



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

2002

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Notations

Dans tout le problème, n et p désignent des entiers naturels non nuls fixés. On pose $E_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et l'on définit de même E_p .

On note K_n l'ensemble

$$K_n = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_n : x_i \geq 0 \ (1 \leq i \leq n), \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\},$$

et l'on définit de même K_p .

Les espaces E_n et E_p sont munis de leur structure euclidienne canonique. La norme euclidienne d'un vecteur X est notée $\|X\|$ et le produit scalaire de deux vecteurs X, Y est noté $\langle X, Y \rangle$. La transposée d'une matrice A est notée tA .

Si k est un entier naturel non nul et $(z_i)_{1 \leq i \leq k}$ une famille finie de réels, on note $\max_{1 \leq i \leq k} z_i$, ou plus simplement $\max_i z_i$, son plus grand élément, et $\min_{1 \leq i \leq k} z_i$, ou $\min_i z_i$, son plus petit élément.

Plus généralement, si une fonction $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ atteint un maximum ou un minimum sur $\mathcal{A}$, on note ces valeurs $\max_{x \in \mathcal{A}} f(x)$ et $\min_{x \in \mathcal{A}} f(x)$.

Partie I. Le plus petit des plus grands et le plus grand des plus petits

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On pose

$$u(A) = \min_{1 \leq i \leq n} \left(\max_{1 \leq j \leq p} a_{ij} \right), \quad v(A) = \max_{1 \leq j \leq p} \left(\min_{1 \leq i \leq n} a_{ij} \right).$$

On pourra écrire plus simplement $u(A) = \min_i \max_j a_{ij}$ et $v(A) = \max_j \min_i a_{ij}$.

1) Calculer $u(A)$ et $v(A)$ dans les deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) On revient au cas général où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour tout $j_0 \in \{1, \dots, p\}$ et tout $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, on pose $s_{j_0} = \min_i a_{ij_0}$ et $t_{i_0} = \max_j a_{i_0j}$.

a) Montrer que $s_{j_0} \leq t_{i_0}$ pour tout $j_0 \in \{1, \dots, p\}$ et tout $i_0 \in \{1, \dots, n\}$.

b) En déduire que $v(A) \leq u(A)$.

3) En Python, on représente A par un tableau NumPy à deux dimensions de forme (n, p) . Les indices des lignes vont de 0 à $n - 1$ et ceux des colonnes de 0 à $p - 1$.

a) Écrire une fonction Python `Max_ligne(A, i)` qui retourne le plus grand élément de la ligne d'indice i de A .

b) Écrire une fonction Python `MinMax(A)` qui retourne la valeur $u(A)$. On pourra utiliser la fonction `Max_ligne`.

Partie II. Le minimum des maxima et le maximum des minima

1) Dans cette question, on étudie un exemple. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

et, pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ 1 - x \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y \\ 1 - y \end{pmatrix}$, puis

$$h(x, y) = {}^tXAY.$$

- a) Calculer $h(x, y)$ en fonction de x et de y .
- b) Déterminer, suivant les valeurs de $x \in [0, 1]$, le maximum de la fonction $y \mapsto h(x, y)$ sur $[0, 1]$. Ce maximum sera noté $\lambda(x)$.
- c) Déterminer la valeur minimum de $\lambda(x)$ lorsque x décrit $[0, 1]$. Cette valeur est notée $\alpha(A)$; elle est donc égale à $\min_{X \in K_2} (\max_{Y \in K_2} {}^tXAY)$, que l'on note plus simplement $\min_X \max_Y {}^tXAY$, étant entendu que X et Y décrivent K_2 .
- d) Par une méthode analogue, montrer l'existence de $\beta(A) = \max_{Y \in K_2} \left(\min_{X \in K_2} {}^tXAY \right)$ et donner sa valeur.

Dans la suite de cette partie, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ désigne une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On définit f sur $K_n \times K_p$ par $f(X, Y) = {}^tXAY$.

Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$ et tout $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in K_n$, on pose

$$\varphi_j(X) = \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i,$$

puis $\lambda(X) = \max_{1 \leq j \leq p} \varphi_j(X)$.

- 2) On considère des fonctions $g_1, \dots, g_p$ définies et continues sur K_n , à valeurs dans $\mathbb{R}$.
 - a) Pour deux fonctions continues g_1, g_2 sur K_n , on pose $h = \max(g_1, g_2)$, c'est-à-dire $h(X) = \max(g_1(X), g_2(X))$. Vérifier que $h = \frac{g_1 + g_2 + |g_1 - g_2|}{2}$ et en déduire que h est continue sur K_n .
 - b) Montrer que la fonction $g = \max(g_1, \dots, g_p)$, définie par $g(X) = \max(g_1(X), \dots, g_p(X))$, est continue sur K_n .

3) Dans cette question, on considère un élément $X \in K_n$.

a) Montrer que, pour tout $Y \in K_p$, $f(X, Y) \leq \lambda(X)$.

b) Montrer qu'il existe $Y_X \in K_p$ tel que $f(X, Y_X) = \lambda(X)$.

c) En déduire que l'on peut poser $\lambda(X) = \max_{Y \in K_p} f(X, Y)$.

4) a) Montrer que K_n est borné.

On admet pour la suite du problème que K_n est une partie fermée de E_n ; cette propriété vaut de même pour K_p .

b) Montrer que λ admet un minimum sur K_n .

Ce minimum est noté $\alpha(A)$; il est donc égal à $\min_{X \in K_n} (\max_{Y \in K_p} {}^tXAY)$, que l'on note plus simplement $\min_X \max_Y {}^tXAY$.

On montrerait de manière analogue que le nombre $\max_{Y \in K_p} (\min_{X \in K_n} {}^tXAY)$ existe. Il est noté $\beta(A)$ et on l'écrit plus simplement $\max_Y \min_X {}^tXAY$.

5) a) Soit $(X', Y) \in K_n \times K_p$. Montrer que $\min_{X \in K_n} f(X, Y) \leq \lambda(X')$.

b) En déduire que $\beta(A) \leq \alpha(A)$.

6) On dit qu'une partie non vide $\mathcal{C}$ de E_p est convexe lorsque, pour tout $(X, Y) \in \mathcal{C}^2$ et tout $m \in [0, 1]$, $mY + (1 - m)X \in \mathcal{C}$.

On considère dans cette question une partie $\mathcal{C}$ de E_p , convexe, fermée, bornée et non vide.

a) Montrer qu'il existe $W \in \mathcal{C}$ tel que, pour tout $Y \in \mathcal{C}$, $\|W\| \leq \|Y\|$.

b) Soit $Y \in \mathcal{C}$. Pour tout $m \in [0, 1]$, on pose $Y_m = (1 - m)W + mY$.

- Montrer que, pour tout $m \in]0, 1[$, $\langle W, Y \rangle \geq \frac{2-m}{2(1-m)} \|W\|^2 - \frac{m}{2(1-m)} \|Y\|^2$.

On rappelle que $\langle W, Y \rangle = {}^t W Y$ désigne le produit scalaire de W et de Y .

- En déduire que $\langle W, Y \rangle \geq \|W\|^2$.

7) Dans cette question et jusqu'à la fin de cette partie, on considère l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{m {}^t A X + (1 - m)Y : X \in K_n, Y \in K_p, m \in [0, 1]\}.$$

a) Montrer que K_n est une partie convexe de E_n .

b) Montrer que $\mathcal{C}$ est une partie convexe et bornée de E_p .

On admet pour la suite que $\mathcal{C}$ est une partie fermée de E_p .

8) On suppose dans cette question que le vecteur nul appartient à $\mathcal{C}$.

a) Montrer qu'il existe $X_0 \in K_n$, $Y_0 \in K_p$ et un réel $\mu \leq 0$ tels que ${}^t A X_0 = \mu Y_0$.

b) Déterminer le signe de ${}^t (X_0) A Y$ pour tout $Y \in K_p$.

c) Déterminer le signe de $\alpha(A)$.

9) Dans cette question, on suppose que le vecteur nul n'appartient pas à $\mathcal{C}$.

a) Montrer qu'il existe un élément $W \in \mathcal{C}$ tel que, pour tout $m \in [0, 1]$, tout $X \in K_n$ et tout $Y \in K_p$,

$$m {}^t X A W + (1 - m) {}^t Y W > 0.$$

- b)** On note $w_1, \dots, w_p$ les coordonnées de W dans la base canonique de E_p . Montrer que $w_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$.
- c)** Montrer que, pour tout $X \in K_n$, ${}^tXAW > 0$.
- d)** Montrer qu'il existe un vecteur $W' \in K_p$ tel que, pour tout $X \in K_n$, ${}^tXAW' > 0$.
- e)** Montrer que $\beta(A) > 0$.
- 10)** On définit $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par $B = A - \beta(A)J$, où $J \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les éléments sont égaux à 1.
- a)** Déterminer $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ en fonction de $\alpha(A)$ et de $\beta(A)$.
- b)** Dédire des questions précédentes que $\alpha(A) = \beta(A)$.

Partie III. Point-selle et point critique

Dans cette partie, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et, pour tout $(X, Y) \in K_n \times K_p$, $f(X, Y) = {}^tXAY$.

On dit que $(X_0, Y_0) \in K_n \times K_p$ est un point-selle pour f lorsque, pour tout $(X, Y) \in K_n \times K_p$,

$$f(X_0, Y) \leq f(X_0, Y_0) \leq f(X, Y_0).$$

- 1)** Montrer qu'il existe un point-selle pour f et que, si (X_0, Y_0) en est un, alors $f(X_0, Y_0) = \alpha(A)$.

2) On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on définit g sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}.$$

On appelle point critique de g tout couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{\partial g}{\partial x}(u, v) = \frac{\partial g}{\partial y}(u, v) = 0$.

- a) Montrer que g admet un unique point critique (x_0, y_0) si et seulement si $a + d - b - c \neq 0$. Déterminer dans ce cas (x_0, y_0) .
- b) On suppose que $a - b$ et $d - c$ sont de même signe et non tous nuls, et que $a - c$ et $d - b$ sont de même signe et non tous nuls.

- Montrer que g admet alors un unique point critique (x_0, y_0) et que $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$.
- Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = g(x_0, y_0) + (x - x_0)(y - y_0)(a + d - b - c)$.

On pourra introduire $X = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 1-x_0 \end{pmatrix}$, $Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ 1-y_0 \end{pmatrix}$,

$U = X - X_0$ et $V = Y - Y_0$, puis exprimer $g(x, y)$ à l'aide de U, V, A, X_0, Y_0 .

- En déduire que

$$\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ 1-x_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_0 \\ 1-y_0 \end{pmatrix} \right)$$

est un point-selle pour f définie sur $K_2 \times K_2$ par $f(X, Y) = {}^t X A Y$.

- Quelle est la valeur de $\alpha(A)$?

Partie IV. Application à une étude de la concurrence

Deux entrepreneurs, Primus et Secundus, se partagent le marché d'un produit sur un territoire commun, de sorte qu'au cours d'un trimestre, si l'un voit sa part de marché varier de Δ unités (nombre réel positif ou négatif), l'autre voit la sienne varier de $-\Delta$ unités. Cette variation dépend à chaque trimestre des stratégies choisies par l'un et l'autre.

Primus a le choix entre deux stratégies P_1 et P_2 ; Secundus a le choix entre deux stratégies S_1 et S_2 . Lorsqu'ils choisissent chacun l'une de leurs deux stratégies, leurs parts de marché sont modifiées. Le tableau suivant donne les variations trimestrielles de la part de marché de Secundus ; celles de Primus sont opposées.

Variation trimestrielle de la part de marché de Secundus	Secundus choisit S_1	Secundus choisit S_2
Primus choisit P_1	-2	3
Primus choisit P_2	1	-1

Dans une négociation entre Primus et Secundus, si Secundus propose par exemple S_2 , Primus propose alors P_2 ; mais dans ce cas Secundus préfère S_1 et Primus souhaite alors P_1 , ce qui pousse Secundus à choisir de nouveau S_2 : finalement, toute entente semble être impossible.

Primus et Secundus décident alors de s'en remettre au hasard. Ils choisissent simultanément et aléatoirement l'une des deux stratégies dont chacun dispose : Primus choisit P_1 avec la probabilité $x \in [0, 1]$ et P_2 avec la probabilité $1 - x$; Secundus, indépendamment du choix de Primus, choisit S_1 avec la probabilité $y \in [0, 1]$ et S_2 avec la probabilité $1 - y$.

On note $V_{x,y}$ la variable aléatoire égale à la variation trimestrielle de la part de marché de Secundus.

- 1) Déterminer l'espérance de $V_{x,y}$.
- 2) Établir qu'il existe des probabilités x_0 et y_0 telles que Primus (respectivement Secundus) ne trouve aucun avantage à prendre x différent de x_0 (respectivement y différent de y_0), lorsque Secundus (respectivement Primus) s'en tient à y_0 (respectivement x_0). Déterminer les valeurs de x_0 et y_0 .