



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

2005

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I. Une expression de $\Gamma(x)$

Dans cette partie, $x > 0$. On utilise les propriétés de Γ rappelées dans le préambule. En outre, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, donc la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ donne, par récurrence, $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $n \geq 1$ un entier.

1. (a) Méthode 1 — Étude d'une différence

Posons $q(u) = \ln(1-u) + u$ pour $0 \leq u < 1$. Alors $q(0) = 0$ et

$$q'(u) = -\frac{1}{1-u} + 1 = -\frac{u}{1-u} \leq 0.$$

Ainsi $q(u) \leq 0$, soit $\ln(1-u) \leq -u$. Pour $0 \leq t < n$, on applique cette inégalité à $u = t/n$ puis on multiplie par $n > 0$:

$$n \ln(1 - t/n) \leq -t.$$

La croissance de l'exponentielle donne $(1 - t/n)^n \leq e^{-t}$. Pour $t = n$, le membre de gauche vaut 0, et la même inégalité reste vraie.

Méthode 2 — Tangente à une fonction concave

La fonction $u \mapsto \ln(1-u)$ a pour dérivée seconde $-1/(1-u)^2 < 0$ sur $] -\infty, 1[$. Elle est donc concave et son graphe est situé sous sa tangente en 0, d'équation $v = -u$. D'où $\ln(1-u) \leq -u$. Le passage à l'exponentielle et le traitement de $t = n$ sont identiques aux étapes précédentes, et donnent l'inégalité demandée sur $[0, n]$.

La première méthode étudie directement le signe d'une différence ; la seconde reconnaît une inégalité de tangente, réutilisable pour d'autres fonctions concaves.

1. (b) Pour $0 \leq t < \sqrt{n}$, les deux arguments des logarithmes sont strictement positifs : $t^2 < n$ et $t < n$, y compris lorsque $n = 1$. La fonction est continue sur cet intervalle et

dérivable à l'intérieur. Sa dérivée est

$$\varphi'(t) = -\frac{2t}{n-t^2} - 1 + \frac{n}{n-t} = \frac{t(2t-n-t^2)}{(n-t)(n-t^2)} = -\frac{t((t-1)^2+n-1)}{(n-t)(n-t^2)}.$$

Le dénominateur est strictement positif. Pour $t > 0$, le numérateur est strictement négatif : si $n > 1$, on a $n-1 > 0$; si $n = 1$, on a $t < 1$ et $(t-1)^2 > 0$. Donc φ est strictement décroissante, avec $\varphi(0) = 0$.

Pour préciser sa limite au bord : si $n > 1$, seul $\ln(1-t^2/n)$ tend vers $-\infty$, tandis que les autres termes ont une limite finie, donc $\varphi(t) \rightarrow -\infty$. Si $n = 1$, la factorisation $1-t^2 = (1-t)(1+t)$ donne $\varphi(t) = \ln(1+t) - t$, de limite $\ln 2 - 1 < 0$ lorsque $t \rightarrow 1^-$.

De $\varphi(t) \leq 0$, on déduit

$$\ln(1-t^2/n) - t \leq n \ln(1-t/n),$$

puis, par exponentiation,

$$(1-t^2/n)e^{-t} \leq (1-t/n)^n.$$

Cette preuve vaut pour $t < \sqrt{n}$. Au point $t = \sqrt{n}$, le membre de gauche est nul et celui de droite est non négatif. L'inégalité vaut donc sur tout $[0, \sqrt{n}]$.

1. (c) Sur $[0, \sqrt{n}]$, l'inégalité inférieure vient de I.1.(b). Sur $[\sqrt{n}, n]$, le facteur $1-t^2/n$ est non positif, tandis que $(1-t/n)^n \geq 0$, ce qui prouve encore cette inégalité.

L'inégalité supérieure vient de I.1.(a). Ainsi, sur $[0, n]$,

$$0 \leq e^{-t} - (1-t/n)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}.$$

Fixons $x > 0$ et notons $I_n(x) = \int_0^n (1-t/n)^n t^{x-1} dt$. Cette intégrale converge au voisinage de 0, car son intégrande positive est majorée par t^{x-1} , intégrable puisque $x > 0$. Il n'existe pas d'autre difficulté sur $[0, n]$.

En multipliant l'encadrement par $t^{x-1} > 0$ et en intégrant d'abord sur $[\varepsilon, n]$, puis en

faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$0 \leq \int_0^n t^{x-1} e^{-t} dt - I_n(x) \leq \frac{1}{n} \int_0^n t^{x+1} e^{-t} dt \leq \frac{\Gamma(x+2)}{n}.$$

Par Chasles pour des intégrales convergentes,

$$0 \leq \Gamma(x) - I_n(x) \leq \int_n^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt + \frac{\Gamma(x+2)}{n}.$$

Le premier terme tend vers 0 par convergence de l'intégrale définissant $\Gamma(x)$; le second tend aussi vers 0. Par encadrement, $I_n(x) \rightarrow \Gamma(x)$. Aucun échange entre une limite et une intégrale n'a été utilisé.

2. (a) Pour $\varepsilon \in]0, 1[$,

$$\int_\varepsilon^1 y^{x-1} dy = \frac{1 - \varepsilon^x}{x}.$$

Comme $x > 0$, on a $\varepsilon^x \rightarrow 0$, donc $B_0(x) = 1/x$. D'autre part, sur $]0, 1[$,

$$0 \leq y^{x-1}(1-y)^n \leq y^{x-1}.$$

La comparaison avec l'intégrale précédente prouve la convergence de $B_n(x)$. Au voisinage de 1, l'intégrande est continue et se prolonge par 0 lorsque $n \geq 1$.

2. (b) Pour $n \geq 1$, on intègre par parties sur $[\varepsilon, 1]$, en prenant une primitive y^x/x de y^{x-1} :

$$\int_\varepsilon^1 y^{x-1}(1-y)^n dy = \left[\frac{y^x}{x}(1-y)^n \right]_\varepsilon^1 + \frac{n}{x} \int_\varepsilon^1 y^x(1-y)^{n-1} dy.$$

Le terme de bord en 1 est nul. Celui en ε tend vers 0 car $\varepsilon^x(1-\varepsilon)^n \rightarrow 0$. L'intégrale restante converge par I.2.(a), avec $x+1 > 0$, y compris si $n-1=0$. On obtient donc

$$B_n(x) = \frac{n}{x} B_{n-1}(x+1).$$

On itère cette relation n fois puis on utilise $B_0(x+n) = 1/(x+n)$:

$$B_n(x) = \frac{n(n-1)\cdots 1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} B_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

La relation fonctionnelle de Γ donne

$$\Gamma(x+n+1) = x(x+1)\cdots(x+n)\Gamma(x).$$

Comme $\Gamma(n+1) = n!$, on en déduit $B_n(x) = \Gamma(x)\Gamma(n+1)/\Gamma(x+n+1)$. Cette égalité vaut aussi pour $n=0$, puisque son membre de droite est $\Gamma(x)/\Gamma(x+1) = 1/x = B_0(x)$.

2. (c) Dans $I_n(x)$, le changement de variable affine $t = ny$ donne, en travaillant d'abord sur un segment puis en passant à la limite au bord 0,

$$I_n(x) = n^x \int_0^1 (1-y)^n y^{x-1} dy = n^x B_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

D'après I.1.(c), ce quotient tend vers $\Gamma(x)$. En utilisant I.2.(b), on peut aussi l'écrire

$$I_n(x) = \frac{n^x n! \Gamma(x)}{\Gamma(x+n+1)}.$$

Puisque $\Gamma(x) > 0$, il vient $n^x n! / \Gamma(x+n+1) \rightarrow 1$, donc $\Gamma(x+n+1) \sim n^x n!$. Enfin,

$$\frac{\Gamma(x+n)}{n^x (n-1)!} = \frac{\Gamma(x+n+1)}{n^x n!} \frac{n}{x+n} \rightarrow 1.$$

Ainsi $\Gamma(x+n) \sim n^x (n-1)!$. On n'utilise aucune formule asymptotique extérieure concernant la fonction Gamma ou les factorielles.

2. (d) L'asymptotique précédente s'applique pour un décalage x fixé. On distingue donc les indices pairs et impairs, au lieu de l'utiliser directement avec un décalage dépendant de n .

Pour $n = 2m$ et $m \rightarrow +\infty$, I.2.(c) avec $x = 1/2$ donne $\Gamma(m+1/2) \sim \sqrt{m} (m-1)!$, tandis que $\Gamma(m) = (m-1)!$. D'où

$$\lambda_{2m} \sim \frac{1}{\sqrt{m}} = \sqrt{\frac{2}{2m}}.$$

Pour $n = 2m + 1$,

$$\lambda_{2m+1} = \frac{\Gamma(m + 1/2)}{\Gamma(m + 1)} \sim \frac{\sqrt{m}(m-1)!}{m!} = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Or $\sqrt{(2m+1)/(2m)} \rightarrow 1$, donc $\lambda_{2m+1}/\sqrt{2/(2m+1)} \rightarrow 1$. Les sous-suites paires et impaires du quotient $\lambda_n/\sqrt{2/n}$ tendent toutes deux vers 1 ; le quotient entier tend donc vers 1. Ainsi $\lambda_n \sim \sqrt{2/n}$.

Partie II. Dérivabilité de la fonction Γ et conséquences

1. (a) On étudie séparément les deux bornes de l'intégrale, avec $k \geq 1$ et $x > 0$ fixés.

Au voisinage de 0, les croissances comparées donnent $t^{x/2} |\ln t|^k \rightarrow 0$. Par conséquent,

$$t^{x-1} |\ln t|^k e^{-t} = o(t^{x/2-1}).$$

Or $x/2 - 1 > -1$, donc la fonction puissance $t^{x/2-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

Au voisinage de $+\infty$, les croissances comparées donnent $t^{x-1} |\ln t|^k e^{-t/2} \rightarrow 0$. Ainsi

$$t^{x-1} |\ln t|^k e^{-t} = o(e^{-t/2}),$$

et $e^{-t/2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. L'intégrande est continue sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$. Les deux comparaisons prouvent la convergence absolue et définissent un réel $g_k(x)$.

1. (b) Pour chaque $t > 0$ fixé, on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction

$q_t(z) = t^{z-1}$ entre x_0 et x , sur le segment $[a, b]$. Ses dérivées sont

$$q'_t(z) = (\ln t)t^{z-1}, \quad q''_t(z) = (\ln t)^2 t^{z-1}.$$

Donc

$$|t^{x-1} - t^{x_0-1} - (x - x_0)(\ln t)t^{x_0-1}| \leq \frac{(x - x_0)^2}{2} (\ln t)^2 \sup_{\alpha \in [a, b]} t^{\alpha-1}.$$

La majorante obtenue après multiplication par e^{-t} est intégrable. En effet, pour $0 < t < 1$, son facteur puissance vaut t^{a-1} ; pour $t > 1$, il vaut t^{b-1} . Les deux intégrales avec $(\ln t)^2$ convergent par II.1.(a).

On multiplie l'inégalité ponctuelle par e^{-t} , puis on l'intègre sur $[\varepsilon, R]$. L'inégalité triangulaire pour l'intégrale donne une majoration de la valeur absolue de l'intégrale de la différence. On fait ensuite tendre ε vers 0 et R vers $+\infty$; tous les termes convergent, par le préambule, II.1.(a) et la majoration ci-dessus. On obtient exactement

$$|\Gamma(x) - \Gamma(x_0) - (x - x_0)g_1(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{2} \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \left(\sup_{\alpha \in [a, b]} t^{\alpha-1} \right) e^{-t} dt.$$

1. (c) Pour $0 < t < 1$, $\ln t < 0$, donc la fonction $\alpha \mapsto t^{\alpha-1}$ est décroissante; son supremum sur $[a, b]$ est t^{a-1} . Pour $t > 1$, elle est croissante et son supremum est t^{b-1} . En $t = 1$, toutes les puissances valent 1 et le facteur $(\ln t)^2$ est nul. Il y a donc, en réalité, égalité dans la majoration demandée. Notons $M_{a,b}$ la somme des deux intégrales du membre de droite; elle est finie d'après II.1.(a).

Pour $x \neq x_0$, II.1.(b) entraîne

$$\left| \frac{\Gamma(x) - \Gamma(x_0)}{x - x_0} - g_1(x_0) \right| \leq \frac{M_{a,b}}{2} |x - x_0|.$$

Si x_0 est intérieur à $[a, b]$, cet encadrement prouve immédiatement la dérivabilité en x_0 . Si x_0 est une extrémité, on l'inclut dans un segment plus grand contenu dans $\mathbb{R}_+^*$, et on applique les mêmes estimations des deux côtés. Dans tous les cas, $\Gamma'(x_0) = g_1(x_0)$.

1. (d) Tout $x_0 > 0$ appartient à l'intérieur d'un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, par exemple $[x_0/2, 3x_0/2]$. La question précédente s'applique donc à chaque $x_0 > 0$, et donne $\Gamma' = g_1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le sujet admet ensuite que Γ est deux fois dérivable et $\Gamma'' = g_2$. Pour les applications de la hessienne dans la partie III, on précise également sa régularité C^2 , avec une justification élémentaire de la continuité de g_2 .

Pour $x, x_0 \in [a, b]$ et $t > 0$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à $z \mapsto t^{z-1}$ donne

$$|t^{x-1} - t^{x_0-1}| \leq |x - x_0| |\ln t| \sup_{\alpha \in [a, b]} t^{\alpha-1}.$$

On multiplie par $(\ln t)^2 e^{-t}$, on intègre sur des segments puis on passe aux bornes impropres. Il vient

$$|g_2(x) - g_2(x_0)| \leq |x - x_0| \left(\int_0^1 |\ln t|^3 t^{a-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} |\ln t|^3 t^{b-1} e^{-t} dt \right).$$

La parenthèse est finie par II.1.(a). Ainsi g_2 est continue, et Γ est bien de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. Cette vérification ne repose pas sur une dérivation automatique sous le signe intégral.

2. On note

$$H_n = \sum_{k=1}^n 1/k,$$

de sorte que $\gamma_n = H_n - \ln n$.

2. (a) La fonction $t \mapsto 1/t$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour chaque entier $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} < \frac{1}{k}.$$

Les inégalités sont strictes car la fonction est strictement comprise entre ces deux constantes à l'intérieur du segment. On somme pour $k = 1, \dots, n-1$, avec $n \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

La première inégalité donne $\gamma_n < 1$; la seconde donne $\gamma_n > 1/n > 0$. Pour $n = 1$, on a $\gamma_1 = 1$. Ainsi $0 < \gamma_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$.

2. (b) Calculons un accroissement :

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}.$$

Par la stricte décroissance de $1/t$, l'intégrale est strictement supérieure à $1/(n+1)$. Donc $\gamma_{n+1} < \gamma_n$. La suite est décroissante et minorée par 0 ; le théorème de la limite monotone prouve sa convergence vers un réel $\gamma \in [0, 1]$.

3. (a) On sépare le produit fini en un produit de facteurs rationnels et un produit d'exponentielles :

$$\prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k} \right) e^{-x/k} \right] = \frac{(x+1) \cdots (x+n)}{n!} \exp \left(-x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right).$$

Or $H_n = \gamma_n + \ln n$. Ainsi $e^{-xH_n} = e^{-x\gamma_n} n^{-x}$. En remplaçant, on obtient

$$v_n(x) = e^{-x\gamma_n} \frac{(x+1) \cdots (x+n)}{n^x n!},$$

ce qui est l'identité demandée.

3. (b) Pour $x > 0$ fixé, I.2.(c) donne

$$\frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} \longrightarrow \Gamma(x) > 0.$$

On peut donc prendre les inverses, et

$$\frac{(x+1) \cdots (x+n)}{n^x n!} \longrightarrow \frac{1}{x\Gamma(x)}.$$

D'autre part, II.2.(b) et la continuité de l'exponentielle donnent $e^{-x\gamma_n} \rightarrow e^{-x\gamma}$. L'identité de II.3.(a) entraîne la convergence de $v_n(x)$ et

$$\ell(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x\Gamma(x)} > 0.$$

La stricte positivité de cette limite sera nécessaire pour passer au logarithme.

4. (a) Méthode 1 — Développement limité

Pour $u \rightarrow 0$, on a $\ln(1 + u) = u - u^2/2 + o(u^2)$. En prenant $u = x/n \rightarrow 0$, il vient

$$\frac{x}{n} - \ln(1 + x/n) \sim \frac{x^2}{2n^2}.$$

De plus, $\ln(1 + u) \leq u$ pour $u \geq 0$, par concavité du logarithme ou étude de $u - \ln(1 + u)$. Les termes sont donc non négatifs. Par équivalence avec une série de Riemann convergente, la série demandée converge.

Méthode 2 — Majorant intégral explicite

Pour $u \geq 0$,

$$u - \ln(1 + u) = \int_0^u \left(1 - \frac{1}{1+s}\right) ds = \int_0^u \frac{s}{1+s} ds.$$

Comme $0 \leq s/(1+s) \leq s$, on obtient $0 \leq u - \ln(1 + u) \leq u^2/2$. Avec $u = x/n$,

$$0 \leq \frac{x}{n} - \ln(1 + x/n) \leq \frac{x^2}{2n^2}.$$

La comparaison à

$$\sum 1/n^2$$

prouve la convergence. Cette seconde méthode fournit une majoration pour chaque indice, tandis que la première donne un équivalent précis du terme général.

4. (b) Pour chaque $N \geq 1$, les facteurs définissant $v_N(x)$ sont strictement positifs ; les règles du logarithme pour un produit fini donnent

$$\ln(v_N(x)) = \sum_{n=1}^N \left[\ln(1 + x/n) - \frac{x}{n} \right].$$

La somme de droite converge par II.4.(a). Comme $v_N(x) \rightarrow \ell(x) > 0$, la continuité du logarithme en $\ell(x)$ permet de passer à la limite dans le membre de gauche. Donc

$$\ln(\ell(x)) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{x}{n} - \ln(1 + x/n) \right].$$

La formule de II.3.(b) donne aussi $\ln(\ell(x)) = -\gamma x - \ln x - \ln(\Gamma(x))$. En identifiant puis en isolant $\ln(\Gamma(x))$,

$$\ln(\Gamma(x)) = -\gamma x - \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{x}{n} - \ln(1 + x/n) \right].$$

Il s'agit d'un passage à la limite de sommes finies convergentes, sans dérivation d'une série.

5. La fonction Γ est positive et de classe C^2 , donc $\ln \Gamma$ est de classe C^2 et $\psi = \Gamma'/\Gamma$ est de classe C^1 .

En prenant le logarithme de $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, puis en dérivant une identité de fonctions dérivables,

$$\ln \Gamma(x+1) = \ln x + \ln \Gamma(x) \quad \implies \quad \psi(x+1) = \frac{1}{x} + \psi(x).$$

Pour $x \rightarrow 0^+$, on réécrit $\psi(x) = \psi(x+1) - 1/x$. La continuité de ψ en 1 implique $\psi(x+1) \rightarrow \psi(1)$, donc

$$x\psi(x) = x\psi(x+1) - 1 \longrightarrow -1.$$

Ainsi $\psi(x) \sim -1/x$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.

Enfin, pour $n \geq 2$, on somme les identités $\psi(k+1) - \psi(k) = 1/k$, pour $k = 1, \dots, n-1$.

Les termes se télescopent, et

$$\psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

6. La série définissant $A(x)$ converge absolument, car $U_n(x)$ est l'opposé du terme non négatif étudié en II.4.(a).

6. (a) D'après II.4.(b),

$$A(x) = -\gamma x - \ln x - \ln \Gamma(x).$$

Cette expression est une combinaison de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$; elle prouve la dérivabilité deux fois de A sans avoir à dériver terme à terme sa série. On calcule

$$A'(x) = -\gamma - \frac{1}{x} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} - \psi(x),$$

puis

$$A''(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)} + \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right)^2 = \frac{1}{x^2} - \psi'(x).$$

Tous les quotients sont définis puisque $\Gamma(x) > 0$.

6. (b) Pour $k = 1$,

$$U'_n(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} = -\frac{x}{n(n+x)},$$

donc $|U'_n(x)| \leq x/n^2$. La série est absolument convergente par comparaison à une série de Riemann.

Pour $k \geq 2$, le terme linéaire $-x/n$ ne contribue plus aux dérivées. Des dérivations successives donnent

$$U_n^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(n+x)^k}.$$

On peut vérifier cette formule par récurrence : elle vaut pour $k = 2$, et la dérivation multiplie par $-k$ et augmente la puissance du dénominateur de 1. Ainsi

$$|U_n^{(k)}(x)| \leq \frac{(k-1)!}{n^k},$$

et la série est absolument convergente puisque $k \geq 2$.

La convergence de ces séries numériques ne suffit pas, à elle seule, à autoriser une dérivation terme à terme. On utilise ensuite uniquement les deux identités explicitement admises dans le sujet :

$$A' = \sum U'_n$$

et

$$A'' = \sum U''_n.$$

7. En $x = 1$, la première identité admise donne

$$A'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right).$$

Pour $N \geq 1$, la somme partielle vaut $1/(N+1) - 1$, donc $A'(1) = -1$. Or II.6.(a) donne $A'(1) = -\gamma - 1 - \psi(1)$. On en déduit

$$\psi(1) = -\gamma.$$

La formule de II.5, également valable pour $n = 1$ avec une somme vide, donne

$$\psi(n) = -\gamma + H_{n-1}. \text{ Comme } H_{n-1} = H_n - 1/n = \gamma_n + \ln n - 1/n,$$

$$\ln n - \psi(n) = \gamma - \gamma_n + \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Ainsi la limite demandée est 0.

8. Fixons $x > 0$ et posons $G(t) = 1/(t+x)^2$.

8. (a) Pour $t > 0$, $G(t) > 0$ et

$$G'(t) = -\frac{2}{(t+x)^3} < 0.$$

La fonction est donc strictement décroissante. Pour $R > 1$,

$$\int_1^R G(t) dt = \left[-\frac{1}{t+x} \right]_1^R = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{R+x}.$$

Le passage à la limite $R \rightarrow +\infty$ donne une intégrale convergente de valeur $1/(1+x) > 0$.

8. (b) La série

$$\sum_{k \geq 1} G(k)$$

converge, puisque $0 < G(k) \leq 1/k^2$. Pour chaque $k \geq 1$, la stricte décroissance de G donne

$$\int_k^{k+1} G(t) dt < G(k).$$

Pour conserver une stricte inégalité au passage à la limite, on fixe

$$d = G(1) - \int_1^2 G(t) dt > 0. \text{ Pour tout } N \geq 1,$$

$$\sum_{k=1}^N G(k) - \int_1^{N+1} G(t) dt \geq d.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, il vient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} G(k) - \int_1^{+\infty} G(t) dt \geq d > 0.$$

Avec la positivité de l'intégrale,

$$0 < \int_1^{+\infty} G(t) dt < \sum_{k=1}^{+\infty} G(k).$$

8. (c) La seconde identité admise après II.6.(b) donne

$$A''(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} U_k''(x) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}.$$

On combine avec $A''(x) = 1/x^2 - \psi'(x)$:

$$\psi'(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} > \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}.$$

Enfin,

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0.$$

Donc $\psi'(x) > 1/x$ pour tout $x > 0$. La lettre x étant arbitraire, cela établit le résultat annoncé pour tout $y > 0$.

Partie III. Estimation des paramètres d'une loi $\Gamma(\theta, r)$

On travaille sur l'ouvert $D =]0, +\infty[^2$. Les réalisations $x_1, \dots, x_p$ sont fixées, strictement positives et non toutes égales. On pose

$$\bar{x} = p^{-1} \sum_{i=1}^p x_i > 0$$

et

$$m = p^{-1} \sum_{i=1}^p \ln x_i.$$

La densité donnée est bien normalisée : avec le changement de variable affine $x = \theta t$ sur des segments, puis le passage aux bornes impropres,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{r-1} e^{-x/\theta}}{\Gamma(r) \theta^r} dx = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} t^{r-1} e^{-t} dt = 1.$$

Elle est positive pour chaque $x_i > 0$, donc L est strictement positive sur D .

1. Pour deux couples $z, z_0 \in D$, la stricte croissance du logarithme donne

$$L(z) \leq L(z_0) \iff \ln L(z) \leq \ln L(z_0) \iff F(z) \leq F(z_0).$$

Ainsi les points de maximum global de L et de F sont exactement les mêmes. Le même raisonnement sur un voisinage d'un point montre aussi l'équivalence des maxima locaux, avec conservation du caractère strict.

2. (a) En prenant le logarithme du produit fini de densités, on obtient

$$F(\theta, r) = -p \ln \Gamma(r) - pr \ln \theta + (r-1) \sum_{i=1}^p \ln x_i - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^p x_i,$$

soit

$$F(\theta, r) = p[-\ln \Gamma(r) - r \ln \theta + (r-1)m - \bar{x}/\theta].$$

La fonction Γ est positive et de classe C^2 d'après II.1 ; le logarithme et les fonctions rationnelles intervenant ici sont de classe C^2 sur leurs domaines. Il s'ensuit que F est de classe C^2 sur l'ouvert D .

Les dérivées partielles premières sont

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta, r) = -\frac{pr}{\theta} + \frac{p\bar{x}}{\theta^2} = \frac{p}{\theta^2}(\bar{x} - r\theta),$$

$$\frac{\partial F}{\partial r}(\theta, r) = -p \frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)} - p \ln \theta + pm = p[-\psi(r) - \ln \theta + m].$$

Les dérivées partielles secondes sont

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\theta, r) = \frac{pr}{\theta^2} - \frac{2p\bar{x}}{\theta^3},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial r}(\theta, r) = \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}(\theta, r) = -\frac{p}{\theta},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\theta, r) = -p\psi'(r) = -p \left[\frac{\Gamma''(r)}{\Gamma(r)} - \left(\frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)} \right)^2 \right].$$

Elles existent et sont continues sur D , ce qui vérifie la régularité nécessaire pour utiliser la hessienne.

2. (b) Sur l'ouvert D , un point critique vérifie l'annulation des deux dérivées partielles premières. La première équation est équivalente, puisque $p/\theta^2 > 0$, à

$$\theta r = \bar{x}.$$

Comme $r > 0$, cela donne $\theta = \bar{x}/r$. En remplaçant dans la seconde équation,

$$0 = -\psi(r) - \ln(\bar{x}/r) + m = \ln r - \psi(r) - (\ln \bar{x} - m).$$

Les points critiques vérifient donc le système $(S) : \theta r = \bar{x}$ et

$$\ln r - \Gamma'(r)/\Gamma(r) = \ln \bar{x} - p^{-1} \sum \ln x_i.$$

Les transformations sont réversibles, donc les solutions de (S) sont exactement les points critiques de F .

3. On pose $K_p = \ln \bar{x} - m$.

3. (a) Méthode 1 — Inégalité élémentaire du logarithme

Étudions $q(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée est $q'(x) = 1 - 1/x$, négative sur $]0, 1[$ et positive sur $]1, +\infty[$. Le minimum global de q est atteint uniquement en 1 et vaut 0. Ainsi $\ln x \leq x - 1$, avec inégalité stricte lorsque $x \neq 1$.

On applique cette inégalité à $z_i = x_i/\bar{x} > 0$. On a

$$p^{-1} \sum z_i = 1.$$

Au moins un z_i diffère de 1, car les x_i ne sont pas tous égaux. Par sommation, avec au moins une inégalité stricte,

$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \ln z_i < \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (z_i - 1) = 0.$$

Or la somme de gauche vaut $m - \ln \bar{x} = -K_p$. Donc $K_p > 0$.

Méthode 2 — Stricte concavité

La dérivée seconde du logarithme vaut $-1/x^2 < 0$, donc le logarithme est strictement concave sur $]0, +\infty[$. Son graphe est strictement sous sa tangente en 1, hors de ce point : $\ln x < x - 1$ pour $x \neq 1$.

On applique ensuite l'inégalité de stricte concavité à la combinaison finie des x_i avec les poids $1/p > 0$. Comme les x_i ne sont pas tous égaux, elle est stricte :

$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \ln x_i < \ln \left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i \right) = \ln \bar{x}.$$

Ainsi $K_p > 0$. La première preuve exhibe des rapports de moyenne 1 ; la seconde reconnaît directement l'écart strict entre le logarithme de la moyenne et la moyenne des logarithmes.

3. (b) La fonction $h(y) = \ln y - \psi(y) - K_p$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. D'après II.8.(c),

$$h'(y) = \frac{1}{y} - \psi'(y) < 0.$$

Elle est donc strictement décroissante.

Pour étudier 0^+ , on utilise l'identité exacte de II.5, et non une addition non justifiée d'équivalents :

$$h(y) = \ln y + \frac{1}{y} - \psi(y+1) - K_p.$$

La fonction ψ est continue en 1, donc $\psi(y+1)$ reste bornée lorsque $y \rightarrow 0^+$. De plus, $y \ln y \rightarrow 0$, donc

$$yh(y) = y \ln y + 1 - y\psi(y+1) - yK_p \rightarrow 1.$$

Ainsi $h(y) \sim 1/y$, en particulier $h(y) \rightarrow +\infty$ lorsque $y \rightarrow 0^+$.

Pour étudier $+\infty$, II.7 donne, aux entiers, $h(n) = \ln n - \psi(n) - K_p \rightarrow -K_p$. Pour tout $y \geq 1$, posons $n = \lfloor y \rfloor$. La monotonie donne

$$h(n+1) \leq h(y) \leq h(n).$$

Lorsque $y \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$, et les deux bornes tendent vers $-K_p$. Par encadrement, $h(y) \rightarrow -K_p < 0$.

Le tableau de variations est donc :

y	0^+	$]0, +\infty[$	$+\infty$
$h'(y)$		—	
$h(y)$	$+\infty$	strictement décroissante	$-K_p$

La limite négative n'est pas atteinte à un point fini, puisque h est strictement décroissante.

3. (c) L'équation (2) équivaut à $h(r) = 0$. La fonction h est continue, tend vers $+\infty$ en 0^+ et vers $-K_p < 0$ en $+\infty$. Il existe donc a, b tels que $0 < a < b$, $h(a) > 0$ et $h(b) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires sur $[a, b]$ donne une solution $r^* > 0$.

La stricte décroissance de h interdit deux solutions distinctes ; r^* est unique. La première équation impose ensuite $\theta^* = \bar{x}/r^* > 0$. Réciproquement, ce couple satisfait les deux équations. Donc (S) admet une unique solution (θ^*, r^*) , qui est l'unique point critique de F .

4. Méthode 1 — Hessienne et forme quadratique

On a vérifié en III.2.(a) que F est de classe C^2 sur l'ouvert D , et en III.3.(c) que son gradient s'annule au point (θ^*, r^*) . Comme $\bar{x} = \theta^* r^*$, la hessienne en ce point est

$$H = \nabla^2 F(\theta^*, r^*) = -p \begin{pmatrix} \frac{r^*}{(\theta^*)^2} & \frac{1}{\theta^*} \\ \frac{1}{\theta^*} & \psi'(r^*) \end{pmatrix}.$$

Pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, sa forme quadratique vaut

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -p \left[\frac{r^*}{(\theta^*)^2} u^2 + \frac{2}{\theta^*} uv + \psi'(r^*) v^2 \right].$$

On complète le carré dans le crochet :

$$\frac{r^*}{(\theta^*)^2} u^2 + \frac{2}{\theta^*} uv + \psi'(r^*) v^2 = \frac{r^*}{(\theta^*)^2} \left(u + \frac{\theta^*}{r^*} v \right)^2 + \left(\psi'(r^*) - \frac{1}{r^*} \right) v^2.$$

Les deux coefficients sont strictement positifs : $r^* > 0$, $\theta^* > 0$ et $\psi'(r^*) > 1/r^*$ par II.8.(c). Pour un vecteur non nul, le crochet est donc strictement positif : si $v \neq 0$, le second terme est positif ; si $v = 0$ et $u \neq 0$, le premier est positif. Puisque $p > 0$, la forme quadratique de H est strictement négative sur les vecteurs non nuls.

La matrice H est réelle symétrique. Pour un vecteur propre non nul w associé à une valeur propre réelle μ , on a ${}^t_w H w = \mu \|w\|^2 < 0$, donc $\mu < 0$. Le théorème spectral garantit que toutes ses valeurs propres sont ainsi strictement négatives. Le critère de la hessienne donne un maximum local strict de F au point (θ^*, r^*) . Par III.1, L admet au même point un maximum local strict. Aucun déterminant ni ancien critère de deux variables n'est utilisé.

Méthode 2 — Maximisation successive et maximum global

Cette seconde méthode complète l'étude locale en établissant la propriété globale mentionnée dans le sujet. Pour $r > 0$ fixé,

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta, r) = \frac{p}{\theta^2}(\bar{x} - r\theta).$$

Le signe est positif lorsque $0 < \theta < \bar{x}/r$, nul en $\bar{x}/r$ et négatif au-delà. Donc, pour tout $\theta > 0$,

$$F(\theta, r) \leq F(\bar{x}/r, r),$$

avec égalité uniquement si $\theta = \bar{x}/r$.

Posons $J(r) = F(\bar{x}/r, r)$. À partir de l'expression explicite de F ,

$$J(r) = p[-\ln \Gamma(r) - r \ln \bar{x} + r \ln r + (r-1)m - r].$$

La dérivation de cette fonction d'une variable donne

$$J'(r) = p[-\psi(r) - \ln \bar{x} + \ln r + 1 + m - 1] = p h(r).$$

Comme h est strictement décroissante et s'annule uniquement en r^* , on a $h(r) > 0$ pour $r < r^*$ et $h(r) < 0$ pour $r > r^*$. Ainsi J atteint un maximum global strict en r^* . Pour tout $(\theta, r) \in D$,

$$F(\theta, r) \leq J(r) \leq J(r^*) = F(\theta^*, r^*).$$

L'égalité simultanée impose $r = r^*$ puis $\theta = \theta^*$. Par III.1, L admet donc un unique maximum global strict au couple (θ^*, r^*) . La méthode hessienne répond à la demande locale ; la maximisation successive apporte ici une conclusion globale, en ramenant l'étude à deux fonctions d'une variable.

Partie IV. Estimateur sans biais de l'écart-type d'une loi normale centrée

Dans cette partie, $\sigma > 0$, $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $Z = X/\sigma \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On utilise la convention du référentiel : la loi gamma de forme $a > 0$ et de taux 1, notée ici $\gamma(a)$, a pour densité $t \mapsto t^{a-1}e^{-t}/\Gamma(a)$ pour $t > 0$, et 0 pour $t \leq 0$.

1. On détermine la loi de $T = Z^2/2$ par sa fonction de répartition. Pour $t < 0$, $P(T \leq t) = 0$. Pour $t \geq 0$, en notant Φ la fonction de répartition normale centrée réduite, la symétrie de la loi normale donne

$$P(T \leq t) = P(-\sqrt{2t} \leq Z \leq \sqrt{2t}) = 2\Phi(\sqrt{2t}) - 1.$$

Cette fonction est continue en 0 et dérivable pour $t > 0$. Comme $\Phi'(z) = e^{-z^2/2}/\sqrt{2\pi}$,

$$\frac{d}{dt}[2\Phi(\sqrt{2t}) - 1] = 2 \frac{e^{-t}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-1/2} e^{-t}.$$

Cette fonction est une densité de T sur $]0, +\infty[$. En effet, elle est positive, continue sur ce domaine, intégrable au voisinage de 0 par comparaison à $t^{-1/2}$ et en $+\infty$ par les croissances comparées. En intégrant sa dérivée sur $[\varepsilon, R]$, puis en faisant tendre ε vers 0 et R vers $+\infty$, on obtient une intégrale totale égale à $1 - 0 = 1$.

Par définition de $\Gamma(1/2)$, la normalisation donne

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}}.$$

Donc $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, et la densité précédente est exactement celle de $\gamma(1/2)$. Ainsi $T \sim \gamma(1/2)$. La valeur de $\Gamma(1/2)$ est déduite de la loi normale, sans la supposer connue au départ.

2. Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et de même loi que X .
2. (a) Posons $T_i = X_i^2/(2\sigma^2)$. Par IV.1, chaque T_i suit $\gamma(1/2)$. Les variables T_i sont mutuellement indépendantes, car chacune est une fonction de la seule variable X_i et les X_i sont mutuellement indépendantes.

La stabilité par somme des lois gamma indépendantes de même taux, autorisée par le référentiel, s'applique : les formes s'additionnent et le taux reste 1. Ainsi

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i \sim \gamma(n/2).$$

Cette conclusion vaut également pour $n = 1$. Une densité de S_n est donc $s^{n/2-1}e^{-s}/\Gamma(n/2)$ pour $s > 0$, et 0 pour $s \leq 0$.

2. (b) Méthode 1 — Moment de la loi gamma

On a $Y_n = (2\sigma^2/n)S_n$. Pour une variable $S \sim \gamma(a)$, le moment d'ordre 1 existe, puisque l'intégrale définissant $\Gamma(a+1)$ converge, et

$$E(S) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = a.$$

Avec $a = n/2$, la linéarité donne

$$E(Y_n) = \frac{2\sigma^2}{n}E(S_n) = \frac{2\sigma^2}{n} \frac{n}{2} = \sigma^2.$$

Donc Y_n est un estimateur sans biais de σ^2 .

Méthode 2 — Moyenne empirique des carrés

Chaque X_i possède un moment d'ordre 2. Comme son espérance est 0 et sa variance est σ^2 , la formule de Huygens donne $E(X_i^2) = \sigma^2$. La linéarité de l'espérance d'une somme

finie entraîne

$$E(Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = \frac{1}{n} n \sigma^2 = \sigma^2.$$

Cette seconde méthode n'a pas besoin de la loi exacte de S_n , ni même de l'indépendance pour le seul calcul de cette espérance ; la première exploite le résultat de la question précédente.

3. (a) On justifie d'abord l'existence des moments : $Y_n \geq 0$, $E(Y_n) = \sigma^2 < +\infty$ et $\sqrt{y} \leq 1 + y$ pour $y \geq 0$. Ainsi $\sqrt{Y_n}$ est intégrable. De plus, $E((\sqrt{Y_n})^2) = E(Y_n) = \sigma^2$, donc sa variance existe.

Méthode 1 — Variance strictement positive

La variable S_n possède une densité strictement positive sur $]0, +\infty[$, donc elle n'est pas presque sûrement constante. La transformation $s \mapsto \sigma \sqrt{2s/n}$ est strictement croissante, donc $\sqrt{Y_n}$ n'est pas non plus presque sûrement constante. Par exemple, les deux événements $0 < S_n < 1$ et $2 < S_n < 3$ ont une probabilité strictement positive et conduisent à des valeurs de $\sqrt{Y_n}$ dans deux intervalles disjoints.

Par la caractérisation de la variance nulle, $V(\sqrt{Y_n}) > 0$. La formule de Huygens donne alors

$$0 < V(\sqrt{Y_n}) = E(Y_n) - [E(\sqrt{Y_n})]^2 = \sigma^2 - [E(\sqrt{Y_n})]^2.$$

L'espérance étant non négative et $\sigma > 0$, il s'ensuit que $E(\sqrt{Y_n}) < \sigma$.

Méthode 2 — Inégalité de tangente explicite

Pour tout $y \geq 0$, on a l'identité

$$\sigma + \frac{y - \sigma^2}{2\sigma} - \sqrt{y} = \frac{(\sqrt{y} - \sigma)^2}{2\sigma} \geq 0.$$

Les quantités sont intégrables lorsque $y = Y_n$, d'après les moments justifiés ci-dessus.

On prend l'espérance et on utilise $E(Y_n) = \sigma^2$:

$$\sigma - E(\sqrt{Y_n}) = \frac{1}{2\sigma} E[(\sqrt{Y_n} - \sigma)^2].$$

Comme $\sqrt{Y_n}$ n'est pas presque sûrement égale à σ , l'espérance de son carré d'écart est strictement positive. En effet, une variable non négative d'espérance nulle est nulle presque sûrement. Donc $E(\sqrt{Y_n}) < \sigma$.

La première preuve interprète l'inégalité stricte comme une variance positive ; la seconde quantifie exactement l'écart à la tangente de la racine carrée en σ^2 .

3. (b) Avec $S_n \sim \gamma(n/2)$ et $\sqrt{Y_n} = \sigma \sqrt{2/n} \sqrt{S_n}$, le théorème de transfert donne

$$E(\sqrt{S_n}) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} s^{1/2} s^{n/2-1} e^{-s} ds = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}.$$

L'intégrale converge puisque $(n+1)/2 > 0$. Par définition de λ_n , ce quotient vaut $1/\lambda_n$.

On conclut

$$E(\sqrt{Y_n}) = \sigma \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} = \frac{\sigma}{\lambda_n} \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Cette formule vaut pour tout $n \geq 1$. Par IV.3.(a), elle est strictement inférieure à σ , ce qui donne également $\lambda_n > \sqrt{2/n}$.

3. (c) Les valeurs de Γ étant strictement positives, $\lambda_n > 0$. L'estimateur s'écrit

$$\hat{\sigma}_n = \lambda_n \sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{Y_n} = \sigma \lambda_n \sqrt{S_n}.$$

Il est intégrable par IV.3.(b). On calcule

$$E(\hat{\sigma}_n) = \lambda_n \sqrt{\frac{n}{2}} E(\sqrt{Y_n}) = \lambda_n \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{\sigma}{\lambda_n} \sqrt{\frac{2}{n}} = \sigma.$$

De plus, sa définition initiale ne dépend que des observations X_i et de n , puisque λ_n est une constante connue. Il s'agit donc bien d'un estimateur sans biais du paramètre inconnu σ .

4. (a) Le moment d'ordre 2 de $\hat{\sigma}_n$ existe, car

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{\lambda_n^2}{2} \sum_{i=1}^n X_i^2,$$

et chaque carré possède une espérance finie. Ainsi

$$E(\hat{\sigma}_n^2) = \frac{\lambda_n^2}{2} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = \frac{n\lambda_n^2}{2} \sigma^2.$$

En utilisant $E(\hat{\sigma}_n) = \sigma$ et la formule de Huygens,

$$V(\hat{\sigma}_n) = \sigma^2 \left(\frac{n\lambda_n^2}{2} - 1 \right),$$

c'est-à-dire

$$V(\hat{\sigma}_n) = \sigma^2 \left[\frac{n}{2} \left(\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n+1)/2)} \right)^2 - 1 \right].$$

La variance est strictement positive : IV.3.(b) donne $\lambda_n > \sqrt{2/n}$. Pour $n = 1$, $\lambda_1 = \sqrt{\pi}$, d'où $V(\hat{\sigma}_1) = \sigma^2(\pi/2 - 1)$, en accord avec la formule générale.

4. (b) Méthode 1 — Variance et Bienaymé-Tchebychev

D'après I.2.(d), $\lambda_n/\sqrt{2/n} \rightarrow 1$, donc $n\lambda_n^2/2 \rightarrow 1$. La variance calculée en IV.4.(a) tend alors vers 0.

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique à $\hat{\sigma}_n$, qui possède une variance finie et une espérance égale à σ :

$$P(|\hat{\sigma}_n - \sigma| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\hat{\sigma}_n)}{\varepsilon^2} \longrightarrow 0.$$

Il s'ensuit que $\hat{\sigma}_n \xrightarrow{P} \sigma$. L'estimateur sans biais construit est donc convergent. La preuve repose sur une majoration directe des probabilités, sans théorème de composition des convergences ni Slutsky.

Méthode 2 — Loi des grands nombres et majoration directe

Chaque variable $T_i = X_i^2/(2\sigma^2)$ suit $\gamma(1/2)$. Son moment d'ordre 2 existe et vaut, par transfert et par la relation fonctionnelle de Γ ,

$$E(T_i^2) = \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(1/2)} = \frac{3}{2} \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Donc $E(X_i^4) = 4\sigma^4 E(T_i^2) = 3\sigma^4$, et $V(X_i^2) = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4 < +\infty$. Les carrés des X_i sont indépendants, de même loi et de moyenne σ^2 . La loi faible des grands nombres donne $Y_n \xrightarrow{P} \sigma^2$.

Pour $y \geq 0$, la factorisation de $y - \sigma^2$ et $\sigma > 0$ donnent

$$|\sqrt{y} - \sigma| = \frac{|y - \sigma^2|}{\sqrt{y} + \sigma} \leq \frac{|y - \sigma^2|}{\sigma}.$$

Pour tout $\eta > 0$, l'inclusion d'événements qui en résulte entraîne

$$P(|\sqrt{Y_n} - \sigma| \geq \eta) \leq P(|Y_n - \sigma^2| \geq \sigma\eta) \longrightarrow 0.$$

Posons $a_n = \lambda_n \sqrt{n/2}$. D'après I.2.(d), $a_n \rightarrow 1$; en particulier $0 < a_n \leq 2$ pour tout n assez grand. Puisque $\hat{\sigma}_n = a_n \sqrt{Y_n}$,

$$|\hat{\sigma}_n - \sigma| \leq 2|\sqrt{Y_n} - \sigma| + \sigma|a_n - 1|.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé et n assez grand, $\sigma|a_n - 1| \leq \varepsilon/2$, donc

$$P(|\hat{\sigma}_n - \sigma| \geq \varepsilon) \leq P(|\sqrt{Y_n} - \sigma| \geq \varepsilon/4) \longrightarrow 0.$$

On retrouve $\hat{\sigma}_n \xrightarrow{P} \sigma$. Cette preuve utilise la convergence de la moyenne empirique, puis deux majorations explicites ; elle ne suppose aucun théorème général permettant de multiplier ou de composer des convergences. La première méthode est plus courte lorsque la variance exacte est déjà disponible ; la seconde montre comment exploiter la loi des grands nombres.

Relevé des adaptations

Aucune adaptation mathématique n'a été nécessaire. Toutes les questions et les résultats admis de l'original sont conservés. La convention de taux 1 de la loi gamma est explicitée, conformément au référentiel.