



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2002

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Partie I : Définition de l'application L

- 1) a) On montre que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $[0, +\infty[$.

La fonction nulle est continue et $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cdot 0 \, dt$ converge absolument : elle appartient à E . Soit $f, g \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La fonction $\alpha f + \beta g$ est continue sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$ et tout $t \geq 0$:

$$|e^{-xt}(\alpha f + \beta g)(t)| \leq |\alpha| |e^{-xt}f(t)| + |\beta| |e^{-xt}g(t)|$$

Le second membre est positif, continu, d'intégrale convergente sur $[0, +\infty[$ (linéarité).

Par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} e^{-xt}(\alpha f + \beta g)(t) \, dt$ converge absolument.

Donc $\alpha f + \beta g \in E$.

Conclusion

E est un sous-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, +\infty[$, donc un espace vectoriel réel.

- b) Soit f continue et bornée sur $[0, +\infty[$, avec $|f| \leq M$. Pour $x > 0$ et $t \geq 0$,

$$|e^{-xt}f(t)| \leq Me^{-xt}, \text{ et } \int_0^{+\infty} Me^{-xt} \, dt = \frac{M}{x} \text{ converge. Par comparaison,}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t) \, dt \text{ converge absolument.}$$

Conclusion

toute fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$ appartient à E .

- 2) a) Pour $f \in E$, $L(f)$ est bien définie sur $]0, +\infty[$ car les intégrales convergent. Pour $f, g \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, la linéarité des intégrales convergentes donne :

$$L(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt + \beta \int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t) dt = \alpha L(f)(x) + \beta L(g)(x)$$

Conclusion

L est une application linéaire de E dans l'espace vectoriel des fonctions de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

- b) Soit $\lambda \geq 0$. La fonction ε_λ est continue sur $[0, +\infty[$ et vérifie $0 < \varepsilon_\lambda(t) \leq 1$: d'après 1) b), $\varepsilon_\lambda \in E$. Pour $x > 0$, comme $x + \lambda > 0$:

$$L(\varepsilon_\lambda)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+\lambda)t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-(x+\lambda)A}}{x + \lambda} = \frac{1}{x + \lambda}$$

Conclusion

$\varepsilon_\lambda \in E$ et $L(\varepsilon_\lambda)(x) = \frac{1}{x + \lambda}$ pour tout $x > 0$.

- c) Soit $\lambda \geq 0$ et $f \in E$. La fonction $\varepsilon_\lambda f$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour $x > 0$, $e^{-xt} \varepsilon_\lambda(t) f(t) = e^{-(x+\lambda)t} f(t)$ et $x + \lambda > 0$: comme $f \in E$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-(x+\lambda)t} f(t) dt$ converge absolument. Donc $\varepsilon_\lambda f \in E$ et :

$$L(\varepsilon_\lambda f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+\lambda)t} f(t) dt = L(f)(x + \lambda)$$

Conclusion

$\varepsilon_\lambda f \in E$ et $L(\varepsilon_\lambda f)(x) = L(f)(x + \lambda)$ pour tout $x > 0$.

- 3) On établit la convergence par positivité, puis l'égalité par une intégration par parties sur un segment suivie d'un passage à la limite.

Soit M un majorant de $|H|$. La fonction H' est continue sur $[0, +\infty[$ (car H est de classe C^1) et positive (car H est croissante). Soit $x > 0$. Pour $A > 0$, comme

$0 \leq e^{-xt}H'(t) \leq H'(t)$:

$$0 \leq \int_0^A e^{-xt}H'(t) dt \leq \int_0^A H'(t) dt = H(A) - H(0) \leq 2M$$

La fonction $A \mapsto \int_0^A e^{-xt}H'(t) dt$ est croissante et majorée, donc admet une limite finie en $+\infty$: l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt}H'(t) dt$ converge, et absolument puisque l'intégrande est positive. Donc $H' \in E$.

Pour $A > 0$, les fonctions $t \mapsto e^{-xt}$ et H étant de classe C^1 sur $[0, A]$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-xt}H'(t) dt &= [e^{-xt}H(t)]_0^A + x \int_0^A e^{-xt}H(t) dt = e^{-xA}H(A) - H(0) \\ &+ x \int_0^A e^{-xt}H(t) dt \end{aligned}$$

Quand $A \rightarrow +\infty$: $|e^{-xA}H(A)| \leq Me^{-xA} \rightarrow 0$, et $\int_0^A e^{-xt}H(t) dt \rightarrow L(H)(x)$ car $H \in E$.

Conclusion

$H' \in E$ et, pour tout $x > 0$, $L(H')(x) = -H(0) + x L(H)(x)$.

- 4) Soit $f \in E$, $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : t \mapsto t^n f(t)$, continue sur $[0, +\infty[$. Soit $x > 0$. On écrit $e^{-xt} t^n f(t) = t^n e^{-xt/2} \cdot e^{-xt/2} f(t)$.

La fonction $t \mapsto t^n e^{-xt/2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées ; elle est donc bornée sur $[0, +\infty[$ par un réel C (elle est majorée par 1 au-delà d'un réel A et bornée sur le segment $[0, A]$). Ainsi :

$$|e^{-xt} t^n f(t)| \leq C |e^{-(x/2)t} f(t)|$$

Comme $\frac{x}{2} > 0$ et $f \in E$, le majorant est d'intégrale convergente sur $[0, +\infty[$. Par comparaison, $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f_n(t) dt$ converge absolument.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ appartient à E .

Partie II : Dérivabilité de la fonction $L(f)$

- 1) a) Soit $t > 0$. On applique une formule de Taylor à la fonction $\phi : u \mapsto e^{-ut}$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $\phi'(u) = -te^{-ut}$ et $\phi''(u) = t^2 e^{-ut}$, entre x et $x + h$. On remarque que :

$$\phi(x + h) - \phi(x) - h\phi'(x) = e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + h t e^{-xt}$$

Pour tout u compris entre x et $x + h$, on a $u \geq x - |h| > \frac{x}{2}$, donc $0 < \phi''(u) = t^2 e^{-ut} \leq t^2 e^{-xt/2}$.

Méthode 1 — Inégalité de Taylor-Lagrange.

La fonction ϕ est de classe C^2 et $|\phi''|$ est majorée par $t^2 e^{-xt/2}$ entre x et $x + h$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 donne :

$$|\phi(x + h) - \phi(x) - h\phi'(x)| \leq \frac{|h|^2}{2} t^2 e^{-xt/2}$$

Méthode 2 — Formule de Taylor avec reste intégral.

On a

$$\phi(x + h) - \phi(x) - h\phi'(x) = \int_x^{x+h} (x + h - u) \phi''(u) du.$$

Le changement de variable affine $u = x + sh$ donne $h^2 \int_0^1 (1 - s) \phi''(x + sh) ds$, et comme $0 < \phi''(x + sh) \leq t^2 e^{-xt/2}$:

$$0 \leq \phi(x + h) - \phi(x) - h\phi'(x) \leq h^2 t^2 e^{-xt/2} \int_0^1 (1 - s) ds = \frac{h^2 t^2}{2} e^{-xt/2}$$

La méthode 1 applique directement le résultat du cours ; la méthode 2 redémontre la majoration et montre en outre que la quantité est positive (convexité de ϕ).

Conclusion

$$|e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + h t e^{-xt}| \leq \frac{h^2 t^2}{2} e^{-xt/2} \text{ pour tout } t > 0.$$

b) En divisant l'inégalité de a) par $|h|$ et en multipliant par $|f(t)|$, pour tout $t > 0$:

$$\left| \frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} f(t) + t e^{-xt} f(t) \right| \leq \frac{|h|}{2} t^2 |f(t)| e^{-xt/2}$$

D'après I.4), $t \mapsto t^2 f(t)$ est dans E , donc $\int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-xt/2} dt$ converge (avec $\frac{x}{2} > 0$).

Soit $T > 0$. L'inégalité triangulaire pour les intégrales sur $[0, T]$, puis la positivité de l'intégrande du majorant, donnent :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \left(\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} f(t) + t e^{-xt} f(t) \right) dt \right| &\leq \frac{|h|}{2} \int_0^T t^2 |f(t)| e^{-xt/2} dt \\ &\leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-xt/2} dt \end{aligned}$$

Conclusion

l'inégalité demandée est vraie pour tout $T > 0$.

c) Notons $K = \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-xt/2} dt$. Comme $x + h > \frac{x}{2} > 0$, les intégrales

$\int_0^{+\infty} e^{-(x+h)t} f(t) dt$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} t e^{-xt} f(t) dt$ convergent (f et $t \mapsto t f(t)$ sont dans E). En faisant tendre T vers $+\infty$ dans b), par linéarité :

$$\left| \frac{L(f)(x+h) - L(f)(x)}{h} + \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-xt} dt \right| \leq \frac{|h|}{2} K$$

Le second membre tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$ (avec $0 < |h| < \frac{x}{2}$).

Conclusion

$$L(f) \text{ est dérivable en } x \text{ et } (L(f))'(x) = - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-xt} dt.$$

- d) Le résultat de c) vaut pour tout $x > 0$ et toute fonction de E : pour $g \in E$, $L(g)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $L(g)' = -L(\tilde{g})$, où $\tilde{g}(t) = tg(t)$ définit un élément de E (I.4)).

Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $f_k(t) = t^k f(t)$, élément de E d'après I.4). Montrons par récurrence que $L(f)$ est k fois dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $(L(f))^{(k)} = (-1)^k L(f_k)$. Pour $k = 0$ c'est clair. Si c'est vrai au rang k , alors, $L(f_k)$ étant dérivable de dérivée $-L(f_{k+1})$ (puisque $tf_k(t) = f_{k+1}(t)$), $(L(f))^{(k)}$ est dérivable de dérivée $(-1)^{k+1} L(f_{k+1})$.

Conclusion

$$L(f) \text{ est indéfiniment dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et, pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et tout } x > 0, \\ (L(f))^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k f(t) e^{-xt} dt.$$

Partie III : Injectivité de l'application $L : f \mapsto L(f)$

- 1) a) Pour tout k , $Y_k = \frac{X_k}{x}$ suit la loi exponentielle de paramètre 1 (transformation affine d'une loi exponentielle : $P([Y_k > s]) = P([X_k > xs]) = e^{-s}$ pour $s \geq 0$). Les Y_k sont indépendantes, donc

$$G = \sum_{k=1}^n Y_k$$

suit la loi $\gamma(n)$ de densité $s \mapsto \frac{s^{n-1} e^{-s}}{(n-1)!}$ sur $]0, +\infty[$. Comme $S_n = xG$ avec $x > 0$, une densité de S_n est $t \mapsto \frac{1}{x} g\left(\frac{t}{x}\right)$, où g est la densité de G .

Conclusion

une densité de S_n est $t \mapsto \frac{t^{n-1}e^{-t/x}}{(n-1)!x^n}$ pour $t > 0$, et 0 pour $t \leq 0$.

b) Par la même transformation affine ($\frac{S_n}{n}$ avec $\frac{1}{n} > 0$), une densité de $\frac{S_n}{n}$ est

$$t \mapsto n \cdot \frac{(nt)^{n-1}e^{-nt/x}}{(n-1)!x^n}.$$

Conclusion

$\varphi_n(t) = \frac{n^n t^{n-1} e^{-nt/x}}{(n-1)! x^n}$ pour $t \geq 0$ et $\varphi_n(t) = 0$ pour $t < 0$; cette fonction est continue sur $[0, +\infty[$ et nulle sur $] -\infty, 0[$, ce qui permettra d'utiliser le résultat admis ii).

2) a) Les X_k sont indépendantes, de même loi, d'espérance x et de variance x^2 .

Méthode 1 — Loi faible des grands nombres.

D'après la loi faible des grands nombres, $\frac{S_n}{n}$ converge en probabilité vers x : pour tout $\alpha > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \alpha\right) \rightarrow 0$. Comme $\left[\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right] \subset \left[\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \alpha\right]$, la probabilité demandée tend vers 0.

Méthode 2 — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

$\frac{S_n}{n}$ admet l'espérance x et la variance $\frac{nx^2}{n^2} = \frac{x^2}{n}$ (indépendance). Donc :

$$0 \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right) \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{x^2}{n\alpha^2}$$

et on conclut par encadrement.

La méthode 1 cite le théorème du cours ; la méthode 2 en refait la preuve et fournit une vitesse explicite.

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left[\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha \right] \right) = 0.$$

b) Les X_k sont à valeurs positives, donc $\frac{S_n}{n}$ prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$, où f est définie. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x , il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $u \in [0, +\infty[$ vérifiant $|u - x| \leq \alpha$, on ait $|f(u) - f(x)| \leq \varepsilon$. Par contraposée, si $|f(u) - f(x)| > \varepsilon$ alors $|u - x| > \alpha$. Avec $u = \frac{S_n}{n}(\omega)$:

Conclusion

$$\text{pour tout } n \geq 1, \quad \left[\left| f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right| > \varepsilon \right] \subset \left[\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha \right].$$

c) Avec le réel α de b), par croissance de P :

$$0 \leq P \left(\left[\left| f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right| > \varepsilon \right] \right) \leq P \left(\left[\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha \right] \right)$$

et le majorant tend vers 0 d'après a).

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left[\left| f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right| > \varepsilon \right] \right) = 0.$$

3) a) Soit $\omega \in \Omega$. Si $\omega \in A_n$, alors $\mathbf{1}_{A_n}(\omega) = 1$ et

$$\left| f \left(\frac{S_n}{n}(\omega) \right) - f(x) \right| \leq \varepsilon = \varepsilon \cdot 1 + 2M \cdot 0. \text{ Si } \omega \notin A_n, \text{ alors } \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = 0 \text{ et, par}$$

l'inégalité triangulaire,

$$\left| f\left(\frac{S_n}{n}(\omega)\right) - f(x) \right| \leq M + M = 2M = \varepsilon \cdot 0 + 2M \cdot 1.$$

Conclusion

$$\left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| \leq \varepsilon \mathbf{1}_{A_n} + 2M(1 - \mathbf{1}_{A_n}).$$

- b)** Existence des espérances. Les fonctions $u \mapsto f(u)$ et $u \mapsto |f(u) - f(x)|$ sont continues et bornées sur $[0, +\infty[$, et φ_n vérifie les hypothèses du résultat admis ii) ; comme $\int_0^{+\infty} M\varphi_n(u) du = M$ converge, les intégrales correspondantes convergent absolument et les variables $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ et $\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|$ possèdent une espérance. La variable $\mathbf{1}_{A_n}$ est une variable de Bernoulli d'espérance $P(A_n)$.

Majoration. Notons $Z_n = f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)$. Comme $-|Z_n| \leq Z_n \leq |Z_n|$, le résultat admis i) et la linéarité donnent $|E(Z_n)| \leq E(|Z_n|)$. Avec a) et à nouveau i) :

$$\left| E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x) \right| \leq E(|Z_n|) \leq \varepsilon P(A_n) + 2M P(\overline{A_n}) \leq \varepsilon + 2M P(\overline{A_n})$$

Or $\overline{A_n} = [|Z_n| > \varepsilon]$, donc $P(\overline{A_n}) \rightarrow 0$ d'après 2) c). Il existe donc un rang à partir duquel $2M P(\overline{A_n}) \leq \varepsilon$, et alors $\left| E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x) \right| \leq 2\varepsilon$. Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$:

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = f(x).$$

- 4)** a) D'après le résultat admis ii) et 1) b) :

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \int_0^{+\infty} f(t)\varphi_n(t) dt = \frac{n^n}{(n-1)!x^n} \int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) e^{-nt/x} dt$$

et 3) b) donne la première égalité.

Comme f est continue et bornée, $f \in E$; d'après II.2) d) appliqué au réel $\frac{n}{x} > 0$ et à $k = n - 1$:

$$(L(f))^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right) = (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) e^{-nt/x} dt$$

donc $\int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) e^{-nt/x} dt = (-1)^{n-1} (L(f))^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right)$, ce qui donne la seconde égalité.

Conclusion

pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n-1)! x^n} \int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) e^{-nt/x} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n (-1)^{n-1}}{(n-1)! x^n} (L(f))^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right). \end{aligned}$$

b) Soit f, g continues et bornées avec $L(f) = L(g)$. La fonction $\delta = f - g$ est continue et bornée, et $L(\delta) = L(f) - L(g) = 0$ par linéarité (I.2) a)). Toutes les dérivées de $L(\delta)$ sont donc nulles sur $]0, +\infty[$, et la formule de 4) a) appliquée à δ donne $\delta(x) = 0$ pour tout $x > 0$. Par continuité de δ en 0, $\delta(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \delta(x) = 0$.

Conclusion

$f = g$ sur $[0, +\infty[$, c'est-à-dire que L est injective sur l'ensemble des fonctions continues et bornées.

c) Soit $a \geq 0$ et f, g continues et bornées avec $L(f) = L(g)$ sur $]a, +\infty[$. La fonction $\delta = f - g$ est continue, bornée et $L(\delta)$ est nulle sur l'intervalle ouvert $]a, +\infty[$; toutes ses dérivées successives y sont donc nulles. Soit $x > 0$. Pour $n > ax$, on a $\frac{n}{x} > a$,

donc $(L(\delta))^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right) = 0$: la suite dont 4) a) donne la limite est nulle à partir d'un certain rang, d'où $\delta(x) = 0$. Comme en b), $\delta(0) = 0$ par continuité.

Conclusion

f et g sont égales sur $[0, +\infty[$.

Partie IV : Étude du régime permanent d'une file d'attente

Question adaptée au programme actuel (préambule) : l'hypothèse v) sur U_1 a été ajoutée. Sans elle, l'énoncé original ne précise pas la loi de U_1 ; si l'on prend $U_1 = 0$ (premier client servi immédiatement), alors $F_1(x) = 1$ pour tout $x \geq 0$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse de régime permanent de la question 5) puisque la fonction F obtenue en 8) c) vérifie $F(0) = 1 - \frac{\lambda}{\mu} < 1$. L'hypothèse v) rend le régime permanent possible (voir la remarque de la question 5)) et fournit l'indépendance utilisée en 2).

- 1) Le $(n-1)$ -ième client arrive à l'instant T_{n-1} et quitte la poste à l'instant $T_{n-1} + W_{n-1}$. Comme il n'y a qu'un guichet et que les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée, tous les prédécesseurs du n -ième client sont partis au plus tard à l'instant $T_{n-1} + W_{n-1}$, et le guichet est libre pour lui exactement à cet instant. Le n -ième client arrive à l'instant $T_n = T_{n-1} + \Delta_n$.

Si $T_{n-1} + W_{n-1} < T_n$, c'est-à-dire $W_{n-1} - \Delta_n < 0$, le guichet est libre à son arrivée : $U_n = 0$. Sinon, il attend jusqu'à l'instant $T_{n-1} + W_{n-1}$, soit une durée $U_n = T_{n-1} + W_{n-1} - T_n = W_{n-1} - \Delta_n$ (nulle en cas d'égalité, ce qui est cohérent).

Conclusion

$U_n = 0$ si $W_{n-1} - \Delta_n < 0$ et $U_n = W_{n-1} - \Delta_n$ sinon, c'est-à-dire $U_n = \max(0, W_{n-1} - \Delta_n)$.

- 2) D'après 1), pour $k \geq 2$, $U_k = \max(0, U_{k-1} + S_{k-1} - \Delta_k)$. Par récurrence sur $k \geq 1$, U_k est une fonction de $(U_1, S_1, \dots, S_{k-1}, \Delta_2, \dots, \Delta_k)$: c'est vrai pour $k = 1$, et la relation précédente permet de passer de $k-1$ à k .

Ainsi $W_{n-1} = U_{n-1} + S_{n-1}$ est une fonction de $(U_1, S_1, \dots, S_{n-1}, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1})$, famille qui ne contient pas Δ_n . D'après l'hypothèse v), les variables $U_1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, S_1, S_2, \dots$ sont indépendantes; le lemme des coalitions montre que W_{n-1} et Δ_n sont indépendantes.

Conclusion

W_{n-1} et Δ_n sont indépendantes. On montre de même que U_n , fonction de $(U_1, S_1, \dots, S_{n-1}, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$, est indépendante de S_n , ce qui justifie la formule admise en 4).

3) Rappels. Pour $0 \leq u < v$, $P([u \leq \Delta_n < v]) = e^{-\lambda u} - e^{-\lambda v} = \int_u^v \lambda e^{-\lambda s} ds$. La fonction G_{n-1} est croissante (fonction de répartition) et continue sur $[0, +\infty[$ (résultat admis), donc les intégrales ci-dessous sur des segments ont un sens.

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Sur l'événement $[W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]$, on a $W_{n-1} \leq x + \Delta_n < x + (k+1)h$. D'où l'inclusion, puis la première inégalité par croissance de P .

Par indépendance de W_{n-1} et Δ_n (question 2)) :

$$\begin{aligned} P([W_{n-1} \leq x + (k+1)h] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]) \\ = G_{n-1}(x + (k+1)h) (e^{-\lambda kh} - e^{-\lambda(k+1)h}) \end{aligned}$$

Or

$$e^{-\lambda kh} - e^{-\lambda(k+1)h} = e^{\lambda h} (e^{-\lambda(k+1)h} - e^{-\lambda(k+2)h}) = e^{\lambda h} \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} ds,$$

et pour $s \in [(k+1)h, (k+2)h]$, $G_{n-1}(x + (k+1)h) \leq G_{n-1}(x + s)$ par croissance. Par croissance de l'intégrale :

$$G_{n-1}(x + (k+1)h) (e^{-\lambda kh} - e^{-\lambda(k+1)h}) \leq e^{\lambda h} \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + s) ds$$

Conclusion

les deux inégalités de a) sont établies.

b) Soit $k \geq 1$. Sur $[W_{n-1} \leq x + kh] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]$, on a

$W_{n-1} \leq x + kh \leq x + \Delta_n$, donc $W_{n-1} - \Delta_n \leq x$. D'où l'inclusion et la première inégalité.

Par indépendance, le membre de gauche vaut $G_{n-1}(x + kh) (e^{-\lambda kh} - e^{-\lambda(k+1)h})$. Or

$$e^{-\lambda kh} - e^{-\lambda(k+1)h} = e^{-\lambda h} (e^{-\lambda(k-1)h} - e^{-\lambda kh}) = e^{-\lambda h} \int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} ds,$$

et pour $s \in [(k-1)h, kh]$ (avec $x + s \geq 0$), $G_{n-1}(x + s) \leq G_{n-1}(x + kh)$. Donc :

$$e^{-\lambda h} \int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + s) ds \leq G_{n-1}(x + kh) (e^{-\lambda kh} - e^{-\lambda(k+1)h})$$

Conclusion

les deux inégalités de b) sont établies.

c) Comme $x \geq 0$, d'après 1), $U_n \leq x$ si et seulement si $W_{n-1} - \Delta_n \leq x$:

$F_n(x) = P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x])$. Comme $\Delta_n > 0$, les événements

$B_k = [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]$, $k \in \mathbb{N}$, sont deux à deux incompatibles et de réunion Ω .

Par σ -additivité :

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap B_k)$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds$ converge, car l'intégrande est continue, comprise entre 0 et $\lambda e^{-\lambda s}$.

Majoration. D'après a) et la relation de Chasles, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap B_k) &\leq e^{\lambda h} \int_h^{(N+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds \\ &\leq e^{\lambda h} \int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds \end{aligned}$$

et en faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient la majoration de $F_n(x)$.

Minoration. En omettant le terme d'indice 0 (positif) et en utilisant b) et Chasles :

$$\sum_{k=0}^N P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap B_k) \geq e^{-\lambda h} \int_0^{Nh} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds$$

et le passage à la limite quand $N \rightarrow +\infty$ donne la minoration.

Conclusion

$$e^{-\lambda h} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds \leq F_n(x) \leq e^{\lambda h} \int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds.$$

4) Notons $I = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds$. Quand $h \rightarrow 0^+ : e^{\pm \lambda h} \rightarrow 1$ et

$$\int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds = I - \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds,$$

avec $0 \leq \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds \leq \lambda h \rightarrow 0$. L'encadrement de 3) c), valable pour tout $h > 0$, donne par passage à la limite $I \leq F_n(x) \leq I$.

Conclusion

$$\text{pour tout } n \geq 2 \text{ et tout } x \geq 0, \quad F_n(x) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds.$$

Rectification d'une erreur de l'énoncé original : la formule admise y était écrite avec $F_{n-1}(x-s)$ au lieu de $F_n(x-s)$. Comme $W_n = U_n + S_n$ avec U_n indépendante de S_n (question 2)), c'est la fonction de répartition F_n de U_n qui intervient :

$G_n(x) = \int_0^x \mu e^{-\mu s} F_n(x-s) ds$. Cette formule est admise ; elle reste valable pour $n = 1$ grâce à l'hypothèse v). En régime permanent, la rectification ne change pas la suite du problème.

5) Remarque : l'hypothèse de régime permanent est réalisable. Si U_1 suit la loi de fonction de répartition F obtenue en 8) c), les calculs de 9) a) et de 4) montrent que W_1 suit la loi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda$ puis que U_2 a encore la fonction de répartition F , et ainsi de suite.

a) Soit $x \geq 0$. D'après 4) en régime permanent (avec $n \geq 2$),

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G(x+s) ds. \text{ Le changement de variable affine } t = x+s \text{ donne :}$$

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda(t-x)} G(t) dt = \lambda e^{\lambda x} \int_x^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) dt$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) dt$ converge ($0 \leq G \leq 1$) et, par Chasles,

$$\int_x^{+\infty} = \int_0^{+\infty} - \int_0^x.$$

Conclusion

$$F(x) = \lambda e^{\lambda x} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) dt - \int_0^x e^{-\lambda t} G(t) dt \right).$$

- b) Pour $x = 0$, a) donne $F(0) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) dt$. En multipliant a) par $e^{-\lambda x}$ et en remplaçant :

Conclusion

$$e^{-\lambda x} F(x) = F(0) - \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} G(t) dt \text{ pour tout } x \geq 0.$$

- 6) a) La fonction $t \mapsto e^{-\lambda t} G(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$; H en est la primitive nulle en 0, donc H est de classe C^1 avec $H'(x) = e^{-\lambda x} G(x) \geq 0$: H est croissante. De plus $0 \leq H(x) \leq \int_0^x e^{-\lambda t} dt \leq \frac{1}{\lambda}$: H est bornée. Étant continue et bornée, $H \in E$ (I.1) b)).

D'après I.3), pour $x > 0$, $L(H')(x) = -H(0) + xL(H)(x) = xL(H)(x)$ car $H(0) = 0$. Or $H' = \varepsilon_\lambda G$, où G est continue et bornée, donc dans E ; d'après I.2) c), $L(H')(x) = L(G)(x + \lambda)$.

Conclusion

H est de classe C^1 , croissante et bornée sur $[0, +\infty[$, et $xL(H)(x) = L(G)(x + \lambda)$ pour tout $x > 0$.

- b) La fonction F , continue et bornée sur $[0, +\infty[$, est dans E . D'après 5) b), pour tout $t \geq 0$, $F(t) = F(0)e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t} H(t)$. Soit $x > \lambda$. Alors :

$$e^{-xt} F(t) = F(0)e^{-(x-\lambda)t} - \lambda e^{-(x-\lambda)t} H(t)$$

Comme $x - \lambda > 0$ et que ε_0 et H sont dans E , les intégrales des deux termes convergent, et par linéarité et I.2) b) :

$$L(F)(x) = F(0)L(\varepsilon_0)(x - \lambda) - \lambda L(H)(x - \lambda) = \frac{F(0)}{x - \lambda} - \lambda L(H)(x - \lambda)$$

D'après 6) a) appliqué au réel $x - \lambda > 0$, $L(H)(x - \lambda) = \frac{L(G)(x)}{x - \lambda}$.

Conclusion

$$\text{pour tout } x > \lambda, \quad L(F)(x) = \frac{F(0)}{x - \lambda} - \frac{\lambda}{x - \lambda} L(G)(x).$$

7) En régime permanent, la formule admise (rectifiée) s'écrit

$G(x) = \int_0^x \mu e^{-\mu s} F(x - s) ds$ pour $x \geq 0$. Le changement de variable affine $u = x - s$ donne :

$$G(x) = \mu e^{-\mu x} \int_0^x e^{\mu u} F(u) du$$

La fonction $u \mapsto e^{\mu u} F(u)$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc $x \mapsto \int_0^x e^{\mu u} F(u) du$ est de classe C^1 ; par produit, G est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et :

$$G'(x) = -\mu^2 e^{-\mu x} \int_0^x e^{\mu u} F(u) du + \mu e^{-\mu x} e^{\mu x} F(x) = -\mu G(x) + \mu F(x)$$

G est croissante et à valeurs dans $[0, 1]$ comme fonction de répartition : elle est bornée. Elle est donc dans E et I.3) s'applique, avec $G(0) = 0$ (intégrale sur $[0, 0]$) : pour $x > 0$, $L(G')(x) = xL(G)(x)$. Par linéarité ($F, G \in E$), $L(G')(x) = -\mu L(G)(x) + \mu L(F)(x)$. Donc $(x + \mu)L(G)(x) = \mu L(F)(x)$ avec $x + \mu > 0$.

Conclusion

G est de classe C^1 , croissante et bornée, $G'(x) = -\mu G(x) + \mu F(x)$ et $L(G)(x) = \frac{\mu}{x + \mu} L(F)(x)$ pour tout $x > 0$.

8) a) Soit $x > \lambda$. En reportant 7) dans 6) b) :

$$L(F)(x) \left(1 + \frac{\lambda\mu}{(x-\lambda)(x+\mu)} \right) = \frac{F(0)}{x-\lambda}$$

Or $(x-\lambda)(x+\mu) + \lambda\mu = x^2 + (\mu-\lambda)x = x(x+\mu-\lambda)$, qui est non nul car $x > \lambda > 0$ et $\mu > \lambda$. Donc :

$$L(F)(x) = \frac{F(0)}{x-\lambda} \cdot \frac{(x-\lambda)(x+\mu)}{x(x+\mu-\lambda)} = \frac{F(0)(x+\mu)}{x(x+\mu-\lambda)}$$

Enfin

$$\frac{\mu}{x} - \frac{\lambda}{x+\mu-\lambda} = \frac{\mu(x+\mu-\lambda) - \lambda x}{x(x+\mu-\lambda)} = \frac{(\mu-\lambda)(x+\mu)}{x(x+\mu-\lambda)}.$$

Conclusion

$$\text{pour tout } x > \lambda, \quad L(F)(x) = \frac{F(0)}{\mu-\lambda} \left(\frac{\mu}{x} - \frac{\lambda}{x+\mu-\lambda} \right).$$

b) Posons

$$\Phi(t) = \frac{F(0)}{\mu-\lambda} (\mu - \lambda e^{-(\mu-\lambda)t}) = \frac{F(0)}{\mu-\lambda} (\mu \varepsilon_0(t) - \lambda \varepsilon_{\mu-\lambda}(t))$$

pour $t \geq 0$. Par linéarité et I.2) b), pour tout $x > 0$:

$$L(\Phi)(x) = \frac{F(0)}{\mu-\lambda} \left(\frac{\mu}{x} - \frac{\lambda}{x+\mu-\lambda} \right)$$

Ainsi $L(F)$ et $L(\Phi)$ coïncident sur $] \lambda, +\infty[$. Les fonctions F et Φ sont continues et bornées sur $[0, +\infty[$; d'après III.4) c) avec $a = \lambda \geq 0$, elles sont égales.

Conclusion

$$\text{pour tout } x \geq 0, \quad F(x) = \frac{F(0)}{\mu - \lambda} (\mu - \lambda e^{-(\mu - \lambda)x}).$$

c) F est la fonction de répartition de la variable U_n , donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. Comme

$$\mu - \lambda > 0, \text{ b) donne } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\mu F(0)}{\mu - \lambda}. \text{ Donc } F(0) = \frac{\mu - \lambda}{\mu} \text{ et, en reportant :}$$

Conclusion

$$\text{pour tout } x \geq 0, \quad F(x) = \frac{1}{\mu} (\mu - \lambda e^{-(\mu - \lambda)x}) = 1 - \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu - \lambda)x}.$$

9) a) Il s'agit de montrer que $G(x) = 1 - e^{-(\mu - \lambda)x}$ pour $x \geq 0$ (et $G(x) = 0$ pour $x < 0$ puisque $W_n \geq 0$).

Méthode 1 — Calcul direct.

D'après 7) et 8) c), pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} G(x) &= \mu e^{-\mu x} \int_0^x \left(e^{\mu u} - \frac{\lambda}{\mu} e^{\lambda u} \right) du = \mu e^{-\mu x} \left(\frac{e^{\mu x} - 1}{\mu} - \frac{e^{\lambda x} - 1}{\mu} \right) = e^{-\mu x} (e^{\mu x} - e^{\lambda x}) \\ &= 1 - e^{-(\mu - \lambda)x} \end{aligned}$$

Méthode 2 — Injectivité de L .

D'après 7) et 8) a), pour $x > \lambda$, avec $F(0) = \frac{\mu - \lambda}{\mu}$:

$$L(G)(x) = \frac{\mu}{x + \mu} \cdot \frac{\mu - \lambda}{\mu} \cdot \frac{x + \mu}{x(x + \mu - \lambda)} = \frac{\mu - \lambda}{x(x + \mu - \lambda)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \mu - \lambda}$$

ce qui est $L(\varepsilon_0 - \varepsilon_{\mu-\lambda})(x)$ d'après I.2) b). Les fonctions G et $\varepsilon_0 - \varepsilon_{\mu-\lambda}$ sont continues et bornées sur $[0, +\infty[$, donc égales d'après III.4) c).

La méthode 1 est un calcul d'intégrale ; la méthode 2 réutilise l'outil construit dans le problème et évite tout calcul de primitive.

Dans les deux cas, $G(x) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)x}$ pour $x \geq 0$ et $G(x) = 0$ pour $x < 0$: c'est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda$.

Conclusion

en régime permanent, le temps W_n passé dans la poste suit la loi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda$.

b) « Arrivées deux fois plus fréquentes » : le temps moyen entre deux arrivées est divisé par 2, donc λ est remplacé par 2λ . « Service deux fois plus rapide » : la durée moyenne de service est divisée par 2, donc μ est remplacé par 2μ . L'hypothèse $2\mu > 2\lambda$ reste vraie.

Le temps moyen passé dans la poste est l'espérance de la loi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda$, soit $\frac{1}{\mu - \lambda}$; il devient $\frac{1}{2\mu - 2\lambda} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu - \lambda}$.

La probabilité d'être servi tout de suite est $P([U_n = 0]) = P([U_n \leq 0]) = F(0) = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ (car $U_n \geq 0$) ; elle devient $1 - \frac{2\lambda}{2\mu} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$.

Conclusion

le temps moyen passé dans la poste est divisé par 2, et la probabilité d'être servi tout de suite reste égale à $1 - \frac{\lambda}{\mu}$.

Relevé des adaptations

- IV (préambule), hypothèse v) ajoutée : U_1 est une variable positive, de fonction de répartition continue sur $[0, +\infty[$, et $U_1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, S_1, S_2, \dots$ sont indépendantes.
Justification : l'énoncé original ne précisait pas U_1 ; avec $U_1 = 0$ (choix implicite le plus naturel), l'hypothèse de régime permanent de la question 5) serait fausse, car F_1 vaudrait 1 sur $[0, +\infty[$ alors que $F(0) = 1 - \frac{\lambda}{\mu} < 1$. L'hypothèse v) rend le régime permanent possible et justifie l'indépendance demandée en 2) ainsi que la continuité admise de F_n et G_n .
- IV.4) : rectification d'une erreur de l'énoncé, la formule admise

$$G_n(x) = \int_0^x \mu e^{-\mu s} F_{n-1}(x-s) ds$$
est remplacée par $G_n(x) = \int_0^x \mu e^{-\mu s} F_n(x-s) ds$,
valable pour tout $n \geq 1$. Justification : $W_n = U_n + S_n$ avec U_n indépendante de S_n .
Sans incidence en régime permanent ($F_n = F_{n-1} = F$).