



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

2006

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Préliminaire

1. (a) Dérivée de l'arctangente.

La tangente est dérivable et strictement croissante sur $] -\pi/2, \pi/2[$, et sa dérivée $1 + \tan^2$ ne s'annule pas. Le théorème de dérivation de la réciproque donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

1. (b) Identité pour deux arguments réciproques.

Méthode 1 — Dériver la somme.

La fonction $f : x \mapsto \arctan x + \arctan(1/x)$ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1/x^2}{1 + 1/x^2} = 0.$$

Elle est donc constante sur cet intervalle. Comme $f(1) = 2 \arctan 1 = \pi/2$, on obtient $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$ pour tout $x > 0$.

Méthode 2 — Utiliser les angles complémentaires.

Posons $a = \arctan x$. Pour $x > 0$, $a \in]0, \pi/2[$. Les formules d'addition donnent $\sin(\pi/2 - a) = \cos a$ et $\cos(\pi/2 - a) = \sin a$. Comme $\sin a > 0$,

$$\tan(\pi/2 - a) = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{1}{\tan a} = \frac{1}{x}.$$

L'angle $\pi/2 - a$ appartient à l'intervalle de définition de la réciproque de la tangente, donc $\arctan(1/x) = \pi/2 - a$. Cela redonne l'identité demandée.

La première approche s'applique aux identités obtenues par compensation de dérivées ; la seconde exploite ici la géométrie des angles complémentaires.

1. (c) Encadrement de l'arctangente.

On intègre sa dérivée. Pour $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto 1/(1+t^2)$ est continue sur $[0, x]$ et comprise entre 0 et 1. Comme $\arctan 0 = 0$,

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

La croissance de l'intégrale entraîne $0 \leq \arctan x \leq \int_0^x 1 dt = x$. Les deux inégalités restent valables pour $x = 0$.

2. (a) Vérification de la densité.

Il faut vérifier la positivité, la régularité requise et la normalisation. La fonction ψ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour $A, B > 0$,

$$\int_{-A}^B \psi(x) dx = \frac{1}{\pi} (\arctan B + \arctan A).$$

Lorsque A et B tendent vers $+\infty$, chacun des deux termes arctangente tend vers $\pi/2$. Les intégrales impropres sur les deux demi-droites convergent donc, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 1. \text{ Ainsi } \psi \text{ est une densité de probabilité.}$$

2. (b) Loi de $F(U)$.

On calcule d'abord la fonction de répartition. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x.$$

La fonction F est continue et strictement croissante, avec limites 0 et 1 aux deux extrémités de $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$, de réciproque

$$F^{-1}(v) = \tan(\pi(v - 1/2)), \quad 0 < v < 1.$$

Posons $V = F(U)$. Pour $0 < v < 1$, la stricte croissance de F donne

$$P(V \leq v) = P(U \leq F^{-1}(v)) = F(F^{-1}(v)) = v.$$

Comme $0 < V < 1$ pour toute valeur réelle de U , cette probabilité vaut 0 pour $v \leq 0$ et 1

pour $v \geq 1$. C'est la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$. Ainsi $F(U) \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

2. (c) Simulation par inversion.

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Si V suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors, pour $x \in \mathbb{R}$, la croissance de F^{-1} sur $]0, 1[$ donne

$$P(F^{-1}(V) \leq x) = P(V \leq F(x)) = F(x).$$

Les extrémités ont une probabilité nulle dans le modèle continu. La transformation $\tan(\pi(V - 1/2))$ simule donc la loi de U . Avec le générateur informatique indiqué, on retire toutefois la valeur 0 pour éviter d'évaluer la tangente en $-\pi/2$.

Python

```
import numpy as np

def Cauchy():
    v = np.random.random()

    while v == 0.0:
        v = np.random.random()

    return np.tan(np.pi * (v - 0.5))
```

La variable v contient le tirage uniforme. La boucle impose $v > 0$; la commande utilisée garantit déjà $v < 1$. La fonction renvoie un réel de la loi simulée, sans paramètre supplémentaire.

Ce code a été exécuté. En imposant successivement les tirages $1/4$, $1/2$ et $3/4$, il renvoie, à l'arrondi machine près, -1 , 0 et 1 . Le test avec deux tirages successifs 0 puis $1/4$ vérifie également le nouveau tirage dans la boucle. Ces contrôles valident le fonctionnement du programme; la preuve de la loi repose sur le calcul de fonction de répartition ci-dessus.

Partie I. Dimension du sous-espace propre associé à la plus grande valeur propre de H_n

1. Représentation intégrale de la forme quadratique.

Pour $1 \leq k, j \leq n$, l'entier $k + j - 2$ est positif ou nul, donc la fonction puissance est continue sur $[0, 1]$ et

$$\int_0^1 t^{k+j-2} dt = \left[\frac{t^{k+j-1}}{k+j-1} \right]_0^1 = \frac{1}{k+j-1}.$$

Le dénominateur est strictement positif. En écrivant le produit matriciel avec les coordonnées de X indexées à partir de 0,

$$X^T H_n X = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_k x_j}{k+j+1}.$$

La linéarité de l'intégrale s'applique à cette somme finie. Ainsi,

$$X^T H_n X = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} x_k x_j t^{k+j} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k \right)^2 dt.$$

On obtient exactement la formule demandée; aucun échange avec une somme infinie n'intervient.

2. (a) Diagonalisation et positivité des valeurs propres.

La matrice H_n est réelle et symétrique, puisque $1/(k+j-1) = 1/(j+k-1)$. Le théorème spectral réel fournit une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telles que $P^T P = I_n$ et $H_n = P D P^T$.

Pour montrer que les coefficients de D sont strictement positifs, on établit d'abord

$X^T H_n X > 0$ pour $X \neq 0$. Dans ce cas, le polynôme

$$R(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k$$

est non nul. Un polynôme non nul ne peut s'annuler sur tout l'intervalle $]0, 1[$, puisqu'il n'a qu'un nombre fini de racines. Il existe donc $t_0 \in]0, 1[$ tel que $R(t_0) \neq 0$.

Par continuité, il existe un segment de longueur strictement positive contenu dans $]0, 1[$ sur lequel $R(t)^2 \geq R(t_0)^2/4 > 0$. La représentation de la question 1 implique alors $X^T H_n X > 0$.

Si $X \neq 0$ est un vecteur propre associé à une valeur propre λ , on a $X^T H_n X = \lambda \|X\|^2$. Puisque $\|X\|^2 > 0$, la stricte positivité précédente impose $\lambda > 0$. Tous les coefficients diagonaux de D sont donc strictement positifs.

2. (b) Encadrement spectral.

On utilise les coordonnées dans la base orthonormale de diagonalisation. Écrivons $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $Y = P^T X = (y_1, \dots, y_n)^T$.

La matrice P étant orthogonale, $PP^T = I_n$, d'où $\|Y\|^2 = X^T PP^T X = \|X\|^2$. De plus,

$$X^T H_n X = Y^T D Y = \sum_{r=1}^n \lambda_r y_r^2.$$

Pour chaque r , $\alpha_n \leq \lambda_r \leq \beta_n$ et $y_r^2 \geq 0$. En sommant les inégalités correspondantes,

$$\alpha_n \|X\|^2 \leq X^T H_n X \leq \beta_n \|X\|^2.$$

L'encadrement vaut aussi pour $X = 0$, avec égalité des trois termes.

3. (a) Égalité pour un vecteur du sous-espace propre.

Par définition de $\mathcal{V}$, tout $Y \in \mathcal{V}$ vérifie $H_n Y = \beta_n Y$. En multipliant à gauche par Y^T ,

$$Y^T H_n Y = \beta_n Y^T Y = \beta_n \|Y\|^2.$$

Cette égalité est également vraie pour le vecteur nul de $\mathcal{V}$.

3. (b) Réciproque du cas d'égalité.

Méthode 1 — Examiner les coordonnées spectrales.

Écrivons $Z = P^T Y = (z_1, \dots, z_n)^T$. L'égalité supposée et la question 2 (b) donnent

$$0 = \beta_n \|Y\|^2 - Y^T H_n Y = \sum_{r=1}^n (\beta_n - \lambda_r) z_r^2.$$

Tous les termes sont positifs ou nuls. Ils sont donc tous nuls. Si $\lambda_r < \beta_n$, on en déduit $z_r = 0$; pour les autres indices, $\lambda_r z_r = \beta_n z_r$ est déjà vrai. Ainsi $DZ = \beta_n Z$, puis $H_n Y = PDZ = \beta_n Y$. Donc $Y \in \mathcal{V}$.

Méthode 2 — Exploiter la positivité d'une forme quadratique.

Posons $B = \beta_n I_n - H_n$. Cette matrice est symétrique et la question 2 (b) assure $T^T B T \geq 0$ pour tout $T \in \mathbb{R}^n$. L'hypothèse est $Y^T B Y = 0$. Pour tout $Z \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(Y + tZ)^T B (Y + tZ) = 2tZ^T B Y + t^2 Z^T B Z \geq 0.$$

Notons $a = Z^T B Y$ et $b = Z^T B Z \geq 0$. Si $a \neq 0$, choisissons $t = -\varepsilon$ lorsque $a > 0$, et $t = \varepsilon$ lorsque $a < 0$, où $\varepsilon > 0$. L'expression devient $-2\varepsilon|a| + \varepsilon^2 b$. Elle est strictement négative si $b = 0$, ou si $b > 0$ et $\varepsilon < 2|a|/b$. Cela contredit sa positivité. Donc $Z^T B Y = 0$ pour tout Z .

En prenant $Z = BY$, on obtient $\|BY\|^2 = 0$, puis $BY = 0$. Ainsi $H_n Y = \beta_n Y$ et $Y \in \mathcal{V}$.

La première méthode décrit précisément les coordonnées autorisées par l'égalité. La seconde est utile lorsqu'on dispose seulement d'une forme quadratique positive et qu'on souhaite identifier son noyau.

4. (a) Comparaison avec les valeurs absolues des coordonnées.

Tous les coefficients de H_n étant strictement positifs,

$$|X_0|^T H_n |X_0| - X_0^T H_n X_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|x_k||x_j| - x_k x_j}{k+j+1}.$$

Pour tout couple d'indices, $|x_k||x_j| = |x_k x_j| \geq x_k x_j$. Chaque terme de la somme est donc positif ou nul, ce qui prouve $|X_0|^T H_n |X_0| \geq X_0^T H_n X_0$.

4. (b) Appartenance de $|X_0|$ au sous-espace propre.

On combine la comparaison précédente et l'encadrement spectral. Comme $X_0 \in \mathcal{V}$ et $\| |X_0| \|^2 = \|X_0\|^2$,

$$\beta_n \|X_0\|^2 = X_0^T H_n X_0 \leq |X_0|^T H_n |X_0| \leq \beta_n \| |X_0| \|^2 = \beta_n \|X_0\|^2.$$

Les deux inégalités sont donc des égalités. Le vecteur $|X_0|$ est non nul puisque X_0 l'est. La question 3 (b) permet de conclure que $|X_0| \in \mathcal{V}$, donc $H_n |X_0| = \beta_n |X_0|$.

4. (c) Absence de coordonnée nulle.

Le vecteur X_0 étant non nul, il existe $j_0 \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $|x_{j_0}| > 0$. Pour chaque $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$(H_n |X_0|)_k = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|x_j|}{k+j+1} \geq \frac{|x_{j_0}|}{k+j_0+1} > 0.$$

Les composantes de $H_n |X_0|$ sont donc toutes strictement positives. D'après 4 (b), elles valent $\beta_n |x_k|$. Or $\beta_n > 0$ d'après 2 (a). Ainsi $|x_k| > 0$ pour tout k : aucune composante de X_0 n'est nulle.

4. (d) Signe commun des composantes.

La question 4 (b) donne l'égalité des deux formes quadratiques. Dans la somme de termes positifs ou nuls de 4 (a), chaque terme doit donc s'annuler : pour tous k, j ,

$$|x_k||x_j| = x_k x_j.$$

Les coordonnées sont toutes non nulles d'après 4 (c), donc le membre de gauche est strictement positif. Par conséquent $x_k x_j > 0$ pour tout couple. Chaque coordonnée a le même signe que x_0 . Les composantes de X_0 sont donc toutes strictement positives ou toutes strictement négatives.

5. (a) Impossibilité de deux vecteurs non nuls orthogonaux.

Soient $U, V \in \mathcal{V}$ deux vecteurs non nuls. D'après 4 (d), toutes les composantes de U ont un signe commun, et de même pour V . Les produits des composantes correspondantes sont donc tous strictement positifs si les deux signes communs sont identiques, et tous strictement négatifs sinon.

Leur somme $U^T V$ est ainsi strictement positive ou strictement négative. Elle ne peut pas être nulle. Aucun couple de vecteurs non nuls de $\mathcal{V}$ n'est donc orthogonal.

5. (b) Dimension de $\mathcal{V}$.

Comme β_n est une valeur propre, $\mathcal{V}$ contient un vecteur non nul ; sa dimension est au moins 1. Supposons qu'elle soit au moins 2. Il existe alors deux vecteurs indépendants $U, V \in \mathcal{V}$. Posons

$$Z = V - \frac{U^T V}{\|U\|^2} U.$$

La division est licite puisque $U \neq 0$. Le sous-espace $\mathcal{V}$ étant stable par combinaisons linéaires, $Z \in \mathcal{V}$. On calcule $U^T Z = U^T V - (U^T V / \|U\|^2) \|U\|^2 = 0$. Enfin $Z \neq 0$, car $Z = 0$ rendrait V colinéaire à U .

Les deux vecteurs non nuls U et Z contredisent 5 (a). Ainsi $\dim \mathcal{V} = 1$. La construction utilisée est explicite et ne suppose aucune procédure d'orthonormalisation connue.

Partie II. Croissance et convergence de la suite $(\beta_n)_{n \geq 1}$

1. Croissance de la plus grande valeur propre.

La matrice H_n est le bloc supérieur gauche de H_{n+1} . Comme la dernière coordonnée de Z est nulle, tous les termes du produit quadratique qui font intervenir cette coordonnée s'annulent. Il reste

$$Z^T H_{n+1} Z = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x'_k x'_j}{k+j+1} = (X')^T H_n X'.$$

Par ailleurs, $\|Z\|^2 = \|X'\|^2 > 0$ et $(X')^T H_n X' = \beta_n \|X'\|^2$. La question I.2 (b), appliquée en dimension $n+1$, donne

$$\beta_n \|X'\|^2 = Z^T H_{n+1} Z \leq \beta_{n+1} \|Z\|^2 = \beta_{n+1} \|X'\|^2.$$

En divisant par $\|X'\|^2$, on obtient $\beta_n \leq \beta_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. La suite est croissante.

On peut même préciser la stricte croissance : si $\beta_n = \beta_{n+1}$, le cas d'égalité I.3 (b) ferait de Z un vecteur propre de H_{n+1} pour sa plus grande valeur propre. Sa dernière coordonnée nulle contredirait I.4 (c). Ainsi $\beta_n < \beta_{n+1}$.

2. (a) Intégrales trigonométriques élémentaires.

Question adaptée au programme actuel. Les calculs portent sur des fonctions réelles et remplacent les expressions du sujet initial faisant intervenir des scalaires exclus du référentiel.

Les fonctions intégrées sont continues sur les segments considérés. Si $k = 0$, le cosinus vaut 1 et le sinus vaut 0. Si $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on utilise les primitives $\sin(k\theta)/k$ et $-\cos(k\theta)/k$. On obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\theta) d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0, \end{cases} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\theta) d\theta = 0.$$

Pour la seconde intégrale, l'imparité du sinus permet aussi de conclure directement. Sur $[0, \pi]$,

$$\int_0^\pi \cos(k\theta) d\theta = \begin{cases} \pi & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0, \end{cases},$$

$$\int_0^\pi \sin(k\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, \\ \frac{1 - (-1)^k}{k} & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

La dernière valeur est nulle pour un entier pair non nul et égale à $2/k$ pour un entier impair, y compris lorsque $k < 0$.

2. (b) Identification des intégrales de monômes.

Question adaptée au programme actuel. On relie les monômes aux sinus, en distinguant la parité de p .

Si $p \geq 0$ est pair, le monôme est pair et

$$\int_{-1}^1 x^p dx = 2 \int_0^1 x^p dx = \frac{2}{p+1}.$$

L'entier $p+1$ est impair, donc 2 (a) donne également $\int_0^\pi \sin((p+1)\theta) d\theta = 2/(p+1)$. Si p est impair, le monôme est impair et son intégrale sur $[-1, 1]$ est nulle. L'entier $p+1$ est alors pair, et l'intégrale du sinus est elle aussi nulle.

Dans tous les cas, $\int_{-1}^1 x^p dx = \int_0^\pi \sin((p+1)\theta) d\theta$.

2. (c) Formule pour un polynôme réel.

Question adaptée au programme actuel. On étend la question précédente par linéarité, puis on utilise une formule d'addition.

Soit

$$P(X) = \sum_{r=0}^m a_r X^r.$$

Toutes les sommes sont finies et toutes les fonctions intégrées sont continues. Par 2 (b),

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = \sum_{r=0}^m a_r \int_0^\pi \sin((r+1)\theta) d\theta.$$

La formule d'addition $\sin((r+1)\theta) = \sin(r\theta) \cos \theta + \cos(r\theta) \sin \theta$ donne

$$\sum_{r=0}^m a_r \sin((r+1)\theta) = S_P(\theta) \cos \theta + C_P(\theta) \sin \theta.$$

On en déduit $\int_{-1}^1 P(x) dx = \int_0^\pi (C_P(\theta) \sin \theta + S_P(\theta) \cos \theta) d\theta$, comme demandé.

2. (d) Majoration réelle de l'intégrale.

Question adaptée au programme actuel. On applique l'inégalité triangulaire pour l'intégrale et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $\theta \in [0, \pi]$, le vecteur $(\sin \theta, \cos \theta)$ a pour norme 1. Ainsi,

$$|C_P(\theta) \sin \theta + S_P(\theta) \cos \theta| \leq \sqrt{C_P(\theta)^2 + S_P(\theta)^2}.$$

Les fonctions sont continues sur ce segment, donc intégrables. En utilisant 2 (c),

$$\left| \int_{-1}^1 P(x) dx \right| \leq \int_0^\pi |C_P(\theta) \sin \theta + S_P(\theta) \cos \theta| d\theta \leq \int_0^\pi \sqrt{C_P(\theta)^2 + S_P(\theta)^2} d\theta.$$

Cela prouve la majoration sans introduire de scalaire autre que réel.

3. (a) Élargissement de l'intervalle d'intégration.

Le polynôme

$$R(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k$$

a un carré continu et positif ou nul sur $[-1, 1]$. La question I.1 et la relation de Chasles donnent

$$X^T H_n X = \int_0^1 R(t)^2 dt \geq 0,$$

$$\int_{-1}^1 R(t)^2 dt = \int_{-1}^0 R(t)^2 dt + \int_0^1 R(t)^2 dt \geq X^T H_n X.$$

$$\text{Ainsi } 0 \leq X^T H_n X \leq \int_{-1}^1 R(t)^2 dt.$$

3. (b) Majoration par les deux sommes trigonométriques.

Question adaptée au programme actuel. On applique 2 (d) au polynôme R^2 et on démontre les identités nécessaires à l'aide des formules d'addition.

Le développement du carré donne

$$R(t)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} x_j x_k t^{j+k}.$$

Par définition des deux fonctions associées à ce polynôme,

$$C_{R^2}(\theta) = \sum_{j,k=0}^{n-1} x_j x_k \cos((j+k)\theta),$$

$$S_{R^2}(\theta) = \sum_{j,k=0}^{n-1} x_j x_k \sin((j+k)\theta).$$

La formule $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ transforme la première somme en $C_X(\theta)^2 - S_X(\theta)^2$. De même, $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ transforme la seconde en $2C_X(\theta)S_X(\theta)$.

Pour tous réels c, s , l'identité algébrique $(c^2 - s^2)^2 + (2cs)^2 = (c^2 + s^2)^2$ et le signe $c^2 + s^2 \geq 0$ entraînent

$$\sqrt{C_{R^2}(\theta)^2 + S_{R^2}(\theta)^2} = C_X(\theta)^2 + S_X(\theta)^2.$$

Comme $\int_{-1}^1 R(t)^2 dt \geq 0$, on peut enlever sa valeur absolue dans 2 (d). Combinée avec 3 (a), cette question donne finalement

$$0 \leq X^T H_n X \leq \int_0^\pi (C_X(\theta)^2 + S_X(\theta)^2) d\theta.$$

4. (a) Périodicité et parité.

Question adaptée au programme actuel. On étudie directement la fonction réelle $\varphi = C_X^2 + S_X^2$.

Pour tout entier k , les fonctions $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ sont 2π -périodiques : ajouter 2π à θ ajoute un multiple entier de 2π à l'angle. Les sommes finies C_X et S_X , puis leurs carrés et leur somme, ont donc cette périodicité.

Le cosinus est pair et le sinus impair, donc $C_X(-\theta) = C_X(\theta)$ et $S_X(-\theta) = -S_X(\theta)$. En élevant au carré, on obtient $\varphi(-\theta) = \varphi(\theta)$. La fonction φ est donc paire.

Elle est continue. Le changement de variable $u = -\theta$ sur $[-\pi, 0]$ donne

$$\int_{-\pi}^0 \varphi(\theta) d\theta = \int_0^\pi \varphi(u) du. \text{ Ainsi,}$$

$$\int_0^\pi \varphi(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \varphi(\theta) d\theta.$$

4. (b) Majoration uniforme de la forme quadratique.

On calcule l'intégrale précédente en développant les deux carrés. La formule d'addition

du cosinus, avec b remplacé par $-b$, donne $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. Ainsi,

$$\varphi(\theta) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} x_j x_k (\cos(j\theta) \cos(k\theta) + \sin(j\theta) \sin(k\theta)) = \sum_{j,k=0}^{n-1} x_j x_k \cos((j-k)\theta).$$

La linéarité pour cette somme finie et la question 2 (a) donnent

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 = 2\pi \|X\|^2,$$

car seuls les termes avec $j = k$ ont une intégrale non nulle. Les questions 3 (b) et 4 (a) entraînent alors

$$X^T H_n X \leq \int_0^{\pi} \varphi(\theta) d\theta = \pi \|X\|^2.$$

Cette inégalité vaut pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, y compris le vecteur nul.

4. (c) Convergence de (β_n) .

Pour chaque n , choisissons un vecteur propre non nul Y associé à β_n . D'après I.3 (a) et II.4 (b),

$$\beta_n \|Y\|^2 = Y^T H_n Y \leq \pi \|Y\|^2.$$

En divisant par $\|Y\|^2 > 0$, on obtient $\beta_n \leq \pi$. La suite est donc majorée par π . Elle est croissante d'après II.1 ; le théorème de la limite monotone assure sa convergence vers un réel $\ell \leq \pi$. Comme $H_1 = (1)$, $\beta_1 = 1$, donc $1 \leq \ell \leq \pi$.

Partie III. Limite de la suite $(\beta_n)_{n \geq 1}$

1. Expressions de $W^T H_n W$.

La coordonnée de W de rang k , avec un index commençant à 1, vaut $1/\sqrt{k}$. Le produit

matriciel donne directement

$$W^T H_n W = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} \sqrt{j} (k+j-1)}.$$

Dans la formule intégrale I.1, le coefficient de $t^{\ell-1}$ est ici $1/\sqrt{\ell}$. On obtient donc aussi

$$W^T H_n W = \int_0^1 \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{t^{\ell-1}}{\sqrt{\ell}} \right)^2 dt.$$

L'intégrale existe puisqu'elle porte sur un polynôme sur un segment ; les sommes sont finies.

2. Minoration par regroupement suivant $k+j$.

Chaque terme de la somme double précédente est strictement positif. On peut donc ne conserver qu'une partie des termes pour obtenir un minorant. Pour expliciter le regroupement, posons $p = k+j$. Alors $2 \leq p \leq 2n$, $j = p-k$, et les contraintes $1 \leq k, j \leq n$ équivalent à

$$\max(1, p-n) \leq k \leq \min(n, p-1).$$

Ainsi,

$$W^T H_n W = \sum_{p=2}^{2n} \frac{1}{p-1} \sum_{k=\max(1, p-n)}^{\min(n, p-1)} \frac{1}{\sqrt{k} \sqrt{p-k}}.$$

Pour $2 \leq p \leq n$, les bornes intérieures sont 1 et $p-1$. En ne conservant que ces valeurs de p , on obtient, pour $n \geq 2$,

$$W^T H_n W \geq \sum_{p=2}^n \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k} \sqrt{p-k}}.$$

Ce regroupement correspond également au développement du produit des deux polynômes dans la question 1 : le terme d'exposant $p - 2$ rassemble précisément les couples tels que $k + j = p$.

3. (a) Variations de g .

Pour $x \in]0, p[$, $x(p - x) > 0$, donc $g(x) = (x(p - x))^{-1/2}$ est dérivable. Par dérivation composée,

$$g'(x) = -\frac{1}{2} \frac{p - 2x}{(x(p - x))^{3/2}} = \frac{2x - p}{2(x(p - x))^{3/2}}.$$

Le dénominateur est strictement positif. La dérivée est négative pour $0 < x < p/2$, nulle pour $x = p/2$, et positive pour $p/2 < x < p$. Ainsi g décroît strictement sur $]0, p/2]$ et croît strictement sur $[p/2, p[$.

Son minimum vaut $g(p/2) = 2/p$, et ses limites aux extrémités 0 et p sont $+\infty$. On relève aussi la symétrie $g(p - x) = g(x)$, valable sur tout $]0, p[$.

3. (b) Comparaison entre la somme et l'intégrale.

Méthode 1 — Utiliser les variations selon la parité de p .

La fonction g est continue sur $[1, p - 1]$. Si $p = 2$, l'intégrale a des bornes égales et vaut 0, tandis que la somme vaut $g(1) = 1$. L'inégalité est donc vraie.

Si $p = 2m$ avec $m \geq 2$, sur chaque intervalle $[k, k + 1]$ avec $1 \leq k \leq m - 1$, la décroissance de g donne $\int_k^{k+1} g(x) dx \leq g(k)$. Sur chaque intervalle $[k - 1, k]$ avec

$m + 1 \leq k \leq 2m - 1$, sa croissance donne $\int_{k-1}^k g(x) dx \leq g(k)$. Ces intervalles couvrent $[1, 2m - 1]$ sans recouvrement intérieur. En sommant,

$$\int_1^{2m-1} g(x) dx \leq \sum_{k=1}^{m-1} g(k) + \sum_{k=m+1}^{2m-1} g(k) \leq \sum_{k=1}^{2m-1} g(k).$$

Si $p = 2m + 1$ avec $m \geq 1$, les mêmes arguments s'appliquent aux intervalles $[k, k + 1]$ pour $1 \leq k \leq m - 1$, et aux intervalles $[k - 1, k]$ pour $m + 2 \leq k \leq 2m$. Il reste l'intervalle central $[m, m + 1]$.

Sur cet intervalle, g décroît jusqu'à $m + 1/2$ puis croît. Ses deux valeurs aux extrémités sont égales, car $g(m) = g(m + 1)$ par symétrie. Donc $g(x) \leq g(m)$ sur tout $[m, m + 1]$ et $\int_m^{m+1} g(x) dx \leq g(m)$. En ajoutant les trois contributions,

$$\int_1^{2m} g(x) dx \leq \sum_{k=1}^{m-1} g(k) + g(m) + \sum_{k=m+2}^{2m} g(k) \leq \sum_{k=1}^{2m} g(k).$$

Pour $m = 1$, les deux sommes latérales sont vides, ce qui traite aussi $p = 3$. Dans tous les cas,

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k(p-k)}} \geq \int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}}.$$

Méthode 2 — Utiliser la convexité et les cordes.

Cette méthode donne une comparaison sans distinguer les deux parités. Sur $]0, p[$, posons $q(x) = x(p - x) > 0$. Une seconde dérivation donne

$$g''(x) = q(x)^{-3/2} + \frac{3}{4}(p - 2x)^2 q(x)^{-5/2} > 0.$$

La fonction g est donc convexe. Pour $p \geq 3$, $1 \leq k \leq p - 2$ et $s \in [0, 1]$, la définition de la convexité donne

$$g(k + s) \leq (1 - s)g(k) + sg(k + 1).$$

En intégrant par rapport à s sur $[0, 1]$,

$$\int_k^{k+1} g(x) dx \leq \frac{g(k) + g(k + 1)}{2}.$$

La somme de ces inégalités conduit à

$$\int_1^{p-1} g(x) dx \leq \frac{1}{2}g(1) + \sum_{k=2}^{p-2} g(k) + \frac{1}{2}g(p-1) \leq \sum_{k=1}^{p-1} g(k).$$

Pour $p = 3$, la somme centrale est vide ; pour $p = 2$, l'inégalité a déjà été vérifiée. Cette seconde preuve utilise les cordes d'une fonction convexe, alors que la première exploite directement les variations demandées en 3 (a).

4. Calcul de l'intégrale par le changement de variable imposé.

Pour $p = 2$, l'intégrale de 1 à 1 vaut 0, et $\pi - 4 \arctan 1 = 0$. La formule est donc vraie dans ce cas.

Supposons $p > 2$. L'application $h : t \mapsto p/(1+t^2)$ est de classe C^1 sur le segment $[1/\sqrt{p-1}, \sqrt{p-1}]$. Sa dérivée $h'(t) = -2pt/(1+t^2)^2$ est strictement négative sur ce segment. Elle envoie la borne $1/\sqrt{p-1}$ sur $p-1$ et la borne $\sqrt{p-1}$ sur 1. Le théorème de changement de variable sur un segment s'applique à la fonction g , continue sur $[1, p-1]$.

Avec $x = p/(1+t^2)$ et $t > 0$,

$$p-x = \frac{pt^2}{1+t^2}, \quad \sqrt{x(p-x)} = \frac{pt}{1+t^2}, \quad dx = -\frac{2pt}{(1+t^2)^2} dt.$$

L'orientation des bornes est inversée, et

$$\int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}} = \int_{\sqrt{p-1}}^{1/\sqrt{p-1}} \frac{-2}{1+t^2} dt = 2 \left(\arctan \sqrt{p-1} - \arctan \frac{1}{\sqrt{p-1}} \right).$$

En utilisant Préliminaire 1 (b) avec $x = \sqrt{p-1} > 0$, cette valeur devient

$$\pi - 4 \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{p-1}} \right).$$

La formule demandée est ainsi établie pour tout entier $p \geq 2$, sans traiter l'intégrale comme impropre : ses bornes restent à l'intérieur de $]0, p[$.

5. Convergence de la série de terme général u_p .

Les termes sont positifs. Pour $p \geq 2$, Préliminaire 1 (c), appliqué à $1/\sqrt{p-1}$, donne

$$0 \leq u_p = \frac{1}{p-1} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{p-1}} \right) \leq \frac{1}{(p-1)^{3/2}}.$$

La série

$$\sum_{p=2}^{+\infty} (p-1)^{-3/2}$$

est une série de Riemann convergente, car $3/2 > 1$. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs entraîne la convergence de

$$\sum_{p=2}^{+\infty} u_p.$$

Notons sa somme S , qui est un réel fini et positif ; ses sommes partielles sont comprises entre 0 et S .

6. (a) Équivalent de la norme au carré.

Par définition de W ,

$$\|W\|^2 = \sum_{k=1}^n 1/k.$$

Notons h_n cette somme harmonique.

Méthode 1 — Comparaison avec une intégrale.

La fonction $x \mapsto 1/x$ est positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. Sur $[k, k+1]$, son intégrale est au plus $1/k$. Pour $k \geq 2$, son intégrale sur $[k-1, k]$ est au moins $1/k$. En sommant,

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq h_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \ln n.$$

Pour $n \geq 2$, on divise par $\ln n > 0$. On a $\ln(n+1)/\ln n = 1 + \ln(1+1/n)/\ln n \rightarrow 1$ et $(1 + \ln n)/\ln n \rightarrow 1$. Le théorème d'encadrement donne $h_n/\ln n \rightarrow 1$, donc $\|W\|^2 \sim \ln n$.

Méthode 2 — Isoler une somme télescopique.

Pour $k \geq 1$, posons $d_k = 1/k - \ln(1 + 1/k)$. Comme $\ln(1+a) = \int_0^a 1/(1+t) dt$ pour $a \geq 0$,

$$d_k = \int_0^{1/k} \frac{t}{1+t} dt.$$

On en déduit $0 \leq d_k \leq \int_0^{1/k} t dt = 1/(2k^2)$. La série de Riemann d'exposant 2 converge, donc les sommes partielles

$$\sum_{k=1}^n d_k$$

sont bornées. Or

$$\sum_{k=1}^n \ln(1 + 1/k) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1).$$

Ainsi

$$h_n - \ln(n+1) = \sum_{k=1}^n d_k$$

reste borné. En divisant par $\ln n \rightarrow +\infty$, et en utilisant $\ln(n+1)/\ln n \rightarrow 1$, on obtient de nouveau $h_n/\ln n \rightarrow 1$.

La comparaison intégrale donne immédiatement un encadrement. La seconde méthode exprime l'erreur par les sommes partielles d'une série convergente et s'applique à d'autres sommes proches d'un logarithme.

6. (b) Détermination de la limite.

On combine la minoration obtenue en III avec la majoration spectrale de I. Posons $Q_n = W^T H_n W$ et, pour $n \geq 2$,

$$S_n = \sum_{p=2}^n u_p.$$

D'après III.2, III.3 (b) et III.4,

$$Q_n \geq \sum_{p=2}^n \frac{1}{p-1} \left(\pi - 4 \arctan \frac{1}{\sqrt{p-1}} \right) = \pi h_{n-1} - 4S_n.$$

Tous les coefficients $1/(p-1)$ sont strictement positifs, ce qui justifie l'utilisation des minoration terme à terme. Par I.2 (b), $Q_n \leq \beta_n \|W\|^2 = \beta_n h_n$. Comme $h_n > 0$,

$$\beta_n \geq \pi \frac{h_{n-1}}{h_n} - \frac{4S_n}{h_n} = \pi - \frac{\pi}{nh_n} - \frac{4S_n}{h_n}.$$

La dernière égalité utilise l'identité exacte $h_{n-1} = h_n - 1/n$. La question 5 assure $0 \leq S_n \leq S < +\infty$, et la question 6 (a) entraîne $h_n \rightarrow +\infty$. Par conséquent $\pi/(nh_n) \rightarrow 0$ et $4S_n/h_n \rightarrow 0$.

La majoration II.4 (c) fournit l'autre côté de l'encadrement :

$$\pi - \frac{\pi}{nh_n} - \frac{4S}{h_n} \leq \beta_n \leq \pi, \quad n \geq 2.$$

Les deux bornes tendent vers π . On conclut par le théorème d'encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \pi.$$

Relevé des adaptations

- Préliminaire 2 (c) : Code adapté en Python. La simulation par inversion est conservée ; les commandes NumPy sont précisées et un tirage nul est renouvelé pour que l'argument de la tangente appartienne à $] -\pi/2, \pi/2[$.
- Partie II, 2 (a) à 2 (d) : reformulation avec les deux sommes réelles C_P et S_P . Les intégrales trigonométriques et Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$ établissent entièrement la conséquence réelle nécessaire, sans utiliser les objets exclus du programme. Les notations correspondantes du préambule sont retirées.
- Partie II, 3 (b) : les deux identités pour C_{R^2} et S_{R^2} remplacent le calcul initial et sont démontrées à partir des formules d'addition. Les notations réelles R , C_X et S_X sont définies avant les questions 3 et 4.
- Partie II, 4 (a) : la fonction à étudier est définie par $\varphi = C_X^2 + S_X^2$. Sa périodicité, sa parité et l'égalité des intégrales sont conservées ; cette écriture permet de poursuivre la majoration de 4 (b) entièrement dans $\mathbb{R}$.