



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2003

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Partie I : Un résultat d'analyse

Préliminaire. Pour $v \in [0, 1]$, $Y_{n,v}$ prend ses valeurs dans $\{0, \dots, n\}$ avec $P([Y_{n,v} = k]) = \binom{n}{k} v^k (1-v)^{n-k}$ (avec la convention $0^0 = 1$; pour $v = 0$ ou $v = 1$, la loi est certaine). Elle admet l'espérance nv et la variance $nv(1-v)$. Pour x fixé,

$$P([Y_{n,v} \leq nx]) = \sum_{0 \leq k \leq nx} \binom{n}{k} v^k (1-v)^{n-k}$$

est une fonction polynomiale de v , donc continue sur $[0, 1]$: toutes les intégrales de cette partie sont des intégrales de fonctions continues sur des segments.

- 1) a) Soit $v \in [x + \varepsilon, 1]$, de sorte que $v - x \geq \varepsilon > 0$. Si $Y_{n,v} \leq nx$, alors $nv - Y_{n,v} \geq n(v - x) > 0$, donc $|Y_{n,v} - nv| \geq n(v - x)$:

$$[Y_{n,v} \leq nx] \subset [|Y_{n,v} - nv| \geq n(v - x)]$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, avec $n(v - x) > 0$:

$$P([Y_{n,v} \leq nx]) \leq \frac{nv(1-v)}{n^2(v-x)^2} = \frac{v(1-v)}{n(v-x)^2} \leq \frac{v(1-v)}{n\varepsilon^2}$$

Enfin $v(1-v) = \frac{1}{4} - \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$.

Conclusion

$$\text{pour } v \in [x + \varepsilon, 1], \quad P([Y_{n,v} \leq nx]) \leq \frac{v(1-v)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

- b)** Soit $v \in [0, x - \varepsilon]$, de sorte que $x - v \geq \varepsilon > 0$. Si $Y_{n,v} > nx$, alors $Y_{n,v} - nv > n(x - v) > 0$, donc $[Y_{n,v} > nx] \subset [|Y_{n,v} - nv| \geq n(x - v)]$, et par Bienaymé-Tchebychev :

$$P([Y_{n,v} > nx]) \leq \frac{v(1-v)}{n(x-v)^2} \leq \frac{v(1-v)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Conclusion

$$\text{pour } v \in [0, x - \varepsilon], \quad P([Y_{n,v} > nx]) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

- c)** Rectification d'une erreur de l'énoncé : le document fourni annonçait les majorants $\frac{M(1-x)}{2n\varepsilon^2}$ et $\frac{Mx}{2n\varepsilon^2}$. Ces majorations sont vraies, mais trop faibles pour obtenir l'inégalité de d) : leur somme donne $\frac{M}{2n\varepsilon^2}$ au lieu de $\frac{M}{4n\varepsilon^2}$. L'énoncé rectifié demande les majorants $\frac{M(1-x)}{4n\varepsilon^2}$ et $\frac{Mx}{4n\varepsilon^2}$, plus forts, qui permettent de conclure en d).

Par l'inégalité triangulaire pour les intégrales sur un segment, $|\varphi| \leq M$ et a) :

$$\left| \int_{x+\varepsilon}^1 \varphi(v) P([Y_{n,v} \leq nx]) dv \right| \leq \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{M}{4n\varepsilon^2} dv = \frac{M(1-x-\varepsilon)}{4n\varepsilon^2} \leq \frac{M(1-x)}{4n\varepsilon^2}$$

De même, comme $1 - P([Y_{n,v} \leq nx]) = P([Y_{n,v} > nx])$, b) donne :

$$\left| \int_0^{x-\varepsilon} \varphi(v)(1 - P([Y_{n,v} \leq nx])) dv \right| \leq \frac{M(x-\varepsilon)}{4n\varepsilon^2} \leq \frac{Mx}{4n\varepsilon^2}$$

Conclusion

les deux inégalités demandées sont établies (et a fortiori celles du document fourni, avec $2n\varepsilon^2$).

- d) On écrit $\int_0^x \varphi(v) dv = \int_0^1 \varphi(v) \mathbf{1}_{[0,x]}(v) dv$ en découpant aux points $x - \varepsilon, x, x + \varepsilon$; notons $p(v) = P([Y_{n,v} \leq nx]) \in [0, 1]$. Par la relation de Chasles :

$$\int_0^x \varphi - \int_0^1 \varphi p = \int_0^{x-\varepsilon} \varphi(1-p) + \int_{x-\varepsilon}^x \varphi(1-p) - \int_x^{x+\varepsilon} \varphi p - \int_{x+\varepsilon}^1 \varphi p$$

Les deux intégrales centrales sont majorées en valeur absolue par $M\varepsilon$ chacune, car $0 \leq p \leq 1$ et $0 \leq 1-p \leq 1$. Avec c) :

$$\left| \int_0^x \varphi(v) dv - \int_0^1 \varphi(v) p(v) dv \right| \leq \frac{Mx}{4n\varepsilon^2} + 2M\varepsilon + \frac{M(1-x)}{4n\varepsilon^2} = \left(\frac{1}{4n\varepsilon^2} + 2\varepsilon \right) M$$

Conclusion

l'inégalité demandée est établie.

- 2) Soit $x \in]0, 1[$. On choisit $\varepsilon = n^{-1/3}$ dans 1) d), ce qui équilibre les deux termes. Cette valeur est admissible dès que $n^{-1/3} < \min(x, 1-x)$, c'est-à-dire pour $n > \frac{1}{\min(x, 1-x)^3}$: on a alors $0 < x - \varepsilon < x + \varepsilon < 1$. Pour ces entiers :

$$\frac{1}{4n\varepsilon^2} + 2\varepsilon = \frac{1}{4n \cdot n^{-2/3}} + \frac{2}{n^{1/3}} = \frac{1}{4n^{1/3}} + \frac{8}{4n^{1/3}} = \frac{9}{4\sqrt[3]{n}}$$

Conclusion

pour tout $n > \frac{1}{\min(x, 1-x)^3}$,

$$\left| \int_0^x \varphi(v) dv - \int_0^1 \varphi(v) P([Y_{n,v} \leq nx]) dv \right| \leq \frac{9M}{4\sqrt[3]{n}}.$$

3) a) Soit

$$Q(v) = \sum_{k=0}^d a_k v^k$$

un polynôme. Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 \varphi(v) Q(v) dv = \sum_{k=0}^d a_k \int_0^1 \varphi(v) v^k dv = 0$$

Conclusion

$\int_0^1 \varphi(v) Q(v) dv = 0$ pour tout polynôme Q à coefficients réels.

b) Soit $x \in]0, 1[$. D'après le préliminaire, $v \mapsto P([Y_{n,v} \leq nx])$ est polynomiale, donc

$\int_0^1 \varphi(v) P([Y_{n,v} \leq nx]) dv = 0$ d'après a). La question 2) donne alors, pour n assez grand :

$$0 \leq \left| \int_0^x \varphi(v) dv \right| \leq \frac{9M}{4\sqrt[3]{n}}$$

et le majorant tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

Conclusion

$$\int_0^x \varphi(v) dv = 0 \text{ pour tout } x \in]0, 1[.$$

c) Méthode 1 — Dérivation.

La fonction $\Psi : x \mapsto \int_0^x \varphi(v) dv$ est, φ étant continue, la primitive de φ nulle en 0; elle est dérivable sur $[0, 1]$ avec $\Psi' = \varphi$. D'après b), Ψ est nulle sur $]0, 1[$, donc sa dérivée φ y est nulle. Par continuité de φ en 0 et en 1, $\varphi(0) = \lim_{0^+} \varphi = 0$ et $\varphi(1) = \lim_{1^-} \varphi = 0$.

Méthode 2 — Raisonnement par l'absurde.

Supposons $\varphi(x_0) \neq 0$ pour un $x_0 \in [0, 1]$, par exemple $\varphi(x_0) > 0$ (sinon on remplace φ par $-\varphi$). Par continuité, il existe un segment $[a, b] \subset [0, 1]$ avec $a < b$, contenant x_0 , sur lequel $\varphi \geq \frac{\varphi(x_0)}{2} > 0$. On peut choisir $0 < a < b < 1$ si $x_0 \in]0, 1[$, et sinon réduire le segment pour qu'il soit inclus dans $]0, 1[$ tout en gardant $a < b$. Alors

$\int_a^b \varphi = \Psi(b) - \Psi(a) \geq \frac{(b-a)\varphi(x_0)}{2} > 0$, alors que $\Psi(a) = \Psi(b) = 0$ d'après b) : contradiction.

La méthode 1 utilise le théorème fondamental de l'analyse; la méthode 2 n'utilise que la positivité de l'intégrale et sert dès qu'on veut montrer qu'une fonction continue d'intégrales nulles est nulle.

Conclusion

la fonction φ est nulle sur $[0, 1]$.

Préliminaires pour la suite. La densité commune est continue sur $[0, +\infty[$ et nulle sur $] -\infty, 0[$, donc pour $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Ainsi $F(0) = 0$, F est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ avec $F' = f > 0$ (dérivée à droite en 0), donc strictement croissante, et $1 - F(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt > 0$: on a $0 \leq F(x) < 1$ pour tout $x \geq 0$.

Partie II : Caractérisations de la loi exponentielle à l'aide du minimum d'un n -échantillon

- 1) Soit $n \geq 1$. Pour $x \geq 0$, $[I_n > x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i > x]$, et les événements $[X_i > x]$ sont indépendants (les X_i le sont), donc :

$$P([I_n > x]) = \prod_{i=1}^n P([X_i > x]) = (1 - F(x))^n$$

Pour $x < 0$, $[I_n \leq x] = \bigcup_{i=1}^n [X_i \leq x]$ est de probabilité nulle car chaque X_i est positive.

Conclusion

la fonction de répartition de I_n vaut $1 - (1 - F(x))^n$ pour $x \geq 0$ et 0 pour $x < 0$.

- 2) a) Ici $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$. Pour $x \geq 0$, d'après 1) :

$$P([nI_n \leq x]) = P\left(\left[I_n \leq \frac{x}{n}\right]\right) = 1 - (e^{-\lambda x/n})^n = 1 - e^{-\lambda x}$$

et pour $x < 0$, $P([nI_n \leq x]) = 0$. La variable nI_n a donc la même fonction de répartition que X_1 .

Conclusion

nI_n a même loi que X_1 (loi exponentielle de paramètre λ).

- b) D'après a), nI_n suit la loi exponentielle de paramètre λ , d'espérance $\frac{1}{\lambda}$. Par linéarité,

$$E(I_n) = \frac{1}{n} E(nI_n).$$

Conclusion

$$E(I_n) = \frac{1}{n\lambda}.$$

3) a) Soit $n \geq 1$ et $x \geq 0$. Comme nI_n et X_1 ont la même loi, elles ont la même fonction de répartition :

$$F(x) = P([nI_n \leq x]) = P\left(\left[I_n \leq \frac{x}{n}\right]\right) = 1 - \left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$$

Conclusion

$$F(x) = 1 - \left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n.$$

b) Ici $F'(0)$ désigne la dérivée (à droite) de F en 0, qui vaut $f(0)$.

Si $x = 0$: $n \ln(1 - F(0)) = n \ln 1 = 0$ pour tout n , de limite 0.

Si $x > 0$: $u_n = F\left(\frac{x}{n}\right)$ vérifie $0 < u_n < 1$ (stricte croissance de F et $F < 1$) et

$u_n \rightarrow F(0) = 0$ par continuité. Comme $\frac{\ln(1-u)}{-u} \rightarrow 1$ quand $u \rightarrow 0$ ($u \neq 0$), on a $n \ln(1 - u_n) \sim -nu_n$. Or :

$$nu_n = x \cdot \frac{F(x/n) - F(0)}{x/n} \rightarrow x F'(0)$$

par définition du nombre dérivé, puisque $\frac{x}{n} \rightarrow 0^+$. Ainsi $n \ln(1 - u_n) \rightarrow -x F'(0)$.

Conclusion

$$\text{pour tout } x \geq 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right) = -x F'(0).$$

c) Soit $x \geq 0$. D'après a), $\left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = 1 - F(x) > 0$, donc, en prenant le

logarithme, $n \ln \left(1 - F \left(\frac{x}{n} \right) \right) = \ln(1 - F(x))$ pour tout n : la suite est constante, et sa limite est $-xF'(0)$ d'après b). Donc $1 - F(x) = e^{-F'(0)x}$. De plus $F'(0) = f(0) > 0$. La fonction de répartition de X_1 vaut donc $1 - e^{-F'(0)x}$ pour $x \geq 0$ et 0 pour $x < 0$.

Conclusion

X_1 suit la loi exponentielle de paramètre $F'(0) = f(0)$.

- 4) a) D'après les préliminaires, F est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, avec $F(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ (fonction de répartition). Par le théorème de la bijection, F réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur l'intervalle $[F(0), \lim_{+\infty} F[= [0, 1[$, la borne 1 n'étant pas atteinte puisque $F < 1$. Sa réciproque F^{-1} est continue et strictement croissante sur $[0, 1[$.

Conclusion

F est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$.

- b) Question adaptée au programme actuel : le changement de variable non affine $u = F(x)$ est indiqué dans l'énoncé.

Densité de I_n . D'après 1), la fonction de répartition H_n de I_n est continue sur $\mathbb{R}$ (en 0, $H_n(0) = 0$), nulle sur $] -\infty, 0[$, et de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ avec $H'_n(x) = nf(x)(1 - F(x))^{n-1}$. Donc I_n admet la densité h_n égale à $nf(1 - F)^{n-1}$ sur $[0, +\infty[$ et à 0 ailleurs, et, I_n admettant une espérance :

$$E(I_n) = \int_0^{+\infty} x nf(x)(1 - F(x))^{n-1} dx$$

Changement de variable sur un segment. Soit $A > 0$. La fonction F est de classe C^1 sur $[0, A]$ et $u \mapsto nF^{-1}(u)(1 - u)^{n-1}$ est continue sur $[0, F(A)]$. Comme $x = F^{-1}(F(x))$, le changement de variable $u = F(x)$ donne :

$$\int_0^A x n f(x) (1 - F(x))^{n-1} dx = \int_0^{F(A)} n F^{-1}(u) (1 - u)^{n-1} du$$

Passage à la limite. Pour $B \in [0, 1[$, appliquons cette égalité avec $A = F^{-1}(B)$:

$\int_0^B n F^{-1}(u) (1 - u)^{n-1} du = \int_0^{F^{-1}(B)} x h_n(x) dx$. Quand $B \rightarrow 1^-$, $F^{-1}(B) \rightarrow +\infty$ (sinon F^{-1} , croissante, serait majorée par un réel C et $B = F(F^{-1}(B)) \leq F(C) < 1$ pour tout $B < 1$, ce qui est absurde). Le second membre tend donc vers $E(I_n)$. L'intégrale $\int_0^1 n F^{-1}(u) (1 - u)^{n-1} du$ converge et vaut $E(I_n)$.

Conclusion

$$E(I_n) = n \int_0^1 F^{-1}(u) (1 - u)^{n-1} du \text{ pour tout } n \geq 1.$$

c) Inégalités. Soit $u \in [0, 1[$. On a $F^{-1}(u) \geq 0$ et $1 - u > 0$, d'où la première inégalité.

Avec $n = 1$ dans b), $I_1 = X_1$ et $\int_0^1 F^{-1}(t) dt = E(X_1)$ converge ; donc $\int_u^1 F^{-1}(t) dt$ converge. Pour $t \in [u, 1[$, $F^{-1}(t) \geq F^{-1}(u)$ par croissance, donc pour $B \in [u, 1[$:

$$\int_u^B F^{-1}(t) dt \geq (B - u) F^{-1}(u)$$

et le passage à la limite $B \rightarrow 1$ donne $\int_u^1 F^{-1}(t) dt \geq (1 - u) F^{-1}(u)$.

Continuité de G . Sur $[0, 1[$, G est continue comme produit de fonctions continues. En 1 :

$0 \leq G(u) \leq \int_u^1 F^{-1}(t) dt$, et ce reste d'une intégrale convergente tend vers 0 quand $u \rightarrow 1^-$. Par encadrement, $G(u) \rightarrow 0 = G(1)$.

Égalités. Soit $n \geq 2$. Pour $u \in [0, 1[$, $F^{-1}(u)(1 - u)^{n-1} = G(u)(1 - u)^{n-2}$. La fonction $u \mapsto G(u)(1 - u)^{n-2}$ est continue sur le segment $[0, 1]$ (car $n - 2 \geq 0$) : son intégrale sur $[0, 1]$ est une intégrale ordinaire, égale à l'intégrale (convergente) de b). Le changement de variable affine $v = 1 - u$ donne la seconde égalité.

Conclusion

$$0 \leq (1-u)F^{-1}(u) \leq \int_u^1 F^{-1}(t) dt, G \text{ est continue sur } [0, 1], \text{ et pour } n \geq 2,$$

$$E(I_n) = n \int_0^1 G(u)(1-u)^{n-2} du = n \int_0^1 G(1-v) v^{n-2} dv.$$

d) Pour la loi exponentielle de paramètre λ , $F_\lambda(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, donc

$$F_\lambda^{-1}(u) = -\frac{\ln(1-u)}{\lambda} \text{ et } G_\lambda(u) = -\frac{(1-u)\ln(1-u)}{\lambda} \text{ pour } u \in [0, 1[.$$

i) Méthode 1 — Application des résultats précédents à la loi exponentielle.

La loi exponentielle de paramètre λ vérifie toutes les hypothèses faites sur X_1 (densité $\lambda e^{-\lambda x}$ continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$, espérance finie). Pour une suite de variables indépendantes de cette loi, c) donne $n \int_0^1 G_\lambda(1-v) v^{n-2} dv = E(I_n)$, et 2) b)

$$\text{donne } E(I_n) = \frac{1}{n\lambda}.$$

Méthode 2 — Calcul direct.

Pour $v \in]0, 1]$, $G_\lambda(1-v) = -\frac{v \ln v}{\lambda}$, donc

$n \int_0^1 G_\lambda(1-v) v^{n-2} dv = \frac{n}{\lambda} \int_0^1 (-\ln v) v^{n-1} dv$. Pour $a \in]0, 1]$, une intégration par parties sur $[a, 1]$ donne :

$$\int_a^1 (-\ln v) v^{n-1} dv = \left[-\ln v \cdot \frac{v^n}{n} \right]_a^1 + \int_a^1 \frac{v^{n-1}}{n} dv = \frac{a^n \ln a}{n} + \frac{1-a^n}{n^2}$$

et quand $a \rightarrow 0^+$, $a^n \ln a \rightarrow 0$ (croissances comparées, $n \geq 1$), donc l'intégrale vaut $\frac{1}{n^2}$.

La méthode 1 évite tout calcul en réutilisant 2) b) ; la méthode 2 le vérifie de façon autonome.

Conclusion

$$\text{pour tout } n \geq 2, \quad n \int_0^1 G_\lambda(1-v) v^{n-2} dv = \frac{1}{n\lambda}.$$

- ii) Posons $\psi(v) = G(1-v) - G_\lambda(1-v)$ pour $v \in [0, 1]$; ψ est continue sur $[0, 1]$ (c), appliqué à G et à G_λ . Pour tout $n \geq 2$, d'après c), l'hypothèse $E(I_n) = \frac{1}{n\lambda}$ et i) :

$$n \int_0^1 \psi(v) v^{n-2} dv = \frac{1}{n\lambda} - \frac{1}{n\lambda} = 0$$

donc $\int_0^1 \psi(v) v^m dv = 0$ pour tout entier $m = n - 2 \geq 0$. D'après la partie I, ψ est nulle.

Conclusion

$$G(1-v) = G_\lambda(1-v) \text{ pour tout } v \in [0, 1], \text{ c'est-à-dire } G = G_\lambda.$$

- iii) Pour $u \in [0, 1[$, $(1-u)F^{-1}(u) = (1-u)F_\lambda^{-1}(u)$ avec $1-u \neq 0$, donc $F^{-1} = F_\lambda^{-1}$ sur $[0, 1[$. Pour $x \geq 0$, $F_\lambda(x) \in [0, 1[$ et $F^{-1}(F_\lambda(x)) = F_\lambda^{-1}(F_\lambda(x)) = x$, donc, en appliquant F , $F_\lambda(x) = F(x)$. Les fonctions de répartition de X_1 et de la loi exponentielle de paramètre λ coïncident sur $[0, +\infty[$, et toutes deux sont nulles sur $] -\infty, 0[$.

Conclusion

X_1 suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Partie III : Caractérisation de la loi exponentielle à l'aide des deux premiers records

A. Préliminaire

- 1) Si ω vérifie $X_k(\omega) \leq X_1(\omega)$ pour tout k , aucun entier k ne vérifie $X_k(\omega) > X_1(\omega)$, donc $R_2(\omega) = X_1(\omega) = R_1(\omega)$. Sinon, $R_2(\omega) = X_n(\omega)$ pour un entier n tel que $X_n(\omega) > X_1(\omega)$, donc $R_2(\omega) \neq R_1(\omega)$. La condition est automatiquement vraie pour $k = 1$.

Conclusion

$$[R_2 = R_1] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leq X_1] = \bigcap_{k=2}^{+\infty} [X_k \leq X_1]. \text{ On note aussi que } R_2 \geq R_1 \text{ partout.}$$

- 2) Soit $t \geq 0$ et $n \geq 1$. Si $\omega \in \bigcap_{k=2}^{n+1} [X_k \leq X_1]$ et $X_1(\omega) \leq t$, alors $X_k(\omega) \leq X_1(\omega) \leq t$ pour tout $k \in \{1, \dots, n+1\}$. D'où :

$$\bigcap_{k=2}^{n+1} [X_k \leq X_1] \subset \left(\bigcap_{k=1}^{n+1} [X_k \leq t] \right) \cup [X_1 > t]$$

Par croissance et sous-additivité de P , puis par indépendance des X_k :

$$P \left(\bigcap_{k=2}^{n+1} [X_k \leq X_1] \right) \leq \prod_{k=1}^{n+1} P([X_k \leq t]) + P([X_1 > t]) = (F(t))^{n+1} + 1 - F(t)$$

Conclusion

l'inégalité demandée est établie.

- 3) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $F(t) \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow +\infty$, on choisit $t \geq 0$ tel que $1 - F(t) \leq \varepsilon$. Comme $0 \leq F(t) < 1$, $(F(t))^{n+1} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, donc $(F(t))^{n+1} \leq \varepsilon$ pour n assez grand. Avec 2), pour n assez grand, $P \left(\bigcap_{k=2}^{n+1} [X_k \leq X_1] \right) \leq 2\varepsilon$.

Conclusion

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=2}^{n+1} [X_k \leq X_1]\right) = 0$, c'est-à-dire que la probabilité qu'aucune des variables $X_2, \dots, X_{n+1}$ ne dépasse X_1 tend vers 0.

4) Pour tout $n \geq 1$, $[R_2 = R_1] \subset \bigcap_{k=2}^{n+1} [X_k \leq X_1]$ d'après 1), donc

$0 \leq P([R_2 = R_1]) \leq P\left(\bigcap_{k=2}^{n+1} [X_k \leq X_1]\right)$, et le majorant tend vers 0 d'après 3). Ainsi $P([R_2 = R_1]) = 0$. Comme $R_2 \geq R_1$ partout, $[R_2 > R_1]$ est le complémentaire de $[R_2 = R_1]$.

Conclusion

$P([R_2 > R_1]) = 1$, c'est-à-dire que $R_2 > R_1$ presque sûrement.

B. La caractérisation

1) a) Comme $[R_1 \leq x + h]$ est la réunion disjointe de $[R_1 \leq x]$ et de $[x < R_1 \leq x + h]$:

$$\phi(x + h, y) - \phi(x, y) = P([x < X_1 \leq x + h] \cap [R_2 - R_1 > y])$$

Décomposons $[R_2 - R_1 > y]$. Comme $y \geq 0$, sur cet événement $R_2 > R_1$, donc il existe un plus petit entier k tel que $X_k > X_1$; on a $k \geq 2$, on l'écrit $k = j + 1$ avec $j \geq 1$, et $R_2 = X_{j+1}$. Ainsi $\omega \in [R_2 - R_1 > y]$ si et seulement si il existe $j \geq 1$ tel que $X_i(\omega) \leq X_1(\omega)$ pour $2 \leq i \leq j$ et $X_{j+1}(\omega) > X_1(\omega) + y$ (la condition $X_{j+1} > X_1$ est alors automatique car $y \geq 0$). Pour $j = 1$, l'intersection vide $\bigcap_{i=2}^1$ est Ω . Ces événements, indexés par j , sont deux à deux incompatibles, puisque $j + 1$ est le premier indice de dépassement. Par σ -additivité :

Conclusion

$$\begin{aligned} & \phi(x+h, y) - \phi(x, y) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} P \left([x < X_1 \leq x+h] \cap \left(\bigcap_{i=2}^j [X_i \leq X_1] \right) \cap [X_{j+1} > y + X_1] \right). \end{aligned}$$

b) Notons D_j l'événement du terme d'indice j . Sur $[x < X_1 \leq x+h]$:

- $[X_i \leq x] \subset [X_i \leq X_1] \subset [X_i \leq x+h]$;
- $[X_{j+1} > x+y+h] \subset [X_{j+1} > y+X_1] \subset [X_{j+1} > x+y]$.

Donc, par croissance de P puis indépendance des X_i :

$$\begin{aligned} & (F(x+h) - F(x)) F(x)^{j-1} (1 - F(x+y+h)) \leq P(D_j) \\ & \leq (F(x+h) - F(x)) F(x+h)^{j-1} (1 - F(x+y)) \end{aligned}$$

Comme $0 \leq F(x) \leq F(x+h) < 1$, les séries géométriques convergent :

$$\sum_{j \geq 1} F(x)^{j-1} = \frac{1}{1 - F(x)}$$

et

$$\sum_{j \geq 1} F(x+h)^{j-1} = \frac{1}{1 - F(x+h)}.$$

En sommant les inégalités :

Conclusion

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{1 - F(x)} (1 - F(x+y+h)) &\leq \phi(x+h, y) - \phi(x, y) \\ &\leq \frac{F(x+h) - F(x)}{1 - F(x+h)} (1 - F(x+y)). \end{aligned}$$

2) Divisons l'encadrement de 1) b) par $h > 0$. Quand $h \rightarrow 0^+$:

$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \rightarrow F'(x) = f(x)$ (dérivée à droite si $x = 0$), et par continuité de F , $F(x+h) \rightarrow F(x)$ et $F(x+y+h) \rightarrow F(x+y)$. Les deux membres extrêmes tendent vers $\frac{f(x)}{1 - F(x)} (1 - F(x+y))$ (avec $1 - F(x) > 0$). Par encadrement :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\phi(x+h, y) - \phi(x, y)}{h} = \frac{f(x)}{1 - F(x)} (1 - F(x+y))$$

En admettant, comme l'énoncé l'indique, que la limite à gauche (pour $x > 0$) est la même, la fonction $x \mapsto \phi(x, y)$ est dérivable.

Conclusion

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} (1 - F(x+y)) \text{ pour tous } x, y \geq 0.$$

3) a) Ici $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ et $1 - F(x) = e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$. Fixons $y \geq 0$. D'après 2) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} e^{-\lambda(x+y)} = \lambda e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}$$

La fonction $x \mapsto \phi(x, y)$ est donc de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. De plus

$\phi(0, y) \leq P([X_1 \leq 0]) = 0$. Par le théorème fondamental de l'analyse :

$$\phi(x, y) = \phi(0, y) + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} e^{-\lambda y} dt = (1 - e^{-\lambda x}) e^{-\lambda y}$$

Conclusion

$$\phi(x, y) = (1 - e^{-\lambda x})e^{-\lambda y} \text{ pour tous } x, y \geq 0.$$

- b) Loi de $R_2 - R_1$. Soit $y \geq 0$. La suite d'événements $([R_1 \leq m] \cap [R_2 - R_1 > y])_{m \in \mathbb{N}}$ est croissante, de réunion $[R_2 - R_1 > y]$. Par continuité monotone :

$$P([R_2 - R_1 > y]) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \phi(m, y) = e^{-\lambda y}$$

Comme $R_2 - R_1 \geq 0$, sa fonction de répartition est nulle sur $] -\infty, 0[$ et vaut $1 - e^{-\lambda y}$ pour $y \geq 0$: $R_2 - R_1$ suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Indépendance. Pour $x, y \geq 0$:

$$\begin{aligned} P([R_1 \leq x] \cap [R_2 - R_1 \leq y]) &= P([R_1 \leq x]) - \phi(x, y) = (1 - e^{-\lambda x}) - (1 - e^{-\lambda x})e^{-\lambda y} \\ &= (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\lambda y}) \end{aligned}$$

ce qui est égal à $P([R_1 \leq x]) P([R_2 - R_1 \leq y])$. Les variables R_1 et $R_2 - R_1$ sont positives ; d'après le rappel du préambule, elles sont indépendantes.

Conclusion

$R_2 - R_1$ suit la loi exponentielle de paramètre λ , et R_1 et $R_2 - R_1$ sont indépendantes.

- 4) a) Soit $x, y \geq 0$. Par indépendance de R_1 et $R_2 - R_1$, les événements $[R_1 \leq x]$ et $[R_2 - R_1 > y]$ sont indépendants, donc :

$$\phi(x, y) = F(x) (1 - G(y))$$

Méthode 1 — Avec la dérivée partielle de 2).

D'après l'expression ci-dessus, $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = f(x)(1 - G(y))$. Avec 2) :

$f(x)(1 - G(y)) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}(1 - F(x + y))$, et comme $f(x) > 0$, on peut simplifier par $f(x)$.

Méthode 2 — Directement avec l'encadrement de 1) b).

Pour $h > 0$, $\phi(x + h, y) - \phi(x, y) = (F(x + h) - F(x))(1 - G(y))$, avec $F(x + h) - F(x) > 0$ par stricte croissance de F . En divisant l'encadrement de 1) b) par ce nombre :

$$\frac{1 - F(x + y + h)}{1 - F(x)} \leq 1 - G(y) \leq \frac{1 - F(x + y)}{1 - F(x + h)}$$

et en faisant tendre h vers 0^+ , la continuité de F donne l'égalité.

La méthode 1 s'appuie sur la dérivée partielle (dont la limite à gauche a été admise) ; la méthode 2 n'utilise que l'encadrement établi et la continuité de F , sans résultat admis.

Conclusion

$$\frac{1 - F(x + y)}{1 - F(x)} = 1 - G(y) \text{ pour tous } x, y \geq 0.$$

b) Avec $x = 0$ et $F(0) = 0$, a) donne $1 - F(y) = 1 - G(y)$, donc $G(y) = F(y)$ pour tout $y \geq 0$: G et F sont égales sur $[0, +\infty[$ (et G est nulle sur $] -\infty, 0[$, comme la fonction de répartition de X_1).

L'égalité de a) s'écrit alors, pour tous $x, y \geq 0$, $\frac{1 - F(x + y)}{1 - F(x)} = 1 - F(y)$. Or

$[X_1 > x + y] \subset [X_1 > x]$ et $P([X_1 > x]) = 1 - F(x) > 0$, donc :

$$P([X_1 > x + y] | [X_1 > x]) = \frac{P([X_1 > x + y])}{P([X_1 > x])} = \frac{1 - F(x + y)}{1 - F(x)} = 1 - F(y) = P([X_1 > y])$$

La variable positive X_1 vérifie la propriété d'absence de mémoire ; d'après le rappel du préambule, elle suit une loi exponentielle.

Conclusion

$G = F$ et la loi de X_1 est exponentielle.

Relevé des adaptations

- I.1) c) : rectification d'une erreur du document fourni. Les majorants $\frac{M(1-x)}{2n\varepsilon^2}$ et $\frac{Mx}{2n\varepsilon^2}$ sont remplacés par $\frac{M(1-x)}{4n\varepsilon^2}$ et $\frac{Mx}{4n\varepsilon^2}$. Justification : les majorants annoncés sont vrais mais ne permettent pas de déduire l'inégalité de d), qui demande $\frac{1}{4n\varepsilon^2}$; les nouveaux majorants sont plus forts, vrais, et rendent la déduction possible.
- I.3) a) : le polynôme est noté Q au lieu de P . Justification : éviter la confusion avec la probabilité P .
- II.4) b) : Question adaptée au programme actuel ; le changement de variable non affine $u = F(x)$ est indiqué dans l'énoncé. Justification : le référentiel demande d'indiquer les changements de variable non affines.
- III.B : la fonction de deux variables est notée ϕ pour la distinguer de la fonction φ de la partie I. Justification : clarté des notations ; aucune incidence mathématique.