



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

2003

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Nuages de points et approximation d'un nuage

Dans tout le problème, n et p désignent des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, et on pose $E_p = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

L'espace E_p est muni de sa structure euclidienne canonique; la norme euclidienne d'un vecteur x de E_p est notée $\|x\|$; le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E_p est noté $\langle x, y \rangle$.

Si u est un vecteur non nul de E_p , D_u désigne la droite vectorielle engendrée par u , et si $x \in E_p$, $P_{D_u}(x)$ est le projeté orthogonal de x sur cette droite.

Si F est un sous-espace vectoriel de E_p , son supplémentaire orthogonal dans E_p est noté $F^\perp$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,\ell}(\mathbb{R})$, on note Φ_A l'application linéaire de $\mathcal{M}_{\ell,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ définie par $\Phi_A(Z) = AZ$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et toute famille $(u_j)_{1 \leq j \leq r}$ de vecteurs de E_p , $\text{Vect}(u_1, \dots, u_r)$ est le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

Si g est une fonction définie sur un sous-espace vectoriel F de E_p et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on désigne par $\max_{x \in F, \|x\|=1} g(x)$ ou par $\max\{g(x) : x \in F \text{ et } \|x\| = 1\}$ le maximum, lorsqu'il existe, de g sur l'ensemble des vecteurs unitaires de F .

Partie I : Étude d'un exemple

Dans cette partie, et uniquement dans celle-ci, on suppose que $p = 2$. On note (u_1, u_2) la base canonique de E_2 .

1. On considère les vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in E_2$ dont les coordonnées dans la base (u_1, u_2) sont respectivement $(1, 2)$, $(-3, -1)$ et $(2, -1)$.

On considère un réel m , et on note, pour chaque $j \in \{1, 2, 3\}$, v'_j le projeté orthogonal de v_j sur la droite vectorielle engendrée par $u_1 + mu_2$.

- 1.a) Calculer en fonction de m la quantité $\|v'_1\|^2 + \|v'_2\|^2 + \|v'_3\|^2$.

1.b) Déterminer la valeur m_0 de m pour laquelle cette quantité atteint son maximum ; ce maximum est noté λ_1 .

2. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.a) Vérifier que λ_1 est une valeur propre de $\Phi_{X^t X}$, $u_1 + m_0 u_2$ étant un vecteur propre associé à λ_1 .

2.b) Déterminer l'autre valeur propre de $\Phi_{X^t X}$ et la comparer à λ_1 .

Partie II : Les axes principaux d'inertie d'un nuage

Les notations introduites dans cette partie seront utilisées dans toute la suite du problème.

On définit la matrice $X = (x_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, appelée nuage. Ses colonnes $c_1, \dots, c_n$ sont appelées points du nuage ; X est donc un nuage de n points dans un espace de dimension p .

On définit la matrice $V = X^t X$. On appelle F le sous-espace de E_p engendré par les colonnes $c_1, \dots, c_n$, et on suppose que $\dim F = r$ avec $p > r \geq 1$.

Pour tout vecteur $v \neq 0$ de E_p , on pose :

$$I(v) = \sum_{j=1}^n \|P_{D_v}(c_j)\|^2.$$

Cette quantité s'appelle l'inertie du nuage X sur la droite D_v .

Pour tout couple $(v, w) \in E_p^2$, on pose :

$$J(v, w) = \sum_{j=1}^n \langle v, c_j \rangle \langle w, c_j \rangle.$$

1.a) Montrer que V est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des réels positifs ou nuls.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de V , ordonnées de sorte que $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p$.

Justifier l'existence d'une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ de E_p telle que :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad V e_j = \lambda_j e_j.$$

1.b) Montrer que le noyau de Φ_V est égal à celui de Φ_{tX} .

En déduire que le rang de V est égal à r .

Montrer que $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_p = 0$.

Que peut-on dire de $\lambda_1, \dots, \lambda_r$?

Montrer que $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de F .

2.a) Montrer, pour tout vecteur unitaire $v \in E_p$, l'égalité $I(v) = {}^t v V v$.

2.b) Déterminer, pour chaque $j \in \{1, \dots, p\}$, $I(e_j)$ à l'aide des nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

2.c) On définit les sous-espaces $F_1, \dots, F_r$ de E_p par $F_1 = F$ et, pour $2 \leq j \leq r$, $F_j = F_{j-1} \cap D_{e_{j-1}}^\perp$.

Montrer que, pour chaque $j \in \{1, \dots, r\}$, $F_j = \text{Vect}(e_j, \dots, e_r)$.

Montrer que :

$$I(e_1) = \max\{I(v) : v \in E_p, \|v\| = 1\} = \max\{I(v) : v \in F_1, \|v\| = 1\}.$$

Montrer que, pour chaque $j \in \{1, \dots, r\}$:

$$I(e_j) = \max\{I(v) : v \in F_j, \|v\| = 1\}.$$

3. Soit w un vecteur unitaire de E_p tel que $I(w) = \max\{I(v) : v \in E_p, \|v\| = 1\}$. Montrer que $w \in F$.
4. On suppose dans cette question que $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ sont des vecteurs unitaires de E_p et que $G_1, \dots, G_r$ sont des sous-espaces de E_p satisfaisant le système (S) suivant :

$$G_1 = F, \quad \varepsilon_1 \in G_1, \quad I(\varepsilon_1) = \max\{I(v) : v \in G_1, \|v\| = 1\},$$

$$\forall j \in \{2, \dots, r\}, \quad G_j = G_{j-1} \cap D_{\varepsilon_{j-1}}^\perp, \quad \varepsilon_j \in G_j, \quad I(\varepsilon_j) = \max\{I(v) : v \in G_j, \|v\| = 1\}.$$

Les droites $D_{\varepsilon_1}, \dots, D_{\varepsilon_r}$ sont appelées axes principaux d'inertie du nuage.

4.a) Vérifier que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ est une base orthonormale de F et que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de E_p .

4.b) Montrer que, pour tout $(v, w) \in E_p^2$:

$$J(v, w) = {}^t v V w = \langle v, \Phi_V(w) \rangle.$$

4.c) On se donne deux vecteurs v_1, v_2 unitaires, orthogonaux et appartenant à F . Pour tout réel t , on pose $\varphi(t) = I((\cos t)v_1 + (\sin t)v_2)$.

Exprimer $\varphi(t)$ à l'aide de $I(v_1), I(v_2), J(v_1, v_2)$ et t .

Montrer que φ est majorée sur $\mathbb{R}$ et qu'elle admet un maximum.

On suppose que le maximum de φ est atteint en 0. Montrer que $J(v_1, v_2) = 0$.

4.d) Montrer que, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$, $J(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ dès que $i \neq j$.

Déterminer la forme de la matrice de Φ_V dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$.

En déduire que, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, ε_i est un vecteur propre de V associé à λ_i .

5. Dans le langage des statisticiens, les colonnes c_j de X représentent des individus d'une population statistique où p variables statistiques x_i ont respectivement pris les valeurs $x_{i1}, \dots, x_{in}$. Ces valeurs sont fixées de telle sorte que leurs moyennes sont nulles, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0.$$

Calculer la covariance $\text{Cov}(x_k, x_\ell)$ des variables x_k et x_ℓ , pour $k, \ell \in \{1, \dots, p\}$, puis comparer V à la matrice $(\text{Cov}(x_k, x_\ell))_{1 \leq k, \ell \leq p}$.

On utilise la covariance empirique définie avec le coefficient $1/n$, les n individus étant pondérés de façon uniforme.

Partie III : Une décomposition de la matrice X

Pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$, on note Π_i la matrice, dans la base canonique de E_p , de la projection orthogonale sur D_{e_i} . Les vecteurs $e_1, \dots, e_p$ ont été définis en II.1.a.

1. Montrer que

$$\sum_{i=1}^p \Pi_i = I_p,$$

où I_p est la matrice-identité d'ordre p .

2. Déterminer $\Pi_i \Pi_j$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ tel que $i \neq j$.
3. Calculer $\Pi_i X$ pour chaque $i \in \{r+1, \dots, p\}$ et en déduire que

$$X = \sum_{i=1}^r \Pi_i X.$$

4. Pour tout $s \in \{1, \dots, r\}$, on pose

$$X_s = \sum_{i=1}^s \Pi_i X.$$

4.a) Montrer que $\text{Im } \Phi_{X_s} \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_s)$.

4.b) Calculer $X_s^t X e_j$ pour chaque $j \in \{1, \dots, p\}$ et déterminer le rang de X_s .

Partie IV : Une norme euclidienne de matrices carrées

Pour tout entier naturel $q \geq 1$ et toute matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, on pose

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^q a_{ii}.$$

On sait que la trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et que, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, alors $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. On sait également que deux matrices semblables ont la même trace.

Pour $M, N \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on pose $\Theta(M, N) = \text{Tr}(M^t N)$.

1. Montrer que $(M, N) \mapsto \Theta(M, N)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on note $\|M\| = \sqrt{\text{Tr}(M^t M)}$, appelée ici norme euclidienne de M .

2. Calculer $\Theta(\Pi_i X, \Pi_j X)$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$. Distinguer les cas $i = j$ et $i \neq j$, et exprimer les résultats en fonction des nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

3. Calculer $\|X - X_s\|^2$ en fonction de $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, pour chaque $s \in \{1, \dots, r\}$.

Partie V : La meilleure approximation du nuage

On rappelle que, si H_1 et H_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E_p , alors :

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2).$$

On considère un entier $s \in \{1, \dots, r-1\}$ et une matrice $N \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que $\text{rg}(N) \leq s$.

1. Justifier rapidement l'existence d'une base orthonormale $(a_1, \dots, a_p)$ de E_p formée de vecteurs propres de $(X - N)^t(X - N)$. On note $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ les valeurs propres associées respectivement à ces vecteurs, ordonnées de sorte que $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_p$.
2. Soient $i \in \{1, \dots, r-s\}$ et G un sous-espace de E_p de dimension supérieure ou égale à i .

2.a) Montrer que $\dim(G \cap \text{Vect}(a_i, \dots, a_p)) \geq 1$.

2.b) En déduire qu'il existe un vecteur unitaire $u \in G$ tel que $\|{}^t(X - N)u\|^2 \leq \gamma_i$.

2.c) On considère $H = \text{Ker } \Phi_{tN} \cap \text{Vect}(e_1, \dots, e_{s+i})$.

Montrer que $\dim H \geq i$.

En déduire que $\lambda_{s+i} \leq \gamma_i$.

3.a) Montrer que

$$\|X - N\|^2 = \sum_{i=1}^p \gamma_i.$$

3.b) En déduire que

$$\|X - N\|^2 \geq \sum_{i=s+1}^r \lambda_i.$$

3.c) En déduire que X_s réalise la meilleure approximation de X par des matrices de rang inférieur ou égal à s , au sens de la norme euclidienne définie sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

4. Soit G un sous-espace de E_p . On note P_G la projection orthogonale sur G , Π_G sa matrice dans la base canonique et

$$K(G) = \sum_{j=1}^n \|P_G(c_j)\|^2.$$

La quantité $K(G)$ s'appelle l'inertie du nuage X sur le sous-espace G . Dans le cas $G = E_p$, $K(G)$ est l'inertie totale du nuage.

4.a) Montrer que $K(G) = \|\Pi_G X\|^2$.

4.b) Montrer que $K(G) = \|X\|^2 - \|X - \Pi_G X\|^2$.

4.c) On suppose toujours $s \in \{1, \dots, r-1\}$ et $\dim G \leq s$.

Montrer que

$$K(G) \leq \sum_{i=1}^s \lambda_i.$$

Montrer que $K(\text{Vect}(e_1, \dots, e_s))$ est le maximum des nombres $K(G)$, lorsque G parcourt l'ensemble des sous-espaces de E_p de dimension inférieure ou égale à s .

4.d) On suppose dans cette question que $s \in \{1, \dots, p\}$; on ne suppose donc plus que $s \leq r-1$.

Montrer que $K(\text{Vect}(e_1, \dots, e_s))$ est le maximum des nombres $K(G)$, lorsque G parcourt l'ensemble des sous-espaces de E_p de dimension inférieure ou égale à s .

Partie VI : Non multa, sed multum

Dans cette partie, on propose une interprétation pratique des résultats théoriques précédents à propos d'une enquête de consommations.

On a étudié les consommations annuelles de huit denrées alimentaires, représentées par huit variables statistiques x_i , supposées centrées, pour les catégories socioprofessionnelles suivantes :

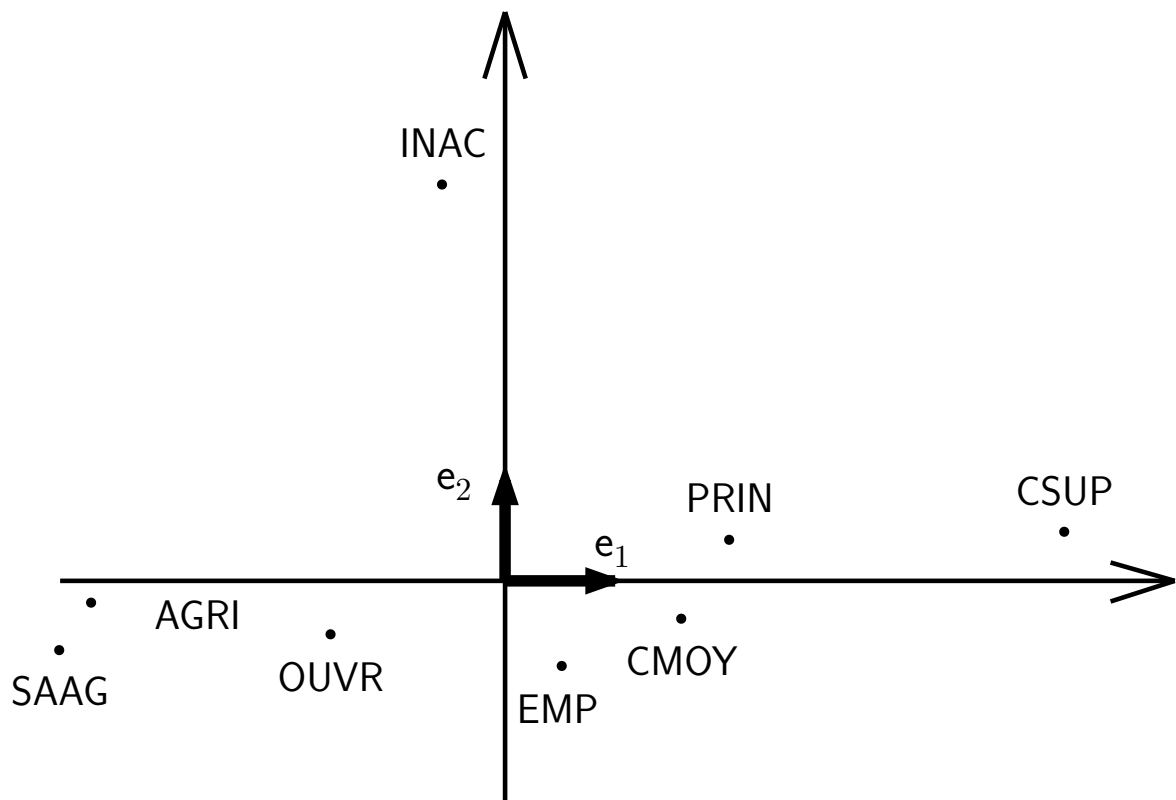
Catégorie	Abréviation	Colonne
Exploitants agricoles	AGRI	c_1
Salariés agricoles	SAAG	c_2
Professions indépendantes	PRIN	c_3
Cadres supérieurs	CSUP	c_4
Cadres moyens	CMOY	c_5
Employés	EMP	c_6
Ouvriers	OUV	c_7
Inactifs	INAC	c_8

Dans cet exemple, un individu est donc une catégorie socioprofessionnelle. Les résultats sont consignés dans une matrice $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq 8}$. Par exemple, x_{12} représente la consommation moyenne de la denrée 1 par la catégorie SAAG.

Les valeurs propres de $V = X^t X$ sont approximativement 70, 20, 5, 3, 2, 0, 0 et 0, associées respectivement à $e_1, \dots, e_8$.

1. Quelle part de l'inertie totale est contenue dans l'inertie du nuage de points sur le sous-espace de base (e_1, e_2) ?

On a représenté dans le dessin suivant les projetés orthogonaux, dans le plan de base (e_1, e_2) , des huit individus $(c_j)_{1 \leq j \leq 8}$, c'est-à-dire des huit colonnes représentant les consommations moyennes de chaque catégorie socioprofessionnelle.



2. Que représente le nuage de points du dessin pour le nuage X de l'enquête ?