



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2004

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Rappels et conventions utilisés dans tout le corrigé.

On note $E(U)$ et $V(U)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire U lorsqu'elles existent, et « $U \sim U'$ » signifie que U et U' ont même loi; $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ désigne la loi gaussienne d'espérance m et de variance $\sigma^2 > 0$. Si $U \sim U'$, alors pour toute fonction usuelle g (affine, valeur absolue, etc.), $g(U) \sim g(U')$; en particulier, pour tout réel c , $cU \sim cU'$, et U, U' ont même espérance et même variance lorsqu'elles existent, puisque celles-ci ne dépendent que de la loi.

Propriété (P), utilisée comme propriété du cours sur les lois conjointes. Si $(U_1, \dots, U_n)$ et $(U'_1, \dots, U'_n)$ sont deux familles de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $U_i \sim U'_i$ pour tout i , alors les vecteurs $(U_1, \dots, U_n)$ et $(U'_1, \dots, U'_n)$ ont la même loi conjointe (la loi conjointe d'une famille de variables indépendantes est déterminée par les lois marginales). Par conséquent, un événement décrit de la même manière à partir de l'un ou de l'autre vecteur a la même probabilité, et pour toute fonction usuelle g (somme, combinaison linéaire, etc.), $g(U_1, \dots, U_n) \sim g(U'_1, \dots, U'_n)$. Cette propriété est d'ailleurs implicite dans la définition d'une loi stable : la loi de $X_1 + \dots + X_n$ ne dépend pas de la suite de copies choisie.

Lemme des coalitions. Si $U_1, \dots, U_n$ sont mutuellement indépendantes, des variables (ou des événements) construites à partir de paquets disjoints de ces variables sont mutuellement indépendantes.

Densité d'une somme (résultat admis du programme). Si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f et g , avec f bornée, alors pour tout

réel y l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(y-x) dx$ converge et la fonction

$h : y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(y-x) dx$ est une densité de $U + V$. Dans les deux applications de ce corrigé (II.A.3 et III.6), on constatera de plus que h est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un point.

Lemme U (unicité de la suite associée). Soit X une variable aléatoire qui n'est pas nulle presque sûrement, et soient $c, d > 0$ tels que $cX \sim dX$. Alors $c = d$.

Démonstration. Supposons par l'absurde $c \neq d$; quitte à échanger, $c < d$. Posons $\rho = \frac{d}{c} > 1$. Pour tout réel x , $P(\rho X \leq x) = P(dX \leq cx) = P(cX \leq cx) = P(X \leq x)$, donc

$X \sim \rho X$. Par récurrence immédiate, $X \sim \rho^j X$ pour tout $j \in \mathbb{N}$: si $X \sim \rho^j X$, alors

$$P(\rho^{j+1}X \leq x) = P(\rho^j X \leq \frac{x}{\rho}) = P(X \leq \frac{x}{\rho}) = P(\rho X \leq x) = P(X \leq x).$$

Pour tout réel $s > 0$ et tout $j \in \mathbb{N}$, on a donc $P(X > s) = P(\rho^j X > s) = P(X > s\rho^{-j})$.

Fixons $s > 0$. En appliquant cette égalité au réel $s\rho^j$, on obtient aussi

$P(X > s\rho^j) = P(X > s)$. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$P(X > s) = P(X > s\rho^{-j}) = P(X > s\rho^j)$$

Les événements $(X > s\rho^{-j})$ forment une suite croissante de réunion $(X > 0)$, et les événements $(X > s\rho^j)$ une suite décroissante d'intersection vide, car $\rho^j \rightarrow +\infty$. Par continuité monotone, en faisant tendre j vers $+\infty$: $P(X > s) = P(X > 0)$ et $P(X > s) = 0$. Donc $P(X > 0) = 0$. Le même raisonnement appliqué à $-X$, qui vérifie aussi $c(-X) \sim d(-X)$, donne $P(X < 0) = 0$. Ainsi $P(X = 0) = 1$, ce qui contredit l'hypothèse.

Conséquence. Si X n'est pas nulle presque sûrement et si (a_n) et (a'_n) conviennent toutes deux dans la définition d'une loi stable, alors pour toute suite de copies, $a_n X \sim X_1 + \dots + X_n \sim a'_n X$, donc $a_n = a'_n$ pour tout n : la suite associée est unique, comme l'annonce l'énoncé.

I. Un résultat sur certaines suites positives

1) On applique la première propriété au couple $(1, 1)$.

$u_1 = u_{1 \times 1} = u_1 u_1 = u_1^2$, donc $u_1(u_1 - 1) = 0$. Comme $u_1 > 0$, on peut diviser par u_1 .

Conclusion

$$u_1 = 1.$$

2) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On raisonne par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

Initialisation : pour $k = 0$, $u_{r^0} = u_1 = 1 = u_r^0$ d'après 1).

Hérédité : supposons $u_{r^k} = u_r^k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Comme r^k et r sont dans $\mathbb{N}^*$, la première propriété donne $u_{r^{k+1}} = u_{r^k \cdot r} = u_{r^k} u_r = u_r^k u_r = u_r^{k+1}$.

Conclusion

$$\text{pour tout } (r, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, u_{r^k} = u_r^k.$$

3) Soit $r \geq 2$. On cherche α_r tel que $(r^k)^{\alpha_r} = u_r^k$ pour tout k , en passant aux logarithmes.

Comme $r \geq 2$, $\ln r > 0$, et comme $u_r > 0$, $\ln u_r$ est défini. Posons $\alpha_r = \frac{\ln u_r}{\ln r}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après 2) :

$$(r^k)^{\alpha_r} = \exp(\alpha_r k \ln r) = \exp(k \ln u_r) = u_r^k = u_{r^k}$$

Conclusion

$$\text{pour tout entier } n \text{ de la forme } r^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}, u_n = n^{\alpha_r}, \text{ où } \alpha_r = \frac{\ln u_r}{\ln r}.$$

Remarque utile pour la suite : $\alpha_r \geq 0$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 \leq n$, donc la seconde propriété et 1) donnent $1 = u_1 \leq A u_n$, soit $u_n \geq \frac{1}{A}$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_r^k = u_{r^k} \geq \frac{1}{A}$. Si l'on avait $0 < u_r < 1$, la suite géométrique $(u_r^k)_k$ tendrait vers 0, ce qui contredirait cette minoration par $\frac{1}{A} > 0$. Donc $u_r \geq 1$, puis $\alpha_r = \frac{\ln u_r}{\ln r} \geq 0$.

4) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On cherche une puissance de r_1 comprise entre r_2^k et r_2^{k+1} .

Méthode 1 — Plus petit élément d'une partie de $\mathbb{N}$.

Comme $r_1 \geq 2$, $r_1^j \geq 2^j \geq j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, donc $r_1^j \rightarrow +\infty$ et l'ensemble $L = \{j \in \mathbb{N} : r_1^j \geq r_2^k\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus petit élément ℓ . On a $\ell \neq 0$, car $r_1^0 = 1 < r_2^k$ (puisque $r_2 \geq 3$ et $k \geq 1$). Par minimalité, $\ell - 1 \notin L$, c'est-à-dire $r_1^{\ell-1} < r_2^k$. Alors, comme $r_1 < r_2$:

$$r_2^k \leq r_1^\ell = r_1 \cdot r_1^{\ell-1} < r_1 r_2^k < r_2 r_2^k = r_2^{k+1}$$

Méthode 2 — Logarithmes et partie entière.

L'encadrement cherché équivaut, par stricte croissance de $\ln$ et car $\ln r_1 > 0$, à $\frac{k \ln r_2}{\ln r_1} \leq \ell < \frac{(k+1) \ln r_2}{\ln r_1}$. Posons $x = \frac{k \ln r_2}{\ln r_1}$ et $\ell = -\lfloor -x \rfloor$ (plus petit entier supérieur ou égal à x). Alors $x \leq \ell < x + 1$, et $x + 1 \leq x + \frac{\ln r_2}{\ln r_1} = \frac{(k+1) \ln r_2}{\ln r_1}$ car $\ln r_2 > \ln r_1$. Donc $x \leq \ell < \frac{(k+1) \ln r_2}{\ln r_1}$, ce qui donne l'encadrement, avec $\ell \geq x > 0$, donc $\ell \in \mathbb{N}$.

La première méthode n'utilise que l'ordre de $\mathbb{N}$; la seconde traduit le problème en un encadrement de réels, technique utile dès qu'on compare des puissances de bases différentes.

Conclusion

il existe un entier ℓ tel que $r_2^k \leq r_1^\ell < r_2^{k+1}$.

b) On applique la seconde propriété aux couples d'entiers fournis par a), puis la croissance de $t \mapsto t^\beta$ sur $]0, +\infty[$ pour $\beta \geq 0$ (remarque de la question 3).

Première inégalité. Comme $r_2^k \leq r_1^\ell$, on a $u_{r_2^k} \leq A u_{r_1^\ell}$, soit, d'après 3), $(r_2^k)^{\alpha_{r_2}} \leq A (r_1^\ell)^{\alpha_{r_1}}$. Comme $\alpha_{r_1} \geq 0$ et $0 < r_1^\ell < r_2^{k+1}$, on a $(r_1^\ell)^{\alpha_{r_1}} \leq (r_2^{k+1})^{\alpha_{r_1}}$. Donc $(r_2^k)^{\alpha_{r_2}} \leq A (r_2^{k+1})^{\alpha_{r_1}}$.

Seconde inégalité. Comme $r_1^\ell \leq r_2^{k+1}$, on a $u_{r_1^\ell} \leq A u_{r_2^{k+1}}$, soit $(r_1^\ell)^{\alpha_{r_1}} \leq A (r_2^{k+1})^{\alpha_{r_2}}$. Comme $\alpha_{r_1} \geq 0$ et $r_2^k \leq r_1^\ell$, on a $(r_2^k)^{\alpha_{r_1}} \leq (r_1^\ell)^{\alpha_{r_1}}$. Donc $(r_2^k)^{\alpha_{r_1}} \leq A (r_2^{k+1})^{\alpha_{r_2}}$.

Conclusion

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(r_2^k)^{\alpha_{r_2}} \leq A (r_2^{k+1})^{\alpha_{r_1}}$ et $(r_2^k)^{\alpha_{r_1}} \leq A (r_2^{k+1})^{\alpha_{r_2}}$.

c) On passe aux logarithmes dans les inégalités de b), on divise par $k \ln r_2 > 0$ et on fait tendre k vers $+\infty$.

La première inégalité donne, par croissance de $\ln$: $k \alpha_{r_2} \ln r_2 \leq \ln A + (k+1) \alpha_{r_1} \ln r_2$, d'où :

$$\alpha_{r_2} \leq \frac{\ln A}{k \ln r_2} + \left(1 + \frac{1}{k}\right) \alpha_{r_1}$$

Quand $k \rightarrow +\infty$, le membre de droite tend vers α_{r_1} ; par passage à la limite dans l'inégalité, $\alpha_{r_2} \leq \alpha_{r_1}$. De même, la seconde inégalité donne

$$\alpha_{r_1} \leq \frac{\ln A}{k \ln r_2} + \left(1 + \frac{1}{k}\right) \alpha_{r_2}, \text{ puis } \alpha_{r_1} \leq \alpha_{r_2}. \text{ Donc } \alpha_{r_1} = \alpha_{r_2}.$$

Conclusion du problème I. Pour deux entiers distincts $r, s \geq 2$, en appliquant ce qui précède avec $r_1 = \min(r, s)$ et $r_2 = \max(r, s)$, on obtient $\alpha_r = \alpha_s$. Notons α cette valeur commune ; d'après la remarque de 3), $\alpha \geq 0$. Pour tout $n \geq 2$, $n = n^1$ est de la forme n^k , donc $u_n = n^{\alpha_n} = n^\alpha$ d'après 3). Enfin $u_1 = 1 = 1^\alpha$.

Conclusion

il existe un réel $\alpha \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^\alpha$.

II. La loi gaussienne

A. 1) On met le trinôme $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique, puis on identifie.

Comme $a > 0$, pour tout réel x :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Posons $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2a}} > 0$, $m = -\frac{b}{2a}$ et $\alpha = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Alors $\frac{1}{2\sigma^2} = a$ et, pour tout réel x :

$$\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2} + \alpha = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = ax^2 + bx + c$$

Ces valeurs sont d'ailleurs imposées (avec $\sigma > 0$) : en identifiant les coefficients des

polynômes $\frac{1}{2\sigma^2}x^2 - \frac{m}{\sigma^2}x + \frac{m^2}{2\sigma^2} + \alpha$ et $ax^2 + bx + c$, on obtient $\frac{1}{2\sigma^2} = a$, $-\frac{m}{\sigma^2} = b$ et $\frac{m^2}{2\sigma^2} + \alpha = c$.

Conclusion

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2a}}, \quad m = -\frac{b}{2a}, \quad \alpha = \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ conviennent.}$$

2) On fait apparaître la densité f_{m,σ^2} , dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1.

Avec les réels de 1), pour tout réel x :

$$\exp(-(ax^2 + bx + c)) = e^{-\alpha} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right) = e^{-\alpha} \sqrt{2\pi\sigma^2} f_{m,\sigma^2}(x)$$

Comme f_{m,σ^2} est une densité, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{m,\sigma^2}(x) dx$ converge et vaut 1. Par linéarité,

l'intégrale demandée converge et vaut $e^{-\alpha} \sqrt{2\pi\sigma^2}$. Or $2\pi\sigma^2 = \frac{2\pi}{2a} = \frac{\pi}{a}$ et

$$-\alpha = \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Conclusion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(ax^2 + bx + c)) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

3) L'énoncé impose la méthode : on calcule une densité de $G + G'$ par la formule de convolution, puis on reconnaît une densité gaussienne grâce à 2).

Les variances σ^2 et σ'^2 sont strictement positives (G et G' sont des gaussiennes, donc à densité), et on peut prendre $\sigma, \sigma' > 0$. Les densités $f = f_{0, \sigma^2}$ et $g = f_{0, \sigma'^2}$ sont continues et bornées (par $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma'^2}}$), et G, G' sont indépendantes. D'après le rappel sur la densité d'une somme, la fonction h définie par $h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(y-x) dx$ est une densité de $G + G'$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$f(x)g(y-x) = \frac{1}{2\pi\sigma\sigma'} \exp\left(-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{(y-x)^2}{2\sigma'^2}\right)\right) = \frac{1}{2\pi\sigma\sigma'} \exp(-(Ax^2 + Bx + C))$$

avec :

$$A = \frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma'^2} = \frac{\sigma^2 + \sigma'^2}{2\sigma^2\sigma'^2} > 0, \quad B = -\frac{y}{\sigma'^2}, \quad C = \frac{y^2}{2\sigma'^2}$$

Calculons :

$$B^2 - 4AC = \frac{y^2}{\sigma'^4} - \frac{\sigma^2 + \sigma'^2}{\sigma^2\sigma'^4} y^2 = \frac{y^2}{\sigma'^4} \cdot \frac{\sigma^2 - (\sigma^2 + \sigma'^2)}{\sigma^2} = -\frac{y^2}{\sigma^2\sigma'^2}$$

donc $\frac{B^2 - 4AC}{4A} = -\frac{y^2}{\sigma^2\sigma'^2} \cdot \frac{2\sigma^2\sigma'^2}{4(\sigma^2 + \sigma'^2)} = -\frac{y^2}{2(\sigma^2 + \sigma'^2)}$, et

$$\sqrt{\frac{\pi}{A}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma^2\sigma'^2}{\sigma^2 + \sigma'^2}} = \frac{\sigma\sigma'\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2}}. \text{ D'après 2) (avec } A > 0) :$$

$$h(y) = \frac{1}{2\pi\sigma\sigma'} \cdot \frac{\sigma\sigma'\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2(\sigma^2 + \sigma'^2)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + \sigma'^2)}} \exp\left(-\frac{y^2}{2(\sigma^2 + \sigma'^2)}\right)$$

On reconnaît $h = f_{0, \sigma^2 + \sigma'^2}$, fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Conclusion

$G + G'$ suit la loi gaussienne d'espérance 0 et de variance $\sigma^2 + \sigma'^2$.

- 4) On montre par récurrence que la somme de n copies de G suit la loi $\mathcal{N}(0, n\sigma^2)$, puis on compare avec $\sqrt{n}G$.

Soit $\sigma > 0$ l'écart-type de G et $(G_k)_{k \geq 1}$ une suite de copies de G . Posons

$$S_n = G_1 + \dots + G_n.$$

Montrons par récurrence que $S_n \sim \mathcal{N}(0, n\sigma^2)$ pour tout $n \geq 1$. Pour $n = 1$, $S_1 = G_1 \sim G$. Si $S_n \sim \mathcal{N}(0, n\sigma^2)$, alors S_n et G_{n+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions (S_n ne dépend que de $G_1, \dots, G_n$), centrées gaussiennes de variances $n\sigma^2$ et σ^2 ; d'après 3), $S_{n+1} = S_n + G_{n+1} \sim \mathcal{N}(0, (n+1)\sigma^2)$.

Par ailleurs, une transformation affine d'une gaussienne est gaussienne :

$\sqrt{n}G \sim \mathcal{N}(0, n\sigma^2)$. Donc $S_n \sim \sqrt{n}G$ pour tout $n \geq 1$ et pour toute suite de copies, avec $\sqrt{n} > 0$. Enfin G n'est pas nulle presque sûrement (elle est à densité), donc la suite associée est unique (lemme U).

Conclusion

G suit une loi stable, de suite associée $(a_n)_{n \geq 1} = (\sqrt{n})_{n \geq 1}$.

- B. 1) On compare les variances, puis les espérances, de deux variables de même loi.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et admettent une variance égale à σ^2 , donc $X_1 + \dots + X_n$ admet une variance et $V(X_1 + \dots + X_n) = n\sigma^2$. Par ailleurs $V(a_n X) = a_n^2 \sigma^2$. Deux variables de même loi ont même variance, donc $a_n^2 \sigma^2 = n\sigma^2$. Comme $\sigma^2 > 0$, $a_n^2 = n$, et comme $a_n > 0$, $a_n = \sqrt{n}$.

De même, $E(X_1 + \dots + X_n) = nm$ et $E(a_n X) = \sqrt{n} m$, donc $nm = \sqrt{n} m$. Pour $n = 2$: $(2 - \sqrt{2}) m = 0$, et $2 - \sqrt{2} \neq 0$, donc $m = 0$.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sqrt{n}$, et $m = 0$.

2) On applique le théorème de la limite centrée à la suite (X_k) et on utilise que $\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sigma\sqrt{n}}$ a la même loi que $\frac{X}{\sigma}$ pour tout n .

Hypothèses : les X_k sont indépendantes, de même loi, admettent une espérance $m = 0$ et une variance $\sigma^2 > 0$. Notons $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème de la limite centrée donne, pour tout réel x :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$$

Or, d'après 1), $S_n \sim \sqrt{n} X$, donc $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \sim \frac{X}{\sigma}$, et $P\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = P(X \leq \sigma x)$ ne dépend pas de n . La limite d'une suite constante étant cette constante, $P(X \leq \sigma x) = \Phi(x)$ pour tout réel x , c'est-à-dire, pour tout réel t , $P(X \leq t) = \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$.

Le membre de droite est la fonction de répartition de σN , où $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$, c'est-à-dire de la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. La fonction de répartition caractérisant la loi :

Conclusion

X suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Ainsi, les seules lois stables admettant une variance strictement positive sont les lois gaussiennes centrées.

III. La loi de Cauchy

- 1) Il s'agit de vérifier que f_a est positive, continue sur $\mathbb{R}$, et que son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1.

Positivité et continuité : f_a est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur $\pi(x^2 + a^2) \geq \pi a^2 > 0$ ne s'annule pas, et $f_a(x) > 0$ pour tout réel x .

Comme f_a est paire, il suffit d'étudier $\int_0^{+\infty} f_a(x) dx$: pour $B > 0$, le changement de variable affine $x = -s$ donne $\int_{-B}^0 f_a(x) dx = \int_0^B f_a(s) ds$.

Méthode 1 — Changement de variable $x = a \tan t$ (méthode imposée).

Soit $B > 0$ et $T = \arctan \frac{B}{a} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$. La fonction $\varphi : t \mapsto a \tan t$ est de classe C^1 sur $[0, T]$, avec $\varphi(0) = 0$, $\varphi(T) = B$ et $\varphi'(t) = a(1 + \tan^2 t)$. Pour $t \in [0, T]$:

$$f_a(\varphi(t)) \varphi'(t) = \frac{a \cdot a(1 + \tan^2 t)}{\pi(a^2 \tan^2 t + a^2)} = \frac{1}{\pi}$$

Donc $\int_0^B f_a(x) dx = \int_0^T \frac{1}{\pi} dt = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{B}{a}$. Quand $B \rightarrow +\infty$, $\frac{B}{a} \rightarrow +\infty$ et $\arctan \frac{B}{a} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, donc $\int_0^{+\infty} f_a(x) dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

Méthode 2 — Primitive directe.

La fonction $F_a : x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{a}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$F'_a(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)} = f_a(x). \text{ Pour } B > 0,$$

$$\int_0^B f_a(x) dx = F_a(B) - F_a(0) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{B}{a}, \text{ qui tend vers } \frac{1}{2} \text{ quand } B \rightarrow +\infty.$$

La méthode 1 est la méthode générale (et celle de l'énoncé) pour les intégrandes en $\frac{1}{x^2 + a^2}$; la méthode 2 est plus rapide dès que l'on reconnaît la dérivée de $x \mapsto \arctan \frac{x}{a}$, et fournit en plus la fonction de répartition.

Par parité, $\int_{-\infty}^0 f_a(x) dx$ converge aussi et vaut $\frac{1}{2}$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x) dx = 1$.

Conclusion

f_a est une densité de probabilité. De plus, la fonction de répartition d'une variable de loi de Cauchy de paramètre a est $F_a : x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{a}$ (méthode 2 et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_a(x) = 0$).

2) a) Z admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_1(x) dx$ converge. La fonction $x \mapsto |x| f_1(x)$ étant paire et positive, il suffit d'étudier $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx$.

Méthode 1 — Comparaison. Pour $x \geq 1$, $1 + x^2 \leq 2x^2$, donc $\frac{x}{\pi(1+x^2)} \geq \frac{1}{2\pi x} \geq 0$.

L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, donc, par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx$ diverge.

Méthode 2 — Calcul explicite. Pour $B > 0$, $\int_0^B \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{2\pi} \ln(1+B^2) \rightarrow +\infty$ quand $B \rightarrow +\infty$.

La comparaison s'applique même sans primitive explicite; le calcul direct est ici immédiat et montre la vitesse de divergence (logarithmique).

Conclusion

Z n'admet pas d'espérance.

b) On calcule la fonction de répartition de λZ à l'aide de celle de Z (question 1).

Pour tout réel x , comme $\lambda > 0$:

$$P(\lambda Z \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x}{\lambda}\right) = F_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{\lambda} = F_\lambda(x)$$

La fonction de répartition de λZ est donc celle de la loi de Cauchy de paramètre λ ; elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée f_λ .

Conclusion

λZ suit la loi de Cauchy de paramètre λ .

3) Question adaptée au programme actuel. On montre le résultat par l'absurde en utilisant les degrés et le fait qu'un polynôme réel de degré 1 a une racine réelle, alors que Q_1 et Q_2 n'en ont pas.

Supposons $P \neq 0$, divisible par Q_1 et par Q_2 : il existe des polynômes réels R_1, R_2 tels que $P = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$. Comme $P \neq 0$, $R_1 \neq 0$ et $R_2 \neq 0$, et $\deg P = 2 + \deg R_1 = 2 + \deg R_2 \leq 3$, donc $\deg R_1 = \deg R_2 \in \{0, 1\}$.

Cas $\deg R_1 = 0$. Alors $R_1 = \lambda$ et $R_2 = \mu$ sont des constantes non nulles, et $\lambda Q_1 = \mu Q_2$. Les polynômes Q_1 et Q_2 étant unitaires, la comparaison des coefficients dominants donne $\lambda = \mu$, puis $Q_1 = Q_2$: contradiction.

Cas $\deg R_1 = 1$. Alors $R_1 = \lambda(x - r)$ avec $\lambda \neq 0$ et r réel. On a $P(r) = Q_1(r)R_1(r) = 0$, donc $Q_2(r)R_2(r) = 0$. Comme Q_2 n'a pas de racine réelle, $Q_2(r) \neq 0$, donc $R_2(r) = 0$; R_2 étant de degré 1, $R_2 = \mu(x - r)$ avec $\mu \neq 0$. On obtient $(x - r)(\lambda Q_1 - \mu Q_2) = 0$. Le produit de deux polynômes non nuls étant non nul (les degrés s'ajoutent), $\lambda Q_1 - \mu Q_2 = 0$, puis, comme dans le premier cas, $\lambda = \mu$ et $Q_1 = Q_2$: contradiction.

Conclusion

si P , de degré au plus 3, est divisible par Q_1 et par Q_2 , alors $P = 0$.

- 4) a) Question adaptée au programme actuel. On vérifie d'abord les deux expressions de D , puis on montre que le polynôme obtenu en multipliant $(\star)$ par le dénominateur commun est divisible par Q_1 et par Q_2 , et on conclut par 3).

Signe de D . On a $y^2 + (a + a')^2 \geq (a + a')^2 > 0$ et $y^2 + (a - a')^2 \geq y^2 > 0$ car $y \neq 0$. Donc $D > 0$, et u, v, u', v' sont bien définis.

Expressions de D . En développant :

$$D = y^4 + y^2((a + a')^2 + (a - a')^2) + (a + a')^2(a - a')^2 = y^4 + 2a^2y^2 + 2a'^2y^2 + a^4 - 2a^2a'^2 + a'^4$$

Posons $c = y^2 + a'^2 - a^2$. Alors :

$$c^2 + 4a^2y^2 = y^4 + a'^4 + a^4 + 2a'^2y^2 - 2a^2y^2 - 2a^2a'^2 + 4a^2y^2 = y^4 + 2a^2y^2 + 2a'^2y^2 + a^4 - 2a^2a'^2 + a'^4 = D$$

L'expression de D étant symétrique en (a, a') , en échangeant les rôles de a et a' on obtient aussi $c'^2 + 4a'^2y^2 = D$ avec $c' = y^2 + a^2 - a'^2$. Ainsi

$$D = (y^2 + a'^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2 = (y^2 + a^2 - a'^2)^2 + 4a'^2y^2.$$

Avec ces notations, $\pi u = \frac{a'c}{D}$, $\pi v = \frac{2aa'y}{D}$, $\pi u' = \frac{ac'}{D}$, $\pi v' = -\frac{2aa'y}{D}$.

Le polynôme P . Posons $Q_1(x) = x^2 + a^2$, $Q_2(x) = (x - y)^2 + a'^2$ et :

$$P(x) = \pi[(vx + au)Q_2(x) + (v'(x - y) + a'u')Q_1(x)] - aa'$$

P est un polynôme à coefficients réels de degré au plus 3.

Divisibilité par Q_1 . On a $Q_2(x) = Q_1(x) - 2yx + c$. Donc :

$$P(x) = \pi[(vx + au) + v'(x - y) + a'u'] Q_1(x) + \pi(vx + au)(c - 2yx) - aa'$$

En développant et en écrivant $x^2 = Q_1(x) - a^2$:

$$\pi(vx + au)(c - 2yx) = -2\pi yv x^2 + \pi(cv - 2ayu)x + \pi acu = -2\pi yv Q_1(x)$$

$$+ \pi(cv - 2ayu)x + \pi(acu + 2a^2yv)$$

Or $\pi(cv - 2ayu) = \frac{2aa'yc - 2aya'c}{D} = 0$ et

$$\pi(acu + 2a^2yv) = \frac{a(a'c^2 + 4a^2a'y^2)}{D} = \frac{aa'(c^2 + 4a^2y^2)}{D} = aa'.$$

Donc :

$$P(x) = \pi[(vx + au) + v'(x - y) + a'u' - 2yv] Q_1(x)$$

et P est divisible par Q_1 .

Divisibilité par Q_2 . Posons $t = x - y$. On a $Q_1(x) = Q_2(x) + 2yt + c'$, donc :

$$P(x) = \pi[(vx + au) + v't + a'u'] Q_2(x) + \pi(v't + a'u')(2yt + c') - aa'$$

En écrivant $t^2 = Q_2(x) - a'^2$:

$$\pi(v't + a'u')(2yt + c') = 2\pi yv' Q_2(x) + \pi(c'v' + 2a'yu')t + \pi(a'c'u' - 2a'^2yv')$$

$$\text{Or } \pi(c'v' + 2a'yu') = \frac{-2aa'yc' + 2a'yac'}{D} = 0 \text{ et}$$

$$\pi(a'c'u' - 2a'^2yv') = \frac{a'(ac'^2 + 4aa'^2y^2)}{D} = \frac{aa'(c'^2 + 4a'^2y^2)}{D} = aa'.$$

Donc :

$$P(x) = \pi[(vx + au) + v'(x - y) + a'u' + 2yv'] Q_2(x)$$

et P est divisible par Q_2 .

Application de 3). Q_1 et Q_2 sont réels, unitaires, de degré 2. Ils n'ont pas de racine réelle, car $Q_1(x) \geq a^2 > 0$ et $Q_2(x) \geq a'^2 > 0$ pour tout réel x . Ils sont distincts, car le coefficient de x vaut 0 dans Q_1 et $-2y \neq 0$ dans Q_2 . D'après 3), $P = 0$, c'est-à-dire, pour tout réel x :

$$(vx + au) Q_2(x) + (v'(x - y) + a'u') Q_1(x) = \frac{aa'}{\pi}$$

En divisant par $\pi Q_1(x)Q_2(x) > 0$, on obtient ($\star$).

Conclusion

pour tout réel x ,

$$\frac{aa'}{\pi^2(x^2 + a^2)((x - y)^2 + a'^2)} = \frac{vx + au}{\pi(x^2 + a^2)} + \frac{v'(x - y) + a'u'}{\pi((x - y)^2 + a'^2)}.$$

b) Question adaptée au programme actuel. On calcule directement $u + u'$ à partir des définitions et on factorise le numérateur.

$$\pi D(u + u') = a'(y^2 + a'^2 - a^2) + a(y^2 + a^2 - a'^2) = (a + a')y^2 + a^3 + a'^3 - aa'(a + a')$$

Or $a^3 + a'^3 = (a + a')(a^2 - aa' + a'^2)$, donc

$a^3 + a'^3 - aa'(a + a') = (a + a')(a^2 - 2aa' + a'^2) = (a + a')(a - a')^2$. Ainsi :

$$\pi D(u + u') = (a + a')(y^2 + (a - a')^2)$$

Comme $D = (y^2 + (a + a')^2)(y^2 + (a - a')^2)$ avec $y^2 + (a - a')^2 > 0$, on peut simplifier.

Conclusion

$$u + u' = \frac{a + a'}{\pi(y^2 + (a + a')^2)}.$$

5) On reconnaît des dérivées de la forme $\frac{w'}{w}$ avec $w > 0$. Le calcul est valable pour tout paramètre $a > 0$ et tout réel y ; on l'utilisera en 6) avec a' à la place de a .

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2)$ et $x \mapsto \frac{1}{2} \ln((x - y)^2 + a^2)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (les arguments du logarithme sont strictement positifs), de dérivées respectives $\frac{x}{x^2 + a^2}$ et $\frac{x - y}{(x - y)^2 + a^2}$, fonctions continues sur $[-B, B]$. Donc :

$$\int_{-B}^B \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(B^2 + a^2) - \frac{1}{2} \ln(B^2 + a^2) = 0$$

$$\int_{-B}^B \frac{x - y}{(x - y)^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(B - y)^2 + a^2}{(B + y)^2 + a^2} \right)$$

Conclusion

la première intégrale est nulle (on pouvait aussi invoquer l'imparité de l'intégrande) et la seconde vaut $\frac{1}{2} \ln \frac{(B - y)^2 + a^2}{(B + y)^2 + a^2}$. Remarquons que cette dernière tend vers $\frac{1}{2} \ln 1 = 0$ quand $B \rightarrow +\infty$, car $\frac{(B - y)^2 + a^2}{(B + y)^2 + a^2} \rightarrow 1$ et $\ln$ est continue en 1.

- 6) On applique la formule de convolution, puis $(\star)$ sur un segment symétrique $[-B, B]$ et on fait tendre B vers $+\infty$. On ne peut pas intégrer séparément chaque terme de $(\star)$ sur $\mathbb{R}$, car $\frac{vx}{x^2 + a^2}$ n'est pas intégrable au voisinage de $\pm\infty$ lorsque $v \neq 0$: c'est le rôle de la question 5).

Densité de $Z_a + Z_{a'}$. Les variables Z_a et $Z_{a'}$ sont indépendantes, de densités f_a et $f_{a'}$, et f_a est bornée par $\frac{1}{\pi a}$. D'après le rappel, la fonction $h : y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x) f_{a'}(y-x) dx$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est une densité de $Z_a + Z_{a'}$.

Calcul de $h(y)$ pour $y \neq 0$. Soit $y \in \mathbb{R}^*$ et u, v, u', v' les réels de la question 4. Pour tout réel x , $f_a(x) f_{a'}(y-x) = \frac{aa'}{\pi^2(x^2 + a^2)((x-y)^2 + a'^2)}$, donc, d'après $(\star)$ et par linéarité de l'intégrale sur le segment $[-B, B]$ ($B > 0$) :

$$\int_{-B}^B f_a(x) f_{a'}(y-x) dx = I_1(B) + I_2(B)$$

avec :

$$I_1(B) = \frac{v}{\pi} \int_{-B}^B \frac{x}{x^2 + a^2} dx + \frac{au}{\pi} \int_{-B}^B \frac{dx}{x^2 + a^2}$$

$$I_2(B) = \frac{v'}{\pi} \int_{-B}^B \frac{x-y}{(x-y)^2 + a'^2} dx + \frac{a'u'}{\pi} \int_{-B}^B \frac{dx}{(x-y)^2 + a'^2}$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$, et une primitive de

$x \mapsto \frac{1}{(x-y)^2 + a'^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{a'} \arctan \frac{x-y}{a'}$. Avec la question 5) (appliquée avec a pour la première intégrale et avec a' pour la seconde) :

$$I_1(B) = 0 + \frac{au}{\pi} \cdot \frac{2}{a} \arctan \frac{B}{a} = \frac{2u}{\pi} \arctan \frac{B}{a}$$

$$I_2(B) = \frac{v'}{2\pi} \ln \left(\frac{(B-y)^2 + a'^2}{(B+y)^2 + a'^2} \right) + \frac{u'}{\pi} \left(\arctan \frac{B-y}{a'} - \arctan \frac{-B-y}{a'} \right)$$

Quand $B \rightarrow +\infty$: $\arctan \frac{B}{a} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, donc $I_1(B) \rightarrow u$; le logarithme tend vers 0 (question 5), $\arctan \frac{B-y}{a'} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ et $\arctan \frac{-B-y}{a'} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, donc $I_2(B) \rightarrow u'$. Comme l'intégrale définissant $h(y)$ converge, elle est égale à la limite de $\int_{-B}^B f_a(x) f_{a'}(y-x) dx$ quand $B \rightarrow +\infty$. Donc, d'après 4) b) :

$$h(y) = u + u' = \frac{a + a'}{\pi (y^2 + (a + a')^2)} = f_{a+a'}(y)$$

Loi de $Z_a + Z_{a'}$. Les fonctions h et $f_{a+a'}$ coïncident sur $\mathbb{R}^*$; en particulier h est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. Modifier une densité en un point ne change pas les intégrales $\int_{-\infty}^x$, donc ne change pas la fonction de répartition associée : pour tout réel x , $P(Z_a + Z_{a'} \leq x) = \int_{-\infty}^x h(t) dt = \int_{-\infty}^x f_{a+a'}(t) dt$. Ainsi $f_{a+a'}$, qui est une densité d'après 1), est aussi une densité de $Z_a + Z_{a'}$.

Conclusion

pour tout $y \neq 0$, la densité h de $Z_a + Z_{a'}$ vaut $u + u'$ au point y , et $Z_a + Z_{a'}$ suit la loi de Cauchy de paramètre $a + a'$.

7) On montre que la somme de n copies de Z suit la loi de Cauchy de paramètre n , comme nZ .

Soit $(Z_k)_{k \geq 1}$ une suite de copies de Z et $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$. Montrons par récurrence que S_n suit la loi de Cauchy de paramètre n . Pour $n = 1$, c'est l'hypothèse. Si S_n suit la loi de Cauchy de paramètre n , alors S_n et Z_{n+1} sont indépendantes (lemme des coalitions) et suivent des lois de Cauchy de paramètres n et 1; d'après 6), S_{n+1} suit la loi de Cauchy de paramètre $n + 1$.

D'après 2) b) avec $\lambda = n > 0$, nZ suit aussi la loi de Cauchy de paramètre n . Donc

$S_n \sim nZ$ pour tout $n \geq 1$ et toute suite de copies. Comme Z est à densité, elle n'est pas nulle presque sûrement et la suite associée est unique (lemme U).

Conclusion

Z suit une loi stable, de suite associée $(a_n)_{n \geq 1} = (n)_{n \geq 1}$. Remarquons que Z n'a pas d'espérance (question 2) a)) : ce n'est pas une gaussienne, ce qui ne contredit pas II.B, qui supposait l'existence d'une variance.

IV. Les événements exceptionnels

1) On écrit E_n comme réunion d'événements deux à deux incompatibles, qui ont tous la même probabilité par symétrie des rôles des X_i .

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, notons $A_k = \bigcap_{1 \leq i \leq n, i \neq k} (|X_k| > 2|X_i|)$, de sorte que $E_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$.

Pour $n = 1$, l'intersection est vide, donc $A_1 = \Omega$ (convention usuelle), $E_1 = \Omega$ et la formule s'écrit $1 = 1 \cdot P(\Omega)$. Supposons désormais $n \geq 2$.

Incompatibilité. Soient $k \neq j$ et supposons qu'il existe $\omega \in A_k \cap A_j$. Alors

$|X_k(\omega)| > 2|X_j(\omega)|$ et $|X_j(\omega)| > 2|X_k(\omega)|$, donc $|X_k(\omega)| > 4|X_k(\omega)|$, soit $3|X_k(\omega)| < 0$, ce qui est impossible. Donc $A_k \cap A_j = \emptyset$, et par additivité

$$P(E_n) = \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

Égalité des probabilités. Soit $k \in \{2, \dots, n\}$ et notons $(Y_1, \dots, Y_n)$ la famille obtenue à partir de $(X_1, \dots, X_n)$ en échangeant X_1 et X_k : $Y_1 = X_k$, $Y_k = X_1$ et $Y_i = X_i$ pour les autres indices. Les Y_i sont mutuellement indépendantes (c'est la même famille, réordonnée) et suivent toutes la loi de Cauchy de paramètre 1, comme les X_i . D'après la propriété (P), $(Y_1, \dots, Y_n)$ et $(X_1, \dots, X_n)$ ont même loi conjointe. Or

$A_k = \bigcap_{i=2}^n (|Y_1| > 2|Y_i|)$ est décrit à partir de $(Y_1, \dots, Y_n)$ exactement comme $A_1 = \bigcap_{i=2}^n (|X_1| > 2|X_i|)$ l'est à partir de $(X_1, \dots, X_n)$. Donc $P(A_k) = P(A_1)$.

Conclusion

$$P(E_n) = n P(A_1) = n P\left(\bigcap_{i=2}^n (|X_1| > 2|X_i|)\right).$$

2) On établit une inclusion d'événements, puis on utilise la croissance de P .

Soit $A > 0$ et $\omega \in (|X_1| > 2A) \cap \left(\bigcap_{i=2}^n (|X_i| < A)\right)$. Pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, $|X_1(\omega)| > 2A > 2|X_i(\omega)|$, donc $\omega \in A_1$. Ainsi :

$$(|X_1| > 2A) \cap \left(\bigcap_{i=2}^n (|X_i| < A)\right) \subset \bigcap_{i=2}^n (|X_1| > 2|X_i|)$$

Par croissance de P et d'après 1) :

Conclusion

$\forall A > 0$,

$$P(E_n) \geq n P\left((|X_1| > 2A) \cap \left(\bigcap_{i=2}^n (|X_i| < A)\right)\right).$$

3) On utilise la parité de f_1 , la primitive arctan et l'identité admise dans le préambule.

Soit $A > 0$. Les événements $(X_1 > A)$ et $(X_1 < -A)$ sont incompatibles et de réunion $(|X_1| > A)$. Par le changement de variable affine $x = -s$ et la parité de f_1 ,

$$P(X_1 < -A) = \int_{-\infty}^{-A} f_1(x) dx = \int_A^{+\infty} f_1(s) ds = P(X_1 > A).$$

Ensuite, pour $B > A$:

$$\int_A^B \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi} (\arctan B - \arctan A) \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan A \right)$$

Donc $P(X_1 > A) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan A \right) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{1}{A}$, d'après l'identité $\arctan A + \arctan \frac{1}{A} = \frac{\pi}{2}$ admise pour $A > 0$. Par suite $P(|X_1| > A) = 2P(X_1 > A)$.

Conclusion

$$\forall A > 0, \quad P(|X_1| > A) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{A}.$$

4) On applique 2) avec la valeur proposée de A , l'indépendance des X_i , puis 3).

Posons $\theta = \frac{\pi\lambda}{2n}$. Par hypothèse $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, donc $\tan \theta > 0$ et $A = \frac{1}{\tan \theta} > 0$ est bien défini, avec $\frac{1}{A} = \tan \theta$.

Indépendance. Les événements $(|X_1| > 2A), (|X_2| < A), \dots, (|X_n| < A)$ portent sur des variables distinctes de la famille mutuellement indépendante $(X_1, \dots, X_n)$; ils sont donc mutuellement indépendants, et :

$$P \left((|X_1| > 2A) \cap \left(\bigcap_{i=2}^n (|X_i| < A) \right) \right) = P(|X_1| > 2A) \prod_{i=2}^n P(|X_i| < A)$$

Calcul de $P(|X_i| < A)$. La variable X_i étant à densité,

$P(|X_i| = A) = P(X_i = A) + P(X_i = -A) = 0$. Donc, avec 3) appliqué à X_i (de même loi que X_1) :

$$P(|X_i| < A) = 1 - P(|X_i| > A) = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan(\tan \theta) = 1 - \frac{2}{\pi} \theta = 1 - \frac{\lambda}{n}$$

car $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, donc $\arctan(\tan \theta) = \theta$.

Enfin $2A = \frac{2}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}}$. En reportant dans 2) :

Conclusion

$$P(E_n) \geq n P \left(|X_1| > \frac{2}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}} \right) \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{n-1}.$$

5) On montre que le minorant w_n obtenu en 4) tend vers $\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}$, à l'aide d'équivalents, puis on revient à la définition de la limite.

Soit n_0 un entier strictement supérieur à λ . Pour $n \geq n_0$, on a $\frac{\pi\lambda}{2n} < \frac{\pi}{2}$ et $1 - \frac{\lambda}{n} > 0$; posons $\theta_n = \frac{\pi\lambda}{2n}$ et :

$$w_n = n P \left(|X_1| > \frac{2}{\tan \theta_n} \right) \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{n-1}$$

Premier facteur. D'après 3) avec $\frac{2}{\tan \theta_n} > 0$: $n P \left(|X_1| > \frac{2}{\tan \theta_n} \right) = \frac{2n}{\pi} \arctan t_n$, où $t_n = \frac{\tan \theta_n}{2} > 0$.

On a $\frac{\tan \theta}{\theta} = \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \rightarrow 1$ quand $\theta \rightarrow 0$ (car $\frac{\sin \theta}{\theta} \rightarrow \sin'(0) = 1$ et $\cos 0 = 1$).

Comme $\theta_n \rightarrow 0$ avec $\theta_n \neq 0$, on en déduit $\tan \theta_n \sim \theta_n$, donc $t_n \sim \frac{\pi\lambda}{4n}$; en particulier

$t_n \rightarrow 0$. De même $\frac{\arctan t}{t} \rightarrow \arctan'(0) = 1$ quand $t \rightarrow 0$, et $t_n \rightarrow 0$ avec $t_n \neq 0$, donc $\arctan t_n \sim t_n \sim \frac{\pi\lambda}{4n}$. Par produit d'équivalents :

$$\frac{2n}{\pi} \arctan t_n \sim \frac{2n}{\pi} \cdot \frac{\pi\lambda}{4n} = \frac{\lambda}{2}$$

donc le premier facteur tend vers $\frac{\lambda}{2}$.

Second facteur. Comme $1 - \frac{\lambda}{n} > 0$, $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-1} = \exp\left((n-1) \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right)$. Comme $\frac{\ln(1+h)}{h} \rightarrow 1$ quand $h \rightarrow 0$ et $-\frac{\lambda}{n} \rightarrow 0$, on a $\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \sim -\frac{\lambda}{n}$, donc $(n-1) \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \sim -\frac{\lambda(n-1)}{n}$, qui tend vers $-\lambda$. Par continuité de $\exp$, le second facteur tend vers $e^{-\lambda}$.

Ainsi $w_n \rightarrow \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}$. Par définition de la limite, avec $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_1 tel que, pour tout $n \geq N_1$, $\left|w_n - \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}\right| < \varepsilon$, donc $w_n > \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda} - \varepsilon$. Pour $n \geq \max(n_0, N_1)$, la question 4) donne $P(E_n) \geq w_n$.

Conclusion

pour tout entier $n \geq \max(n_0, N_1)$, $P(E_n) > \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda} - \varepsilon$.

6) On choisit λ maximisant $\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}$, puis ε convenablement.

La fonction $g : \lambda \mapsto \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $g'(\lambda) = \frac{1}{2}(1 - \lambda)e^{-\lambda}$: elle est croissante sur $]0, 1]$, décroissante sur $[1, +\infty[$, de maximum $g(1) = \frac{1}{2e}$. On a $e < 3$: en effet

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!},$$

et $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ pour $k \geq 1$, avec inégalité stricte pour $k \geq 3$, donc

$$e < 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 3.$$

Ainsi $\frac{1}{2e} > \frac{1}{6}$.

Appliquons 5) avec $\lambda = 1$ et $\varepsilon = \frac{1}{2e} - \frac{1}{6} > 0$: pour tout entier n assez grand,

$$P(E_n) > \frac{1}{2e} - \varepsilon = \frac{1}{6}.$$

Conclusion

pour tout entier n assez grand, $P(E_n) > \frac{1}{6}$. Avec la loi de Cauchy, la probabilité qu'une valeur domine toutes les autres d'un facteur 2 reste minorée lorsque n grandit : les valeurs extrêmes y ont un poids important.

V. Le nombre a_n est une puissance de n

A. Dans cette section, « X non nulle » signifie que X n'est pas nulle presque sûrement :
 $P(X = 0) < 1$.

1) On utilise la symétrie avec l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et un système complet d'événements.

Par symétrie, $P(X > 0) = P(-X > 0) = P(X < 0)$. Les événements $(X > 0)$, $(X < 0)$, $(X = 0)$ forment un système complet d'événements, donc
 $1 = P(X > 0) + P(X < 0) + P(X = 0) = 2P(X > 0) + P(X = 0)$.

Conclusion

$$P(X > 0) = \frac{1}{2}(1 - P(X = 0)).$$

2) On écrit $(X > 0)$ comme réunion croissante des événements $\left(X > \frac{1}{k}\right)$ et on utilise la continuité monotone.

D'après 1) et $P(X = 0) < 1$, on a $P(X > 0) > 0$. Les événements $\left(X > \frac{1}{k}\right)$, $k \geq 1$, forment une suite croissante, de réunion $(X > 0)$ (si $X(\omega) > 0$, il existe k tel que $\frac{1}{k} < X(\omega)$). Par continuité monotone, $P\left(X > \frac{1}{k}\right) \rightarrow P(X > 0) > 0$ quand $k \rightarrow +\infty$. Il existe donc $k \geq 1$ tel que $P\left(X > \frac{1}{k}\right) > 0$.

Conclusion

$$\mu = \frac{1}{k} > 0 \text{ vérifie } P(X > \mu) > 0.$$

3) a) On découpe la somme de $m + n$ copies en deux paquets indépendants, puis on utilise la propriété (P).

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$. Par définition de la stabilité, $a_{m+n}X \sim X_1 + \dots + X_{m+n} = U + W$, avec $U = X_1 + \dots + X_m$ et $W = X_{m+1} + \dots + X_{m+n}$.

D'une part, $U \sim a_m X$ par définition. D'autre part, la suite $(X_{m+k})_{k \geq 1}$ est une suite de variables indépendantes de même loi que X , c'est-à-dire une suite de copies de X ; la définition (valable pour toute suite de copies) donne $W \sim a_n X$. Par le lemme des coalitions, U et W sont indépendantes.

Par ailleurs, $a_m X_1$ et $a_n X_2$ sont indépendantes, avec $a_m X_1 \sim a_m X \sim U$ et $a_n X_2 \sim a_n X \sim W$. D'après la propriété (P), $U + W \sim a_m X_1 + a_n X_2$.

Conclusion

$$\text{pour tout } (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}, a_{m+n}X \text{ a même loi que } a_m X_1 + a_n X_2.$$

b) On raisonne par récurrence sur $k \geq 1$, en montrant que pour tout $(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^{*k}$,
 $a_{m_1 + \dots + m_k} X \sim a_{m_1} X_1 + \dots + a_{m_k} X_k$.

Initialisation : pour $k = 1$, $a_{m_1} X \sim a_{m_1} X_1$ car $X_1 \sim X$.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang k et soit $(m_1, \dots, m_{k+1}) \in \mathbb{N}^{*k+1}$. Posons $M = m_1 + \dots + m_k$ et $T = a_{m_1} X_1 + \dots + a_{m_k} X_k$. D'après a),
 $a_{M+m_{k+1}} X \sim a_M X_1 + a_{m_{k+1}} X_{k+1}$. Les couples $(a_M X_1, a_{m_{k+1}} X_{k+1})$ et $(T, a_{m_{k+1}} X_{k+1})$ sont formés de variables indépendantes (pour le second, par le lemme des coalitions), avec $a_M X_1 \sim a_M X \sim T$ (hypothèse de récurrence) et $a_{m_{k+1}} X_{k+1} \sim a_{m_{k+1}} X_{k+1}$. D'après (P),
 $a_M X_1 + a_{m_{k+1}} X_{k+1} \sim T + a_{m_{k+1}} X_{k+1}$. Donc $a_{m_1 + \dots + m_{k+1}} X \sim a_{m_1} X_1 + \dots + a_{m_{k+1}} X_{k+1}$.

Conclusion

pour tout $k \geq 1$ et tout $(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^{*k}$, $a_{m_1+\dots+m_k}X$ a même loi que $a_{m_1}X_1 + \dots + a_{m_k}X_k$.

c) On applique b) avec $m_1 = \dots = m_k = \ell$, puis le lemme U.

Soient $k, \ell \in \mathbb{N}^*$. D'après b), $a_{k\ell}X \sim a_\ell(X_1 + \dots + X_k)$. Or $X_1 + \dots + X_k \sim a_kX$, donc $a_\ell(X_1 + \dots + X_k) \sim a_\ell a_k X$. Ainsi $a_{k\ell}X \sim (a_k a_\ell)X$ avec $a_{k\ell} > 0$ et $a_k a_\ell > 0$. Comme X n'est pas nulle presque sûrement, le lemme U donne $a_{k\ell} = a_k a_\ell$.

Conclusion

pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}^*$, $a_{k\ell} = a_k a_\ell$.

4) On minore la probabilité de l'événement $(a_m X_1 + a_n X_2 > a_n t)$ grâce à l'événement proposé.

Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $t > 0$. Sur l'événement $(X_1 \geq 0) \cap (X_2 > t)$, on a $a_m X_1 \geq 0$ et $a_n X_2 > a_n t$ (car $a_m, a_n > 0$), donc $a_m X_1 + a_n X_2 > a_n t$. Ainsi :

$$(X_1 \geq 0) \cap (X_2 > t) \subset (a_m X_1 + a_n X_2 > a_n t)$$

Par V.A.3.a, $a_m X_1 + a_n X_2 \sim a_{m+n} X$, donc, avec la croissance de P et l'indépendance de X_1 et X_2 :

$$\begin{aligned} P(a_{m+n} X > a_n t) &= P(a_m X_1 + a_n X_2 > a_n t) \geq P(X_1 \geq 0) P(X_2 > t) \\ &= P(X \geq 0) P(X > t) \end{aligned}$$

Or, d'après 1),

$$P(X \geq 0) = P(X > 0) + P(X = 0) = \frac{1}{2} (1 + P(X = 0)) \geq \frac{1}{2}.$$

Enfin $P(a_{m+n}X > a_n t) = P\left(X > \frac{a_n}{a_{m+n}} t\right)$ car $a_{m+n} > 0$.

Conclusion

pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ et tout $t > 0$, $P\left(X > \frac{a_n}{a_{m+n}} t\right) \geq \frac{1}{2}P(X > t)$.

5) On combine 4) (avec $t = \mu$) et le fait que $P(X > s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow +\infty$, puis on applique la partie I à la suite (a_n) .

Majoration. Soit μ donné par 2) et $p = P(X > \mu) > 0$. Notons F la fonction de répartition de X ; $P(X > s) = 1 - F(s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow +\infty$. Il existe donc $s_0 > 0$ tel que, pour tout $s \geq s_0$, $P(X > s) < \frac{p}{2}$. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$. D'après 4) avec $t = \mu$, $P\left(X > \mu \frac{a_n}{a_{m+n}}\right) \geq \frac{p}{2}$, donc $\mu \frac{a_n}{a_{m+n}} < s_0$, c'est-à-dire $\frac{a_n}{a_{m+n}} < \frac{s_0}{\mu}$. L'ensemble $\left\{\frac{a_n}{a_{m+n}} : (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$ est donc majoré par $M = \frac{s_0}{\mu}$.

Application de la partie I à $u_n = a_n$. La suite (a_n) est strictement positive et vérifie $a_{mn} = a_m a_n$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ d'après 3) c). Soient $m \leq n$ dans $\mathbb{N}^*$. Si $m = n$, $a_m = a_n$. Si $m < n$, alors $n - m \in \mathbb{N}^*$ et, d'après la majoration appliquée au couple $(n - m, m)$, $\frac{a_m}{a_{(n-m)+m}} = \frac{a_m}{a_n} \leq M$. Avec $A = \max(1, M) > 0$, on a donc $a_m \leq A a_n$ dès que $m \leq n$. Les hypothèses de la partie I sont satisfaites.

Conclusion

l'ensemble considéré est majoré, et il existe un réel $\alpha \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n^\alpha$.

B. 1) On échange les rôles de X_1 et X_2 grâce à la propriété (P).

Les couples (X_1, X_2) et (X_2, X_1) sont formés de variables indépendantes, et leurs composantes ont toutes la loi de X . D'après (P), ils ont même loi conjointe, donc $X_1 - X_2 \sim X_2 - X_1 = -(X_1 - X_2)$.

Conclusion

$X_1 - X_2$ est symétrique.

- 2) On montre que $Y = X_1 - X_2$ est stable de suite associée (a_n) , en regroupant les copies de X deux par deux; on vérifie que Y n'est pas nulle presque sûrement (c'est ici qu'intervient l'hypothèse de densité), puis on applique la section A à Y .

Y n'est pas nulle presque sûrement. Supposons $P(Y = 0) = 1$ et notons F la fonction de répartition de X . Pour tout réel x , $(X_1 \leq x) \cap (Y = 0) \subset (X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x)$ (si $X_1 = X_2$ et $X_1 \leq x$, alors $X_2 \leq x$). Comme $P(\overline{(Y = 0)}) = 0$, on a $P((X_1 \leq x) \cap (Y = 0)) = P(X_1 \leq x)$. Par indépendance, $F(x) \leq F(x)^2$, donc $F(x)(1 - F(x)) \leq 0$ avec $0 \leq F(x) \leq 1$, d'où $F(x) \in \{0, 1\}$ pour tout x . Or X étant à densité, F est continue sur $\mathbb{R}$, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$; par le théorème des valeurs intermédiaires, F prend la valeur $\frac{1}{2}$: contradiction.

Y est stable, de suite associée (a_n) . Posons, pour $k \geq 1$, $W_k = X_{2k-1} - X_{2k}$. Par le lemme des coalitions (les W_k dépendent de paquets disjoints de la famille indépendante (X_j)), les W_k sont mutuellement indépendantes; d'après (P), chaque W_k a la loi de $X_1 - X_2 = Y$ (les couples (X_{2k-1}, X_{2k}) et (X_1, X_2) sont formés de variables indépendantes de loi celle de X). Ainsi (W_k) est une suite de copies de Y .

Soit $(Y_k)_{k \geq 1}$ une suite quelconque de copies de Y et $n \in \mathbb{N}^*$. Les familles $(Y_1, \dots, Y_n)$ et $(W_1, \dots, W_n)$ sont formées de variables indépendantes de loi celle de Y , donc, d'après (P), $Y_1 + \dots + Y_n \sim W_1 + \dots + W_n$. Or :

$$W_1 + \dots + W_n = U - U' \quad \text{avec} \quad U = X_1 + X_3 + \dots + X_{2n-1}, \quad U' = X_2 + X_4 + \dots + X_{2n}$$

Les suites $(X_{2k-1})_{k \geq 1}$ et $(X_{2k})_{k \geq 1}$ sont des suites de copies de X , donc $U \sim a_n X$ et $U' \sim a_n X$ par stabilité de X . Par le lemme des coalitions, U et U' sont indépendantes. Les couples (U, U') et $(a_n X_1, a_n X_2)$ sont formés de variables indépendantes, de mêmes lois marginales; d'après (P), $U - U' \sim a_n X_1 - a_n X_2 = a_n Y$. Donc $Y_1 + \dots + Y_n \sim a_n Y$, pour tout $n \geq 1$ et toute suite de copies de Y , avec $a_n > 0$.

Ainsi Y suit une loi stable et (a_n) convient comme suite associée. Comme Y n'est pas

nulle presque sûrement, la suite associée est unique (lemme U) : $b_n = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Conclusion de la partie. La variable Y est stable, non nulle et symétrique (question 1). D'après V.A.5 appliqué à Y , il existe un réel $\alpha \geq 0$ tel que $b_n = n^\alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = b_n$; par conséquent, pour toute variable X suivant une loi stable à densité, il existe un réel $\alpha \geq 0$ tel que la suite associée vérifie $a_n = n^\alpha$ pour tout $n \geq 1$. Par exemple, $\alpha = \frac{1}{2}$ pour les gaussiennes centrées (II.A.4) et $\alpha = 1$ pour les lois de Cauchy (III.7).

Relevé des adaptations

III.3) L'énoncé original portait sur deux racines complexes non réelles distinctes z_1, z_2 de partie imaginaire strictement positive d'un polynôme réel de degré au plus 3 (avec l'indication sur les conjugués). Il est remplacé par son équivalent réel : un polynôme réel de degré au plus 3 divisible par deux trinômes unitaires distincts sans racine réelle est nul. Justification : les nombres complexes sont exclus du programme ; l'objectif (outil d'identification utilisé en 4) a)) et la place de la question sont conservés.

III.4) Dans l'original, u, v, u', v' étaient définis comme parties réelles et imaginaires de deux quotients complexes faisant intervenir i , et les égalités de 4) b) donnant ces quotients étaient admises. Dans la version adaptée, ces quatre réels sont définis directement par les expressions réelles qui résultent de ces égalités (avec la notation D), ce qui supprime tout recours aux complexes sans changer leurs valeurs. En a), l'indication (application de 3) avec $z_1 = ia$ et $z_2 = y + ia'$) est remplacée par l'application de la nouvelle question 3) aux trinômes $x^2 + a^2$ et $(x - y)^2 + a'^2$, et on demande de vérifier deux écritures de D nécessaires au calcul. En b), seul le calcul de $u + u'$ est demandé, les égalités admises étant devenues les définitions. Justification : exclusion des nombres complexes ; l'identité $(\star)$ et la valeur de $u + u'$, utilisées en 6), sont inchangées.