq 1$, la relation $R_{j-1} = S_j R_j - R_{j+1}$ donne :

$$R_{j-1}(x_0) = S_j(x_0)R_j(x_0) - R_{j+1}(x_0) = 0$$

donc $R_{j-1}(x_0) = R_j(x_0) = 0$: la propriété passe de l'indice j à l'indice $j-1$. Après j étapes, on obtient $R_0(x_0) = R_1(x_0) = 0$.

Conclusion

$P(x_0) = P'(x_0) = 0$.

- b) Supposons par l'absurde que R_m admette une racine réelle x_0 . Comme $R_{m-1} = S_m R_m$, on a aussi $R_{m-1}(x_0) = 0$. La question a) avec $j = m-1 \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ donne $P(x_0) = P'(x_0) = 0$, donc x_0 est une racine au moins double de P , ce qui contredit l'hypothèse que les racines réelles de P sont simples.

Conclusion

R_m n'admet pas de racine réelle.

- c) Soit $j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ et x_0 une racine réelle de R_j . La relation $R_{j-1} = S_j R_j - R_{j+1}$ donne $R_{j-1}(x_0) = -R_{j+1}(x_0)$, d'où :

$$R_{j-1}(x_0) \times R_{j+1}(x_0) = -R_{j+1}(x_0)^2 \leq 0$$

Si l'on avait $R_{j+1}(x_0) = 0$, on aurait $R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0) = 0$ avec $j \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, donc $P(x_0) = P'(x_0) = 0$ par a), ce qui est exclu comme en b). Donc $R_{j+1}(x_0) \neq 0$.

Conclusion

$$R_{j-1}(x_0) \times R_{j+1}(x_0) < 0.$$

3) Remarque préliminaire, utilisée plusieurs fois : si une liste $(s_1, \dots, s_t)$ ne contient aucun élément nul, son nombre de changements de signe est le nombre d'indices $i \in \llbracket 1, t-1 \rrbracket$ tels que $s_i s_{i+1} < 0$; il s'obtient donc en additionnant les contributions des couples consécutifs.

a) Comme x_0 est une racine simple de P , $P'(x_0) \neq 0$. Notons $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ le signe de $P'(x_0)$. Par continuité de P' , il existe $\delta_1 > 0$ tel que P' soit du signe strict ε sur $]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$. Sur cet intervalle, P est strictement monotone (strictement croissante si $\varepsilon = 1$, décroissante si $\varepsilon = -1$) et s'annule en x_0 .

Soit $h \in]0, \delta_1[$. Alors :

- $P(x_0 + h)$ est du signe de ε et $P(x_0 - h)$ du signe de $-\varepsilon$;
- $R_1(x_0 \pm h) = -P'(x_0 \pm h)$ est du signe de $-\varepsilon$.

Le couple $(R_0(x_0 + h), R_1(x_0 + h))$ a des signes $(\varepsilon, -\varepsilon)$: un changement de signe. Le couple $(R_0(x_0 - h), R_1(x_0 - h))$ a des signes $(-\varepsilon, -\varepsilon)$: aucun changement de signe.

Conclusion

$$\text{pour tout } h \in]0, \delta_1[, C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h) = 1 - 0 = 1.$$

b) Notons $J = \{j \in \llbracket 1, m \rrbracket / R_j(x_0) = 0\}$. D'après 2) b), $m \notin J$, et $1 \notin J$ car $R_1(x_0) = -P'(x_0) \neq 0$. Donc $J \subset \llbracket 2, m-1 \rrbracket$. De plus, deux éléments de J ne sont jamais consécutifs : si j et $j+1$ étaient dans J , la question 2) a) donnerait $P'(x_0) = 0$.

Les polynômes $R_1, \dots, R_m$ sont non nuls, donc n'ont qu'un nombre fini de racines. Par continuité, on peut choisir $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[$ avec $x \neq x_0$:

- $R_i(x) \neq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$;

- $R_i(x)$ est du signe de $R_i(x_0)$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket \setminus J$.

Pour un tel x , la liste $(R_1(x), \dots, R_m(x))$ ne contient aucun zéro, donc $C_2(x)$ est le nombre de couples consécutifs $(R_i(x), R_{i+1}(x))$, $1 \leq i \leq m-1$, de produit négatif.

Premier cas : x_0 n'est racine d'aucun des polynômes $R_1, \dots, R_m$ ($J = \emptyset$). Chaque produit $R_i(x)R_{i+1}(x)$ a le signe de $R_i(x_0)R_{i+1}(x_0)$, qui ne dépend pas de x . Donc $C_2(x_0 + h) = C_2(x_0 - h)$ pour $h \in]0, \delta_2[$.

Second cas : il existe $j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ tel que $R_j(x_0) = 0$ ($J \neq \emptyset$). Comme deux éléments de J ne sont pas consécutifs et que $J \subset \llbracket 2, m-1 \rrbracket$, on répartit les couples consécutifs en deux familles :

- les couples (R_i, R_{i+1}) avec $i \notin J$ et $i+1 \notin J$: leur contribution a le signe de $R_i(x_0)R_{i+1}(x_0)$, identique en $x_0 + h$ et en $x_0 - h$;
- pour chaque $j \in J$, les deux couples (R_{j-1}, R_j) et (R_j, R_{j+1}) , où $j-1 \geq 1$ et $j+1 \leq m$ ne sont pas dans J . D'après 2) c), $R_{j-1}(x_0)$ et $R_{j+1}(x_0)$ sont non nuls et de signes contraires, donc $R_{j-1}(x)$ et $R_{j+1}(x)$ aussi. Quel que soit le signe (non nul) de $R_j(x)$, exactement un des deux produits $R_{j-1}(x)R_j(x)$ et $R_j(x)R_{j+1}(x)$ est négatif : la contribution de ces deux couples vaut 1, en $x_0 + h$ comme en $x_0 - h$.

Chaque couple consécutif appartient à exactement une de ces familles, donc $C_2(x_0 + h) = C_2(x_0 - h)$.

Conclusion

il existe $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, \delta_2[$, $C_2(x_0 + h) = C_2(x_0 - h)$.

- c) Première affirmation. Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ et $h \in]0, \delta[$. D'après a), $P(x_0 \pm h) \neq 0$, et d'après le choix de δ_2 , $R_i(x_0 \pm h) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq m$. La liste $(R_0(x), \dots, R_m(x))$ pour $x = x_0 \pm h$ ne contient donc aucun zéro, et en séparant le premier couple des suivants (remarque préliminaire) :

$$C(x) = C_1(x) + C_2(x)$$

Par a) et b) :

$$C(x_0 + h) - C(x_0 - h) = (C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h)) + (C_2(x_0 + h) - C_2(x_0 - h)) = 1 + 0 = 1.$$

Seconde affirmation. Il faut aussi examiner les points où un R_j s'annule sans que P s'annule.

Étape 1. Soit y un réel tel que $P(y) \neq 0$. Notons $J_y = \{j \in \llbracket 1, m \rrbracket / R_j(y) = 0\}$. Comme en b), $J_y \subset \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ (par 2) b)), deux éléments de J_y ne sont pas consécutifs (par 2) a), sinon $P(y) = 0$), et pour $j \in J_y$, $R_{j-1}(y)R_{j+1}(y) < 0$ (par 2) c)), où $j-1$ peut valoir 0 puisque $R_0(y) = P(y) \neq 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, pour $0 < |x - y| < \eta$, tous les $R_i(x)$ ($0 \leq i \leq m$) soient non nuls et que $R_i(x)$ ait le signe de $R_i(y)$ pour $i \notin J_y$.

- En un tel x , le raisonnement de b) appliqué à la liste complète $(R_0, \dots, R_m)$ montre que chaque bloc (R_{j-1}, R_j, R_{j+1}) , $j \in J_y$, contribue pour exactement 1, et que les autres couples contribuent comme en y .
- En y , on retire les zéros $R_j(y)$, $j \in J_y$: dans la liste réduite, $R_{j-1}(y)$ et $R_{j+1}(y)$ deviennent consécutifs et, étant de signes contraires, contribuent pour exactement 1. Les autres couples consécutifs sont les mêmes que ci-dessus.

Donc $C(y) = C(x)$ pour $0 < |x - y| < \eta$: C est constante au voisinage de y .

Étape 2. Soit $a < b$ deux réels qui ne sont pas racines de P . L'ensemble Z des racines réelles de $R_0, \dots, R_m$ est fini ; notons $z_1 < \dots < z_q$ ses éléments situés dans $]a, b[$, et $z_0 = a$, $z_{q+1} = b$. Sur chaque intervalle $]z_i, z_{i+1}[$, aucun R_l ne s'annule, donc par le théorème des valeurs intermédiaires chaque R_l y garde un signe constant : C y est constante, égale à un entier c_i .

- En a et en b , qui ne sont pas racines de P , l'étape 1 donne $C(a) = c_0$ et $C(b) = c_q$.
- En z_i ($1 \leq i \leq q$) : si $P(z_i) = 0$, la première affirmation donne $c_i - c_{i-1} = 1$; si $P(z_i) \neq 0$, l'étape 1 donne $c_i - c_{i-1} = 0$.

En sommant (somme télescopique) :

$$C(b) - C(a) = \sum_{i=1}^q (c_i - c_{i-1}) = \text{Card}\{i \in \llbracket 1, q \rrbracket / P(z_i) = 0\}$$

Or les racines de P dans $]a, b[$ sont exactement les z_i tels que $P(z_i) = 0$, et a, b ne sont pas racines de P .

Conclusion

$C(x_0 + h) - C(x_0 - h) = 1$ pour $h \in]0, \delta[$, et le nombre de racines réelles de P dans $[a, b]$ est égal à $C(b) - C(a)$.

- 4) a) Question adaptée au programme actuel : l'énoncé original portait sur une racine «réelle ou complexe»; seules les racines réelles sont considérées ici, ce qui suffit pour la suite.

Soit α une racine réelle de P avec $|\alpha| \geq 1$. De $P(\alpha) = 0$ on tire

$$\alpha^n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k,$$

donc par l'inégalité triangulaire, et puisque $|\alpha|^k \leq |\alpha|^{n-1}$ pour $0 \leq k \leq n-1$ (car $|\alpha| \geq 1$) :

$$|\alpha|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |\alpha|^k \leq |\alpha|^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$$

En divisant par $|\alpha|^{n-1} > 0$, on obtient

$$|\alpha| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| < 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|.$$

Si au contraire $|\alpha| < 1$, on a directement

$$|\alpha| < 1 \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|.$$

Conclusion

$$|\alpha|^n \leq |\alpha|^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$$

lorsque $|\alpha| \geq 1$, et toute racine réelle α de P vérifie

$$|\alpha| \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$$

(et même l'inégalité stricte).

b) Posons

$$A = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|.$$

D'après a), toute racine réelle α de P vérifie $|\alpha| < A$: toutes les racines réelles de P sont dans $] -A, A[$, et ni $-A$ ni A n'est racine de P . D'après 3) c) appliquée à $a = -A$ et $b = A$, le nombre de racines réelles de P est $C(A) - C(-A)$.

Algorithme (pour P normalisé dont les racines réelles sont simples) :

- Étape 1 : calculer $A = 1 + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|$.
- Étape 2 : construire la suite de Sturm. Poser $R_0 = P$ et $R_1 = -P'$. Tant que le dernier polynôme calculé R_{j+1} est non nul, effectuer la division euclidienne de R_j par R_{j+1} et poser R_{j+2} égal à l'opposé du reste. On obtient $R_0, R_1, \dots, R_m$.

- Étape 3 : calculer les réels $R_0(A), \dots, R_m(A)$ et compter les changements de signe de cette liste en ignorant les zéros : on obtient $C(A)$. Faire de même en $-A$ pour obtenir $C(-A)$.
- Étape 4 : renvoyer $C(A) - C(-A)$.

Conclusion

cet algorithme fournit le nombre de racines réelles de P .

- 5) Code adapté en Python. La fonction Pascal nbchgs opérant sur un tableau $T[1..n]$ est remplacée par une fonction Python opérant sur une liste T indexée de 0 à $n - 1$, où $n = \text{len}(T)$.

Démarche. On parcourt la liste une seule fois, de gauche à droite, en mémorisant dans une variable dernier la valeur du dernier élément non nul rencontré (initialement 0, ce qui signifie qu'aucun élément non nul n'a encore été rencontré). Les éléments nuls sont simplement ignorés, ce qui revient à travailler sur la liste réduite $\hat{s}$ sans la construire. Lorsqu'on rencontre un élément non nul $T[i]$, il y a un changement de signe entre lui et le précédent élément non nul si et seulement si $\text{dernier} * T[i] < 0$; ce test est faux tant que dernier vaut 0. On met ensuite dernier à jour. Seules deux variables numériques sont utilisées en plus de T , et aucune liste auxiliaire.

Python

```
def nbchgs(T):
    nb = 0                # nombre de changements de signe déjà comptés
    dernier = 0           # dernier élément non nul rencontré (0 si aucun)
    for i in range(len(T)):
        if T[i] != 0:
            if dernier * T[i] < 0:
                nb = nb + 1
            dernier = T[i]
    return nb
```

Variables : nb compte les indices de $\mathcal{E}$ déjà trouvés ; i parcourt les indices 0 à $n - 1$ (la

borne n de range est exclue). Si la liste ne contient qu'un élément non nul ($p = 1$), le test n'est jamais vrai et la fonction renvoie 0, conformément à la convention de l'énoncé.

Ce code a été exécuté : `nbchgs([0, 3, 0, 5, -3, 2])` renvoie 2, comme dans l'exemple de l'énoncé, `nbchgs([0, 0, 0])` renvoie 0, et `nbchgs([-1, 0, 0, 2, 0, -4])` renvoie 2.

Conclusion

la fonction `nbchgs` ci-dessus renvoie le nombre de changements de signe de la suite $(T[0], \dots, T[n-1])$.

Partie III : Un majorant du nombre de racines réelles de P

Préliminaire : rectification de l'énoncé. Dans le document fourni, l'application T n'est définie que sur les polynômes normalisés de degré n . Or $T(P) = XP'$ a pour coefficient dominant n , donc n'est pas normalisé si $n \geq 2$, et $T^k = T \circ \dots \circ T$ n'est alors pas défini. L'énoncé rectifié définit T sur tous les polynômes de degré n , définit N_0, N_1, N pour tout polynôme non nul, et énonce les questions 1) et 2) pour un polynôme de degré n quelconque, la normalisation n'étant utilisée qu'à partir de la question 3).

Si

$$P(X) = \sum_{j=0}^n c_j X^j$$

avec $c_n \neq 0$, alors

$$T(P)(X) = XP'(X) = \sum_{j=1}^n j c_j X^j,$$

de coefficient dominant $nc_n \neq 0$: $T(P)$ est bien de degré n .

On utilisera le fait suivant sur les multiplicités. Si a est racine de multiplicité $r \geq 1$ d'un polynôme non nul P , on écrit $P = (X - a)^r R$ avec $R(a) \neq 0$; alors

$P' = (X - a)^{r-1}(rR + (X - a)R')$, donc a est racine de P' de multiplicité au moins $r - 1$ (cette multiplicité est même exactement $r - 1$, car $rR(a) \neq 0$).

- 1) a) Notons p (respectivement q) le nombre de racines de P dans $[1, +\infty[$ (respectivement dans $] - \infty, -1]$), comptées avec leurs ordres de multiplicité, de sorte que $N_1(P) = p + q$.

Montrons que $T(P)$ admet au moins $p - 1$ racines dans $[1, +\infty[$, comptées avec multiplicité. C'est clair si $p = 0$. Si $p \geq 1$, notons $x_1 < x_2 < \dots < x_s$ les racines distinctes de P dans $[1, +\infty[$, de multiplicités $m_1, \dots, m_s$, avec $m_1 + \dots + m_s = p$.

- D'après le fait préliminaire, chaque x_i est racine de P' de multiplicité au moins $m_i - 1$.
- Pour $1 \leq i \leq s - 1$, P est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ et $P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$. Par le théorème de Rolle, il existe $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(c_i) = 0$. Les c_i sont dans $[1, +\infty[$ et distincts des x_i .

Donc P' admet dans $[1, +\infty[$ au moins

$$\sum_{i=1}^s (m_i - 1) + (s - 1) = p - 1$$

racines comptées avec multiplicité. Enfin, si $c \geq 1$ est racine de P' de multiplicité ℓ , on écrit $P' = (X - c)^\ell S$ avec $S(c) \neq 0$; alors $T(P) = (X - c)^\ell XS$ avec $cS(c) \neq 0$ puisque $c \neq 0$: c est racine de $T(P)$ de même multiplicité. Ainsi $T(P)$ a au moins $p - 1$ racines dans $[1, +\infty[$.

De même, $T(P)$ a au moins $q - 1$ racines dans $] - \infty, -1]$. Par conséquent :

$$N_1(T(P)) \geq (p - 1) + (q - 1) = N_1(P) - 2$$

Conclusion

$$N_1(P) \leq N_1(T(P)) + 2.$$

- b) Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, montrons que $T^k(P)$ est de degré n et que $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k$.

- Pour $k = 1$: $T(P)$ est de degré n (préliminaire) et l'inégalité est celle de a).
- Si la propriété est vraie au rang k : $T^k(P)$ est de degré n , donc $T^{k+1}(P) = T(T^k(P))$ est de degré n , et la question a) appliquée au polynôme $T^k(P)$ donne $N_1(T^k(P)) \leq N_1(T^{k+1}(P)) + 2$. Avec l'hypothèse de récurrence :

$$N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k \leq N_1(T^{k+1}(P)) + 2(k+1)$$

Conclusion

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k$.

2) a) Écrivons

$$P(X) = \sum_{j=0}^n c_j X^j$$

avec $c_n \neq 0$. Par définition du polynôme réciproque (avec $m = n$),

$$P^*(X) = \sum_{j=0}^n c_j X^{n-j}.$$

Pour $x \neq 0$:

$$x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \sum_{j=0}^n c_j x^{-j} = \sum_{j=0}^n c_j x^{n-j} = P^*(x)$$

Conclusion

pour tout réel x non nul, $P^*(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.

- b) Racines.** On a $P^*(0) = c_n \neq 0$, donc 0 n'est pas racine de P^* . Pour $y \neq 0$, a) donne $P^*(y) = 0 \iff P\left(\frac{1}{y}\right) = 0$. Par ailleurs, pour $a \neq 0$, $|a| \geq 1 \iff 0 < \left|\frac{1}{a}\right| \leq 1$.
L'application $a \mapsto \frac{1}{a}$ est donc une bijection de l'ensemble des racines de P dans $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ sur l'ensemble des racines non nulles de P^* dans $[-1, 1]$.

Multiplicités. Soit a une racine de P avec $|a| \geq 1$, de multiplicité r : $P = (X - a)^r R$ avec $R(a) \neq 0$ et $\deg R = n - r$. Écrivons

$$R(X) = \sum_{j=0}^{n-r} \rho_j X^j$$

et posons

$$S(X) = \sum_{j=0}^{n-r} \rho_j X^{n-r-j},$$

de sorte que $S(x) = x^{n-r} R\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$. Pour tout $x \neq 0$:

$$P^*(x) = x^n \left(\frac{1}{x} - a\right)^r R\left(\frac{1}{x}\right) = (1 - ax)^r x^{n-r} R\left(\frac{1}{x}\right) = (-a)^r \left(x - \frac{1}{a}\right)^r S(x)$$

Les polynômes P^* et $(-a)^r \left(X - \frac{1}{a}\right)^r S$ coïncident en une infinité de points, donc sont égaux. Comme $S\left(\frac{1}{a}\right) = a^{-(n-r)} R(a) \neq 0$ et $(-a)^r \neq 0$, $\frac{1}{a}$ est racine de P^* de multiplicité exactement r .

En sommant les multiplicités sur les racines correspondantes :

Conclusion

$$N_1(P) = N_0(P^*).$$

- 3) La dérivation est linéaire, donc T est linéaire, et $T(X^j) = X \cdot jX^{j-1} = jX^j$ pour $j \geq 1$, $T(1) = 0$. Par récurrence immédiate, $T^k(X^j) = j^k X^j$ pour tout $j \geq 0$ et $k \geq 1$ (avec $0^k = 0$). Avec $a_n = 1$:

$$T^k(P) = \sum_{j=0}^n j^k a_j X^j = \sum_{j=1}^n j^k a_j X^j$$

Ce polynôme est de degré n , de coefficient dominant $n^k \neq 0$, et son coefficient d'indice j est $v_j = j^k a_j$. Par définition du polynôme réciproque (avec $m = n$), puis en posant $i = n - j$:

$$(T^k(P))^*(X) = \sum_{j=0}^n v_j X^{n-j} = \sum_{i=0}^n (n-i)^k a_{n-i} X^i = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^k a_{n-i} X^i$$

car le terme $i = n$ est nul. En factorisant n^k , et puisque $(n-i)^k = n^k \left(1 - \frac{i}{n}\right)^k$:

$$\begin{aligned} (T^k(P))^*(X) &= n^k \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^k X^i \\ &= n^k \left(1 + a_{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k X + \dots + a_1 \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^k X^{n-1} \right) \end{aligned}$$

le terme $i = 0$ valant $a_n = 1$.

Conclusion

$$(T^k(P))^* = n^k Q_k.$$

4) a) Méthode 1 — Étude de fonction.

Soit $u(y) = (1 - y)e^y$ sur $[0, 1]$. La fonction u est dérivable et $u'(y) = -e^y + (1 - y)e^y = -ye^y \leq 0$ sur $[0, 1]$. Donc u est décroissante sur $[0, 1]$ et $u(y) \leq u(0) = 1$.

Méthode 2 — Inégalité de convexité.

La fonction $t \mapsto e^t$ est convexe sur $\mathbb{R}$, donc sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0 : $e^t \geq 1 + t$ pour tout réel t . Avec $t = -y$: $e^{-y} \geq 1 - y$, et en multipliant par $e^y > 0$, $(1 - y)e^y \leq 1$.

La méthode 1 est la plus directe ; la méthode 2 montre que l'inégalité est une réécriture de l'inégalité de tangente $e^t \geq 1 + t$, et qu'elle est vraie pour tout réel y .

Conclusion

pour tout $y \in [0, 1]$, $(1 - y)e^y \leq 1$.

b) Question adaptée au programme actuel : la propriété admise dans l'énoncé original portait sur le disque complexe D_ρ et sur la majoration $|U(z)| \leq \mu$ pour z complexe. Elle est remplacée par une version entièrement réelle, où l'hypothèse porte sur la somme

$$\sum_i |u_i| \rho^i$$

(qui majore $|U|$ sur ce disque) ; le résultat admis est une conséquence correcte de la propriété originale et suffit pour la suite.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On applique la propriété admise à $U = Q_k$, $r = 1$, $\rho = e^{k/n}$; on a bien

$0 < r < \rho$ car $\frac{k}{n} > 0$. Les coefficients de Q_k sont $u_0 = 1$ et $u_i = a_{n-i} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^k$ pour $1 \leq i \leq n-1$; en particulier $Q_k(0) = 1 \neq 0$. Ensuite :

$$\sum_{i=0}^{n-1} |u_i| \rho^i = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} |a_{n-i}| \left(1 - \frac{i}{n}\right)^k e^{ki/n} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} |a_{n-i}| \left[\left(1 - \frac{i}{n}\right) e^{i/n}\right]^k$$

Pour $1 \leq i \leq n-1$, $y = \frac{i}{n} \in [0, 1]$, donc $0 \leq (1-y)e^y \leq 1$ par a), et sa puissance k -ième est aussi dans $[0, 1]$. Donc :

$$\sum_{i=0}^{n-1} |u_i| \rho^i \leq 1 + \sum_{i=1}^{n-1} |a_{n-i}| \leq 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = L(P)$$

On peut donc prendre $\mu = L(P)$, qui est strictement positif (car $L(P) \geq 1$). La propriété admise donne : le nombre de racines réelles de Q_k dans $[-1, 1]$, comptées avec multiplicité, est au plus

$$\frac{1}{\ln(e^{k/n})} \ln \left(\frac{L(P)}{1} \right) = \frac{n}{k} \ln(L(P))$$

(si Q_k est constant, il n'a pas de racine et la majoration est triviale). Le nombre $N_0(Q_k)$ de racines non nulles de Q_k dans $[-1, 1]$ est inférieur ou égal à ce nombre, et $n^k Q_k$ a les mêmes racines que Q_k , avec les mêmes multiplicités.

Enfin, P et $T^k(P)$ sont de degré n , donc 1) b) et 2) b) (appliquée au polynôme $T^k(P)$) s'appliquent, et avec 3) :

$$N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k = N_0((T^k(P))^*) + 2k = N_0(n^k Q_k) + 2k \leq \frac{n}{k} \ln(L(P)) + 2k$$

Conclusion

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $N_1(P) \leq 2k + \frac{n}{k} \ln(L(P))$.

c) i) La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\psi'(x) = 2 - \frac{\theta}{x^2} = \frac{2x^2 - \theta}{x^2}$.

- Si $\theta = 0$: $\psi(x) = 2x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Si $\theta > 0$: $\psi'(x) < 0$ pour $0 < x < \sqrt{\theta/2}$ et $\psi'(x) > 0$ pour $x > \sqrt{\theta/2}$. Donc ψ est strictement décroissante sur $]0, \sqrt{\theta/2}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{\theta/2}, +\infty[$.
Elle admet un minimum en $\sqrt{\theta/2}$, égal à $2\sqrt{\theta/2} + \frac{\theta}{\sqrt{\theta/2}} = 2\sqrt{2\theta}$. De plus $\psi(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$ et quand $x \rightarrow +\infty$.

Conclusion

dans tous les cas, ψ est croissante sur $[\sqrt{\theta/2}, +\infty[\cap \mathbb{R}_+^*$, et décroissante sur $]0, \sqrt{\theta/2}]$ lorsque $\theta > 0$.

ii) Posons $s = \sqrt{\theta/2} \geq 0$, de sorte que $\theta = 2s^2$ et $2\sqrt{2\theta} = 2\sqrt{4s^2} = 4s$. Alors :

$$\psi(s+1) = 2s + 2 + \frac{2s^2}{s+1}$$

Si $s > 0$, $\frac{2s^2}{s+1} \leq \frac{2s^2}{s} = 2s$; si $s = 0$, ce terme est nul. Dans les deux cas,
 $\psi(s+1) \leq 2s + 2 + 2s = 2 + 4s$.

Conclusion

$\psi(\sqrt{\theta/2} + 1) \leq 2 + 2\sqrt{2\theta}$.

- iii) Posons $\theta = n \ln(L(P))$, qui est positif car $L(P) \geq 1$. D'après b), $N_1(P) \leq \psi(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $s = \sqrt{\theta/2}$ et $k = \lfloor s \rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$; on a $s < k \leq s + 1$. Comme ψ est croissante sur $[s, +\infty[\cap \mathbb{R}_+^*$ (question i)), $\psi(k) \leq \psi(s + 1)$, et par ii) :

$$N_1(P) \leq \psi(k) \leq \psi(s + 1) \leq 2 + 2\sqrt{2\theta}$$

Conclusion

$$N_1(P) \leq 2 + 2\sqrt{2n \ln(L(P))}.$$

- d) Supposons $a_0 \neq 0$. Alors 0 n'est pas racine de P , et toute racine réelle de P est soit dans $[-1, 1] \setminus \{0\}$, soit dans $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ (les racines ± 1 éventuelles étant comptées dans les deux nombres). Donc $N(P) \leq N_0(P) + N_1(P)$. Avec c) iii) et le résultat admis :

$$N(P) \leq 4 + 2\sqrt{2n \ln(L(P))} + 2\sqrt{2n \ln\left(\frac{L(P)}{|a_0|}\right)}$$

où

$$L(P) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|.$$

Les logarithmes sont bien positifs, car $L(P) \geq 1$ et $L(P) \geq 1 + |a_0| > |a_0|$.

Remarque : si $a_0 = 0$ et $P \neq X^n$, on écrit $P = X^r P_1$ où P_1 est normalisé de degré $n - r$ avec $P_1(0) \neq 0$; alors $N(P) = r + N(P_1)$, et on applique la majoration précédente à P_1 .

Conclusion

si $a_0 \neq 0$,

$$N(P) \leq 4 + 2\sqrt{2n \ln \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right)} + 2\sqrt{2n \ln \left(\frac{1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|}{|a_0|} \right)}.$$

Partie IV : Nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n à coefficients aléatoires

- 1) Les variables $X_1, \dots, X_{n-1}$ sont indépendantes et suivent la loi de Poisson de paramètre λ . Par stabilité de la loi de Poisson pour la somme de variables indépendantes, et par récurrence (pour $2 \leq i \leq n-1$, la variable $X_1 + \dots + X_{i-1}$ est indépendante de X_i par le lemme des coalitions), $X_1 + \dots + X_i$ suit la loi de Poisson de paramètre $i\lambda$.

Conclusion

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$$

suit la loi de Poisson de paramètre $(n-1)\lambda$.

- 2) Soit $\omega \in \Omega$. Le polynôme Q_ω est normalisé de degré $n \geq 2$, à coefficients réels, de coefficient constant $a_0 = 1 \neq 0$, avec $a_i = X_i(\omega) \in \mathbb{N}$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Donc :

$$L(Q_\omega) = 1 + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\omega) = Z_n(\omega) + 2 \quad \text{et} \quad \frac{L(Q_\omega)}{|a_0|} = Z_n(\omega) + 2$$

Le nombre $M_n(\omega)$ de racines réelles de Q_ω est majoré par $N(Q_\omega)$ (qui les compte avec multiplicité). La conclusion de III.4) d) donne :

$$M_n(\omega) \leq N(Q_\omega) \leq 4 + 2\sqrt{2n \ln(Z_n(\omega) + 2)} + 2\sqrt{2n \ln(Z_n(\omega) + 2)}$$

Conclusion

$$M_n(\omega) \leq 4 + 4\sqrt{2n} \times \sqrt{\ln(Z_n(\omega) + 2)} \text{ pour tout } \omega \in \Omega.$$

- 3) a) La fonction h est de classe C^2 et concave sur $\mathbb{R}_+$, donc $h'' \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et h' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x_0, x \geq 0$.

Méthode 1 — Par la décroissance de h' .

Si $x \geq x_0$: pour $t \in [x_0, x]$, $h'(t) \leq h'(x_0)$, donc

$$h(x) - h(x_0) = \int_{x_0}^x h'(t) dt \leq \int_{x_0}^x h'(x_0) dt = h'(x_0)(x - x_0)$$

Si $x < x_0$: pour $t \in [x, x_0]$, $h'(t) \geq h'(x_0)$, donc

$$h(x_0) - h(x) = \int_x^{x_0} h'(t) dt \geq h'(x_0)(x_0 - x), \text{ ce qui donne encore}$$

$$h(x) \leq h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0).$$

Méthode 2 — Par la formule de Taylor avec reste intégral.

Comme h est de classe C^2 sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ qui contient x_0 et x :

$$h(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x (x - t) h''(t) dt$$

Si $x \geq x_0$, pour $t \in [x_0, x]$, $(x - t)h''(t) \leq 0$ et les bornes sont dans l'ordre croissant :

l'intégrale est négative. Si $x < x_0$, $\int_{x_0}^x (x - t)h''(t) dt = \int_x^{x_0} (t - x)h''(t) dt$ avec

$(t - x)h''(t) \leq 0$ sur $[x, x_0]$: l'intégrale est encore négative.

La méthode 1 traduit la caractérisation des fonctions concaves par la décroissance de la dérivée ; la méthode 2 donne en plus l'expression exacte de l'écart à la tangente, utile pour obtenir des estimations quantitatives.

Conclusion

pour tous réels positifs x_0 et x , $h(x) \leq h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0)$: la courbe de h est au-dessous de ses tangentes.

b) Comme W est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $x_0 = E(W)$ est un réel positif. Pour tout $\omega \in \Omega$, $W(\omega) \geq 0$, et a) donne :

$$h(W(\omega)) \leq h'(x_0)(W(\omega) - x_0) + h(x_0)$$

La variable de droite admet une espérance, puisque W en admet une, et par linéarité son espérance vaut $h'(x_0)(E(W) - x_0) + h(x_0) = h(x_0)$. Comme $h(W)$ admet une espérance, la croissance de l'espérance donne :

Conclusion

$$E(h(W)) \leq h(E(W)).$$

4) a) Pour $x \geq 0$, $\ln(x + 2) \geq \ln 2 > 0$, donc φ est bien définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ (composée de fonctions de classe C^2 , la racine carrée étant de classe C^2 sur $]0, +\infty[$).
Pour $x \geq 0$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x+2} \times \frac{1}{2\sqrt{\ln(x+2)}}$$

Méthode 1 — Décroissance de la dérivée.

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ et $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{\ln(x+2)}}$ sont strictement positives et décroissantes sur $\mathbb{R}_+$. Leur produit φ' est donc décroissant sur $\mathbb{R}_+$ (si $0 \leq x \leq y$, $0 < \alpha(y) \leq \alpha(x)$ et $0 < \beta(y) \leq \beta(x)$ entraînent $\alpha(y)\beta(y) \leq \alpha(x)\beta(x)$). Une fonction dérivable de dérivée décroissante est concave.

Méthode 2 — Signe de la dérivée seconde.

Notons $\ell(x) = \ln(x+2) > 0$, de sorte que $\ell'(x) = \frac{1}{x+2}$ et $\varphi'(x) = \frac{1}{2}(x+2)^{-1}\ell(x)^{-1/2}$. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \frac{1}{2} \left[-(x+2)^{-2}\ell(x)^{-1/2} - \frac{1}{2}(x+2)^{-1}\ell(x)^{-3/2}(x+2)^{-1} \right] \\ &= -\frac{2\ln(x+2) + 1}{4(x+2)^2 (\ln(x+2))^{3/2}} < 0\end{aligned}$$

La méthode 1 évite tout calcul en utilisant la monotonie d'un produit ; la méthode 2 est systématique et donne en plus la stricte concavité.

Conclusion

φ est concave sur $\mathbb{R}_+$.

b) Le terme général $w_k = \sqrt{\ln(k+2)} \frac{a^k}{k!}$ est positif. Pour tout $t \geq 0$, $\sqrt{t} \leq 1+t$ (si $t \leq 1$, $\sqrt{t} \leq 1$; si $t \geq 1$, $\sqrt{t} \leq t$). De plus $\ln(k+2) \leq k+2$ (car $\ln y \leq y-1$ pour $y > 0$). Donc :

$$0 \leq w_k \leq (k+3) \frac{a^k}{k!} = k \frac{a^k}{k!} + 3 \frac{a^k}{k!}$$

La série

$$\sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{k!}$$

converge (série exponentielle, de somme e^a), ainsi que

$$\sum_{k \geq 1} k \frac{a^k}{k!} = \sum_{k \geq 1} \frac{a^k}{(k-1)!} = a \sum_{j \geq 0} \frac{a^j}{j!},$$

de somme ae^a . Par linéarité, la série de terme général $(k+3) \frac{a^k}{k!}$ converge, et par comparaison de séries à termes positifs :

Conclusion

la série de terme général $\sqrt{\ln(k+2)} \times \frac{a^k}{k!}$ converge.

5) a) Méthode 1 — M_n est une variable finie.

Pour tout ω , Q_ω est un polynôme non nul de degré n , qui admet au plus n racines réelles. Donc $M_n(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$: M_n est une variable aléatoire finie, qui admet une espérance.

Méthode 2 — Par domination, avec les questions 2) et 4) b).

Posons $a = (n-1)\lambda$. D'après 1), Z_n suit la loi de Poisson de paramètre a . Par le théorème de transfert, $\varphi(Z_n) = \sqrt{\ln(Z_n+2)}$ admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_k \varphi(k) P([Z_n = k]) = \sum_k e^{-a} \sqrt{\ln(k+2)} \frac{a^k}{k!}$$

converge absolument ; ses termes sont positifs et elle converge d'après 4) b). Donc $\varphi(Z_n)$, puis $4 + 4\sqrt{2n} \varphi(Z_n)$ admettent une espérance. D'après 2), $0 \leq M_n \leq 4 + 4\sqrt{2n} \varphi(Z_n)$, et

le théorème de domination montre que M_n admet une espérance.

La méthode 1 est immédiate; la méthode 2 établit au passage l'existence de $E(\varphi(Z_n))$, qui sert en b).

Conclusion

M_n admet une espérance.

b) On applique 3) b) à $h = \varphi$ et $W = Z_n$. La fonction φ est de classe C^2 et concave sur $\mathbb{R}_+$ (4) a)), Z_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $E(Z_n) = (n-1)\lambda$ existe, et $E(\varphi(Z_n))$ existe (méthode 2 de 5) a)). Donc :

$$E(\varphi(Z_n)) \leq \varphi(E(Z_n)) = \sqrt{\ln((n-1)\lambda + 2)}$$

Par croissance et linéarité de l'espérance, l'inégalité de 2) donne :

$$0 \leq E(M_n) \leq 4 + 4\sqrt{2n} E(\varphi(Z_n)) \leq 4 + 4\sqrt{2n} \sqrt{\ln((n-1)\lambda + 2)}$$

Pour $n \geq 2$, $(n-1)\lambda + 2 \leq n\lambda + 2n = n(\lambda + 2)$, donc $\ln((n-1)\lambda + 2) \leq \ln n + \ln(\lambda + 2)$.
Soit $\beta > \frac{1}{2}$ et $\gamma = 2\beta - 1 > 0$. En divisant par n^β :

$$0 \leq \frac{E(M_n)}{n^\beta} \leq \frac{4}{n^\beta} + 4\sqrt{2} \sqrt{\frac{\ln n + \ln(\lambda + 2)}{n^\gamma}}$$

car $\frac{\sqrt{n}}{n^\beta} = \frac{1}{\sqrt{n^{2\beta-1}}}$. Quand $n \rightarrow +\infty$: $\frac{4}{n^\beta} \rightarrow 0$; $\frac{\ln n}{n^\gamma} \rightarrow 0$ par croissances comparées ;
 $\frac{\ln(\lambda + 2)}{n^\gamma} \rightarrow 0$; par continuité de la racine carrée en 0, le majorant tend vers 0. Par encadrement :

Conclusion

$$\text{pour tout } \beta > \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(M_n)}{n^\beta} = 0.$$

Relevé des adaptations

- I.1) : Question adaptée au programme actuel. La demande de montrer que M est une variable aléatoire est remplacée par l'expression de M à l'aide du signe de $X_1^2 - 4X_0$, en admettant que cette dernière est une variable aléatoire. Justification : le référentiel exclut la théorie de la mesurabilité.
- II.4) a) : Question adaptée au programme actuel. « Soit α une racine (réelle ou complexe) de P » devient « Soit α une racine réelle de P ». Justification : exclusion des nombres complexes ; seule la majoration des racines réelles sert en II.4) b).
- II.5) : Code adapté en Python. Les déclarations Pascal (const n , type tab, var T) et la fonction Pascal nbchgs sont remplacées par une fonction Python def nbchgs(T) agissant sur une liste T indexée de 0 à $n - 1$; la commande len est rappelée dans l'énoncé. Justification : seul Python est autorisé.
- III, préambule : rectification d'une erreur du document fourni. L'application T est définie sur tous les polynômes de degré n (et non sur les seuls polynômes normalisés), N_0, N_1, N sont définis pour tout polynôme non nul, et les questions 1) et 2) portent sur un polynôme de degré n quelconque, la normalisation n'intervenant qu'en 3) et 4). Justification : $T(P)$ a pour coefficient dominant n , donc T^k n'était pas défini pour $k \geq 2$, alors que 1) b), 2) b) et 4) b) appliquent les résultats à $T^k(P)$.
- III.4) b) : Question adaptée au programme actuel. La propriété admise, formulée sur le disque complexe D_ρ avec l'hypothèse $|U(z)| \leq \mu$, est remplacée par une version

réelle avec l'hypothèse

$$\sum_i |u_i| \rho^i \leq \mu,$$

qui en est une conséquence correcte. Justification : exclusion des nombres complexes ; la suite de la question est inchangée.