



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

2005

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On rappelle que, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{(x-1) \ln t} e^{-t} dt$ est convergente.

La fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et associe à tout réel $x > 0$ le réel strictement positif

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Pour tout réel $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Pour tout entier naturel k non nul et toute fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$, k fois dérivable, on note $f^{(k)}$ la dérivée k -ième de f . Les dérivées première et seconde sont également notées f' et f'' .

Dans les parties II et III, $\exp$ désigne la fonction exponentielle. Les parties III et IV sont indépendantes.

Le problème a pour objet la mise en évidence de certaines propriétés de la fonction Γ .

Partie I. Une expression de $\Gamma(x)$

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

1. (a) Pour tout réel u tel que $0 \leq u < 1$, montrer que $\ln(1-u) \leq -u$. En déduire, pour tout réel $t \in [0, n]$, l'inégalité

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

1. (b) Étudier les variations de la fonction φ définie sur $[0, \sqrt{n}[$ par

$$\varphi(t) = \ln \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) - t - n \ln \left(1 - \frac{t}{n}\right).$$

Établir, pour tout réel $t \in [0, \sqrt{n}]$, l'inégalité

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

1. (c) Justifier, pour tout réel $t \in [0, n]$, les inégalités

$$e^{-t} - \frac{t^2}{n} e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

En déduire que, pour tout réel $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

2. (a) Pour tout réel $x > 0$ et tout entier naturel n non nul, montrer que les intégrales

$$\int_0^1 y^{x-1} dy \text{ et } \int_0^1 y^{x-1} (1-y)^n dy \text{ sont convergentes.}$$

On pose alors $B_0(x) = \int_0^1 y^{x-1} dy$ et, pour tout $n \geq 1$, $B_n(x) = \int_0^1 y^{x-1} (1-y)^n dy$.

2. (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité

$$B_n(x) = \frac{n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule

$$B_n(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}.$$

2. (c) Montrer, pour tout réel $x > 0$, que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

En déduire, pour tout réel $x > 0$, que $\Gamma(x+n) \sim n^x (n-1)!$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

2. (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\lambda_n = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n+1)/2)}.$$

Montrer que $\lambda_n \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Partie II. Dérivabilité de la fonction Γ et conséquences

1. (a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul et tout réel $x > 0$, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} (\ln t)^k e^{-t} dt$ est absolument convergente. On note $g_k(x)$ la valeur de cette intégrale.

1. (b) Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$. Soient x_0 et x deux éléments distincts de $[a, b]$. Établir l'inégalité

$$|\Gamma(x) - \Gamma(x_0) - (x - x_0)g_1(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{2} \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \left(\sup_{\alpha \in [a, b]} t^{\alpha-1} \right) e^{-t} dt.$$

1. (c) Montrer l'inégalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \left(\sup_{\alpha \in [a, b]} t^{\alpha-1} \right) e^{-t} dt \leq \int_0^1 (\ln t)^2 t^{a-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} (\ln t)^2 t^{b-1} e^{-t} dt.$$

En déduire que Γ est dérivable en x_0 et que $\Gamma'(x_0) = g_1(x_0)$.

1. (d) Établir que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\Gamma' = g_1$.

On montrerait de même que Γ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\Gamma'' = g_2$. Ce résultat est admis dans toute la suite du problème.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\gamma_n = -\ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

2. (a) Établir, pour tout entier $n \geq 2$, la double inégalité

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \ln n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $0 < \gamma_n \leq 1$.

2. (b) Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente. On note γ sa limite.

3. (a) Pour tout réel $x > 0$ et tout entier $n > 0$, montrer l'égalité

$$\prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k} \right) \exp \left(-\frac{x}{k} \right) \right] = \exp(-x\gamma_n) \frac{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)}{n^x n!}.$$

3. (b) On pose

$$v_n(x) = \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k} \right) \exp \left(-\frac{x}{k} \right) \right].$$

Montrer que la suite $(v_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note $\ell(x)$ sa limite. Montrer la relation

$$\ell(x) = \frac{\exp(-\gamma x)}{x\Gamma(x)}.$$

4. (a) Soit $x > 0$ fixé. Montrer que la série de terme général $\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$, $n \geq 1$, est convergente.

4. (b) Justifier, pour tout réel $x > 0$, l'égalité

$$\ln(\ell(x)) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right].$$

En déduire, pour tout réel $x > 0$, la relation

$$\ln(\Gamma(x)) = -\gamma x - \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right].$$

5. Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\psi(x) = \frac{d}{dx}[\ln(\Gamma(x))]$.

Établir, pour tout réel $x > 0$, l'égalité $\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$.

Déterminer un équivalent simple de $\psi(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Justifier, pour tout entier $n \geq 2$, la formule

$$\psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

6. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction U_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$U_n(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n}.$$

On désigne par $A(x)$ la somme de la série de terme général $U_n(x)$.

6. (a) Montrer que A est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, exprimer, pour tout réel $x > 0$, $A'(x)$ et $A''(x)$ en fonction de $\Gamma(x)$, $\Gamma'(x)$ et $\Gamma''(x)$.

6. (b) Soit $x > 0$ fixé. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, la série de terme général $U_n^{(k)}(x)$ est absolument convergente.

Dans toute la suite du problème, on admet les deux résultats suivants : pour tout réel $x > 0$,

$$A'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n'(x) \quad \text{et} \quad A''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n''(x).$$

7. Calculer $\psi(1)$ en fonction de γ . En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln n - \psi(n))$.

8. On veut établir dans cette question que, pour tout réel $y > 0$, on a $\psi'(y) > \frac{1}{y}$.

Soit $x > 0$ fixé. On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $G(t) = \frac{1}{(t+x)^2}$.

8. (a) Montrer que, sur $\mathbb{R}_+^*$, G est positive, strictement décroissante, et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} G(t) dt$ est convergente.

8. (b) En déduire la double inégalité

$$0 < \int_1^{+\infty} G(t) dt < \sum_{k=1}^{+\infty} G(k).$$

8. (c) Établir l'inégalité $\psi'(x) > \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2}$. Conclure.

Partie III. Estimation des paramètres d'une loi $\Gamma(\theta, r)$

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi $\Gamma(\theta, r)$, les deux paramètres inconnus θ et r étant des réels strictement positifs. Une densité f de X est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)\theta^r} x^{r-1} \exp(-x/\theta) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Soit $p \geq 2$ un entier. On considère un échantillon i.i.d. $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ de la loi de X : les variables $X_1, \dots, X_p$ sont mutuellement indépendantes et de même loi que X .

On désigne par $x_1, \dots, x_p$ un p -échantillon de réalisations des variables $X_1, \dots, X_p$ respectivement. Les réels $x_1, \dots, x_p$ sont fixés, strictement positifs et non tous égaux.

Soit L la fonction, appelée fonction de vraisemblance, définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ par

$$L(\theta, r) = \prod_{i=1}^p f(x_i).$$

On pose $F(\theta, r) = \ln(L(\theta, r))$.

1. Montrer que la recherche du maximum de L sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ est équivalente à la recherche du maximum de F sur ce même ensemble.
2. (a) Établir l'existence sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de F . Les calculer.
2. (b) Montrer que les éventuels points critiques (θ^*, r^*) vérifient le système (S) d'équations suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} \theta^* r^* = \bar{x}, & (1) \\ \ln r^* - \frac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma(r^*)} = \ln \bar{x} - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \ln x_i, & (2) \end{cases}$$

avec

$$\bar{x} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i.$$

3. On pose

$$K_p = \ln \bar{x} - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \ln x_i.$$

3. (a) Justifier, pour tout réel $x > 0$ différent de 1, l'inégalité $\ln x < x - 1$. En déduire que $K_p > 0$.

3. (b) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$h(y) = \ln y - \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} - K_p.$$

Étudier les variations de h et dresser son tableau de variations.

3. (c) Montrer que l'équation (2) admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une unique solution r^* . En déduire que le système (S) admet une unique solution (θ^*, r^*) .

4. Écrire la hessienne $\nabla^2 F$ de F au point (θ^*, r^*) . En déduire qu'au point (θ^*, r^*) , L admet un maximum local.

On peut démontrer qu'en ce point on obtient en fait un maximum global de L . On dit que le couple (θ^*, r^*) est une estimation du couple inconnu (θ, r) obtenue par la méthode du maximum de vraisemblance.

Partie IV. Estimateur sans biais de l'écart-type d'une loi normale centrée

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée et d'écart-type σ , où le paramètre réel inconnu σ est strictement positif.

- Montrer que $T = \frac{X^2}{2\sigma^2}$ suit une loi gamma de paramètre $1/2$ et de taux 1. En déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un n -échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ i.i.d. (indépendant et identiquement distribué) de la loi de X .

2. (a) On désigne par S_n la variable aléatoire

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{2\sigma^2}.$$

Quelle est sa loi de probabilité ?

2. (b) En déduire que

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

est un estimateur sans biais de σ^2 .

3. (a) Montrer que l'espérance de $\sqrt{Y_n}$, notée $E(\sqrt{Y_n})$, vérifie $E(\sqrt{Y_n}) < \sigma$.

3. (b) Donner l'expression de $E(\sqrt{Y_n})$ en fonction de n et de σ .

3. (c) Montrer que la variable aléatoire

$$\hat{\sigma}_n = \frac{\lambda_n}{\sqrt{2}} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^{1/2},$$

où λ_n a été défini en I.2.(d), est un estimateur sans biais de σ .

4. (a) Calculer la variance $V(\hat{\sigma}_n)$ en fonction de n et de σ .

4. (b) La suite $(\hat{\sigma}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'estimateurs de σ converge-t-elle en probabilité vers σ ?