



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2004

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

L'objet de ce problème est la recherche et l'étude de lois possédant une propriété, dite de stabilité, qui intervient dans la modélisation de nombreux phénomènes satisfaisant une certaine invariance d'échelle.

Soit X une variable aléatoire réelle. On dit qu'une suite $(X_k)_{k \geq 1}$ de variables aléatoires est une suite de copies de X si $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables indépendantes ayant toutes même loi que X .

On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi stable s'il existe une suite réelle strictement positive $(a_n)_{n \geq 1}$ telle que, pour toute suite $(X_k)_{k \geq 1}$ de copies de X et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $X_1 + \dots + X_n$ et $a_n X$ ont même loi. On vérifie facilement l'unicité de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ si X n'est pas nulle presque sûrement. On dira alors que $(a_n)_{n \geq 1}$ est la suite associée à la loi de X .

On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1 (i.e. $\{1, 2, 3, \dots\}$).

On admettra que :

$$\forall A > 0, \quad \arctan A + \arctan \frac{1}{A} = \frac{\pi}{2}$$

où l'expression $\arctan$ désigne la fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente à $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

I. Un résultat sur certaines suites positives

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant les deux propriétés suivantes :

- pour tout couple d'entiers $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $u_{mn} = u_m u_n$;
- il existe un réel strictement positif A tel que, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, si $m \leq n$, alors $u_m \leq A u_n$.

On veut montrer qu'il existe un réel positif α tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^\alpha$.

- 1) Montrer que $u_1 = 1$.
- 2) Montrer que, pour tout couple $(r, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $u_{r^k} = u_r^k$.
- 3) Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $r \geq 2$. Montrer qu'il existe un réel α_r tel que, pour tout entier n de la forme r^k , où k est un entier positif, $u_n = n^{\alpha_r}$. Exprimer α_r en fonction de r et de u_r .
- 4) Soit $(r_1, r_2) \in \mathbb{N}^{*2}$, $r_2 > r_1 \geq 2$. On introduit alors les réels α_{r_1} et α_{r_2} définis selon la question précédente.
 - a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un entier ℓ tel que $r_2^k \leq r_1^\ell < r_2^{k+1}$.
 - b) En déduire que $(r_2^k)^{\alpha_{r_2}} \leq A (r_2^{k+1})^{\alpha_{r_1}}$ et $(r_2^k)^{\alpha_{r_1}} \leq A (r_2^{k+1})^{\alpha_{r_2}}$.
 - c) En faisant tendre k vers l'infini, déduire l'égalité $\alpha_{r_1} = \alpha_{r_2}$. Conclure.

II. La loi gaussienne

A. On rappelle l'expression de la densité d'une variable gaussienne de moyenne m et de variance σ^2 :

$$f_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- 1) Soit a un réel strictement positif et b et c deux réels quelconques. Trouver trois réels α, m, σ , que l'on exprimera en fonction de a, b, c , tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} + \alpha = ax^2 + bx + c$$

2) En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(ax^2 + bx + c)) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

3) Soient G et G' deux variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes de variances respectives σ^2 et σ'^2 . Redémontrer, en calculant la densité de la loi de $G + G'$, que $G + G'$ est une variable gaussienne dont on donnera l'espérance et la variance.

4) Montrer que G suit une loi stable. Quelle est la suite associée à la loi de G ?

B. Dans cette section, X est une variable aléatoire qui suit une loi stable et qui admet une espérance m et une variance σ^2 strictement positive. On ne suppose pas que X suit une loi gaussienne. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de copies de X et $(a_k)_{k \geq 1}$ la suite associée à la loi de X .

1) En considérant les variances de $X_1 + \dots + X_n$ et de $a_n X$, donner, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de a_n . Montrer que $m = 0$.

2) En appliquant le théorème de la limite centrée, montrer que X suit une loi gaussienne.

III. La loi de Cauchy

1) Soit $a > 0$. Vérifier que la fonction $f_a : x \mapsto \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}$ est bien une densité de probabilité. (On utilisera le changement de variable $x = a \tan t$.)

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Cauchy de paramètre a si elle admet la fonction f_a pour densité.

- 2) Soit Z une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy de paramètre égal à 1.
- a) La variable Z admet-elle une espérance ?
- b) Soit $\lambda > 0$. Quelle est la loi de λZ ?
- 3) Soit P un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soient Q_1 et Q_2 deux polynômes à coefficients réels, unitaires, de degré 2, distincts et n'admettant aucune racine réelle. Montrer que si P est divisible par Q_1 et par Q_2 , alors $P = 0$.
(On pourra écrire $P = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$ et distinguer les cas selon le degré de R_1 ; si R_1 est de degré 1, on considérera sa racine.)
- 4) Soient $a, a' > 0$ et $y \in \mathbb{R}^*$. On pose :

$$D = (y^2 + (a + a')^2)(y^2 + (a - a')^2)$$

(on remarquera que $D > 0$) et on définit quatre réels u, v, u', v' par :

$$u = \frac{a'(y^2 + a'^2 - a^2)}{\pi D}, \quad v = \frac{2aa'y}{\pi D}, \quad u' = \frac{a(y^2 + a^2 - a'^2)}{\pi D}, \quad v' = -\frac{2aa'y}{\pi D}$$

- a) Vérifier que $D = (y^2 + a'^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2 = (y^2 + a^2 - a'^2)^2 + 4a'^2 y^2$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{aa'}{\pi^2(x^2 + a^2)((x - y)^2 + a'^2)} = \frac{vx + au}{\pi(x^2 + a^2)} + \frac{v'(x - y) + a'u'}{\pi((x - y)^2 + a'^2)} \quad (\star)$$

(On multipliera les deux membres de $(\star)$ par leur dénominateur commun et on appliquera la question précédente avec $Q_1(x) = x^2 + a^2$ et $Q_2(x) = (x - y)^2 + a'^2$. On pourra remarquer que $(x - y)^2 + a'^2 = (x^2 + a^2) - 2yx + (y^2 + a'^2 - a^2)$ et que $x^2 + a^2 = ((x - y)^2 + a'^2) + 2y(x - y) + (y^2 + a^2 - a'^2)$.)

b) Montrer que :

$$u + u' = \frac{a + a'}{\pi(y^2 + (a + a')^2)}$$

5) Soit $B > 0$. Calculer $\int_{-B}^B \frac{x}{x^2 + a^2} dx$ et $\int_{-B}^B \frac{x - y}{(x - y)^2 + a^2} dx$.

6) Soient Z_a et $Z_{a'}$ deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Cauchy de paramètres respectifs a et a' . Montrer que la valeur de la densité de la loi de $Z_a + Z_{a'}$ au point y est égale à $u + u'$ (cf. question 4). En déduire la loi de $Z_a + Z_{a'}$.

7) En déduire que Z suit une loi stable. Quelle est la suite associée à la loi de Z ?

IV. Les événements exceptionnels

Du fait de la décroissance rapide à l'infini de la fonction densité des variables gaussiennes, celles-ci n'accordent que peu d'importance aux valeurs extrêmes. Aussi, pour inclure, dans un modèle mathématique, l'éventualité de phénomènes extrêmes, on est amené à privilégier des lois dont la fonction densité décroît moins vite à l'infini. Le but de cette partie est d'étudier ce qu'il en est pour la loi de Cauchy.

Dans cette partie, $(X_i)_{i \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Cauchy de paramètre 1.

On dira qu'un événement exceptionnel s'est produit avant l'instant n , s'il existe un entier k inférieur ou égal à n tel que, pour tout entier i inférieur ou égal à n et différent de k , $|X_k| > 2|X_i|$. Autrement dit, à l'instant n , la variable la plus forte de l'histoire (en valeur absolue) est supérieure au double de chacune des autres variables. On appellera E_n un tel événement. Ainsi :

$$E_n = \bigcup_{k=1}^n \left(\bigcap_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (|X_k| > 2|X_i|) \right)$$

1) Montrer que :

$$P(E_n) = n P \left(\bigcap_{i=2}^n (|X_1| > 2|X_i|) \right)$$

2) En déduire que :

$$\forall A > 0, \quad P(E_n) \geq n P \left((|X_1| > 2A) \cap \left(\bigcap_{i=2}^n (|X_i| < A) \right) \right)$$

3) Montrer que : $\forall A > 0, \quad P(|X_1| > A) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{A}$.

4) Soit $\lambda > 0$, et n assez grand pour que $\frac{\pi\lambda}{2n} < \frac{\pi}{2}$. En choisissant $A = \frac{1}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}}$, montrer que :

$$P(E_n) \geq n P \left(|X_1| > \frac{2}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}} \right) \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{n-1}$$

5) Soit $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$. Montrer que, pour tout entier n assez grand, $P(E_n) > \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda} - \varepsilon$.

6) En déduire que, pour tout entier n assez grand, $P(E_n) > \frac{1}{6}$.

V. Le nombre a_n est une puissance de n

Soit X une variable aléatoire suivant une loi stable. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de copies de X et $(a_k)_{k \geq 1}$ la suite associée à la loi de X .

A. Une variable aléatoire X est dite symétrique si elle a la même loi que la variable $-X$.

Autrement dit, pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $P(X \in I) = P(-X \in I)$ (exemple : une variable gaussienne centrée).

Dans cette section, on suppose X non nulle et symétrique.

- 1) Montrer que $P(X > 0) = \frac{1}{2}(1 - P(X = 0))$.
- 2) Montrer qu'il existe $\mu > 0$ tel que $P(X > \mu) > 0$.
- 3) a) Montrer que, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $a_{m+n}X$ a même loi que $a_m X_1 + a_n X_2$.
b) En déduire que, pour tout k -uplet d'entiers $(m_1, \dots, m_k)$, $a_{m_1+\dots+m_k}X$ a même loi que $a_{m_1}X_1 + \dots + a_{m_k}X_k$.
c) En prenant tous les entiers m_i égaux à un même entier ℓ , montrer que $a_{k\ell} = a_k a_\ell$.
- 4) En considérant l'événement $(X_1 \geq 0) \cap (X_2 > t)$, montrer en utilisant la question V.A.3.a, que pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, et pour tout $t > 0$:

$$P\left(X > \frac{a_n}{a_{m+n}} t\right) \geq \frac{1}{2} P(X > t)$$

- 5) En utilisant la question V.A.2, montrer que l'ensemble $\left\{ \frac{a_n}{a_{m+n}} : (m, n) \in \mathbb{N}^{*2} \right\}$ est majoré. En déduire l'existence d'un réel α tel que, pour tout entier naturel non nul n , $a_n = n^\alpha$.
- B. On suppose que X suit une loi stable à densité, mais on ne suppose plus que X est symétrique.

- 1) Montrer que la variable $X_1 - X_2$ est symétrique.

- 2) Montrer que $X_1 - X_2$ suit une loi stable. Soit $(b_n)_{n \geq 1}$ la suite associée à la loi de $X_1 - X_2$. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = b_n$. Conclure.