



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

2002

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Notations

Les vecteurs de K_n et de K_p ont des coordonnées positives ou nulles dont la somme vaut 1. Ces ensembles sont non vides : ils contiennent les vecteurs de la base canonique de leurs espaces respectifs.

Dans les notations préliminaires, les bornes de la famille $(z_i)_{1 \leq i \leq k}$ sont harmonisées en k , et l'ensemble sur lequel sont pris les extrema de f est harmonisé en $\mathcal{A}$. Ces rectifications de notation ne changent aucune question.

Partie I. Le plus petit des plus grands et le plus grand des plus petits

- 1) On calcule d'abord les maxima de chaque ligne et les minima de chaque colonne, puis les extrema de ces deux familles.

Pour $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, les maxima des lignes valent 3 et 1, tandis que les minima des colonnes valent -2 et -1 . Ainsi,

$$u(A) = \min(3, 1) = 1, \quad v(A) = \max(-2, -1) = -1.$$

Pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, les maxima des lignes sont 6, 1, 3. Les minima des colonnes sont $-2, 1, -2$. Par conséquent,

$$u(A) = \min(6, 1, 3) = 1, \quad v(A) = \max(-2, 1, -2) = 1.$$

- 2) a) Fixons $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ et $j_0 \in \{1, \dots, p\}$. Le minimum de la colonne j_0 est inférieur ou égal à chacun de ses éléments, et le maximum de la ligne i_0 est supérieur ou égal à chacun de ses éléments. En utilisant leur élément commun $a_{i_0 j_0}$, il vient

$$s_{j_0} = \min_i a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq \max_j a_{i_0 j} = t_{i_0}.$$

Donc $s_{j_0} \leq t_{i_0}$ pour tous les indices considérés.

- b)** Pour chaque i_0 , tous les s_j sont inférieurs ou égaux à t_{i_0} ; leur maximum l'est donc aussi. Ainsi $v(A) \leq t_{i_0}$ pour chaque i_0 . En prenant le minimum de ces derniers termes,

$$v(A) \leq \min_{i_0} t_{i_0} = u(A).$$

- 3)** a) Question adaptée au programme actuel : la fonction demandée en Pascal est écrite en Python avec des indices commençant à zéro.

On initialise le maximum avec le premier élément de la ligne. Une initialisation à zéro serait incorrecte lorsque tous les éléments sont négatifs. Le tableau a au moins une colonne puisque $p \geq 1$.

Python

```
import numpy as np

def Max_ligne(A, i):
    p = A.shape[1]
    maximum = A[i, 0]
    for j in range(1, p):
        if A[i, j] > maximum:
            maximum = A[i, j]
    return maximum
```

Avant la boucle, `maximum` est le maximum des éléments de la ligne d'indice de colonne 0. Après le traitement de la colonne d'indice j , il est le maximum des éléments des colonnes $0, \dots, j$: le test remplace le maximum exactement si l'élément nouveau est plus grand. À la sortie, il contient donc le maximum de toute la ligne.

Si $p = 1$, la boucle est vide et la valeur retournée est l'unique élément de la ligne, ce qui convient.

- b)** Question adaptée au programme actuel : la fonction demandée en Pascal est écrite en Python.

On calcule le maximum de chaque ligne, puis leur minimum. Le code suivant complète

celui de a), dont il utilise la fonction et l'import.

Python

```
def MinMax(A):  
    n = A.shape[0]  
    minimum = Max_ligne(A, 0)  
    for i in range(1, n):  
        maximum_ligne = Max_ligne(A, i)  
        if maximum_ligne < minimum:  
            minimum = maximum_ligne  
    return minimum
```

Après le traitement de la ligne d'indice i , `minimum` est le minimum des maxima des lignes d'indices $0, \dots, i$. Cette propriété est vraie à l'initialisation et conservée par le test. La valeur retournée est donc bien $u(A)$. Si $n = 1$, la boucle est vide et le maximum de l'unique ligne est retourné.

Le code des deux fonctions a été exécuté, notamment avec les matrices de la question 1), des matrices rectangulaires et des tableaux n'ayant qu'une ligne ou qu'une colonne. Voici un contrôle reproductible des exemples et d'un cas entièrement négatif :

Python

```
A1 = np.array([[ -2,  3], [ 1, -1]], dtype=float)  
A2 = np.array([[ -1,  6, -2], [ 0,  1,  0], [-2,  3, -1]], dtype=float)  
A3 = np.array([[ -5, -2, -7], [-4, -3, -6]], dtype=float)  
  
assert Max_ligne(A1, 0) == 3  
assert MinMax(A1) == 1  
assert MinMax(A2) == 1  
assert MinMax(A3) == -3
```

Ces vérifications confirment la cohérence des exemples; la propriété de boucle précédente établit la validité pour toute matrice de la forme prescrite.

Partie II. Le minimum des maxima et le maximum des minima

1) a) En développant le produit matriciel,

$$h(x, y) = -2xy + 3x(1 - y) + (1 - x)y - (1 - x)(1 - y).$$

Les termes constants, en x , en y et en xy donnent respectivement -1 , $4x$, $2y$ et $-7xy$. Par conséquent,

$$h(x, y) = -1 + 4x + 2y - 7xy = -1 + 4x + (2 - 7x)y.$$

b) Pour x fixé, la fonction de y est affine de coefficient $2 - 7x$.

Si $0 \leq x < \frac{2}{7}$, elle est strictement croissante et atteint son maximum en $y = 1$, avec $h(x, 1) = 1 - 3x$.

Si $x = \frac{2}{7}$, elle est constante : toute valeur de $y \in [0, 1]$ réalise le maximum, qui vaut $\frac{1}{7}$.

Si $\frac{2}{7} < x \leq 1$, elle est strictement décroissante et atteint son maximum en $y = 0$, avec $h(x, 0) = -1 + 4x$.

Ainsi,

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 - 3x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{2}{7}, \\ -1 + 4x & \text{si } \frac{2}{7} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Les deux expressions coïncident à $x = \frac{2}{7}$. On peut également écrire

$$\lambda(x) = \max(1 - 3x, -1 + 4x).$$

c) La fonction λ est strictement décroissante sur $[0, \frac{2}{7}]$ puis strictement croissante sur $[\frac{2}{7}, 1]$. Elle atteint donc son minimum, uniquement en $x_0 = \frac{2}{7}$. Sa valeur est

$$\alpha(A) = \lambda\left(\frac{2}{7}\right) = 1 - 3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{7}.$$

Tout élément de K_2 s'écrit de manière unique ${}^t(x, 1 - x)$ avec $x \in [0, 1]$; ce minimum est donc bien celui demandé sur K_2 .

d) Pour y fixé, on écrit $h(x, y) = -1 + 2y + (4 - 7y)x$. Son minimum sur $x \in [0, 1]$ est

$$\eta(y) = \begin{cases} -1 + 2y & \text{si } 0 \leq y \leq \frac{4}{7}, \\ 3 - 5y & \text{si } \frac{4}{7} \leq y \leq 1. \end{cases}$$

En effet, si $y < \frac{4}{7}$, le coefficient de x est positif et le minimum est atteint en $x = 0$; si $y > \frac{4}{7}$, il est négatif et le minimum est atteint en $x = 1$. Pour $y = \frac{4}{7}$, toutes les valeurs de x donnent le même résultat $\frac{1}{7}$.

La fonction η est strictement croissante sur $[0, \frac{4}{7}]$ puis strictement décroissante sur $[\frac{4}{7}, 1]$. Elle atteint son maximum, uniquement en $y_0 = \frac{4}{7}$. Ainsi,

$$\beta(A) = \eta\left(\frac{4}{7}\right) = -1 + 2 \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{7} = \alpha(A).$$

2) a) Question adaptée au programme actuel : on considère ici deux fonctions continues indépendamment du nombre p , afin que cette sous-question reste définie lorsque $p = 1$.

Pour deux réels u, v , si $u \geq v$, alors $|u - v| = u - v$ et $\frac{u + v + |u - v|}{2} = u$. Si $u \leq v$, la même expression vaut v . Dans les deux cas, elle est égale à $\max(u, v)$.

En appliquant cette identité à $u = g_1(X)$ et $v = g_2(X)$ pour chaque $X \in K_n$, on obtient

$$h = \frac{g_1 + g_2 + |g_1 - g_2|}{2}.$$

La différence $g_1 - g_2$ est continue et la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$. Par composition, somme et multiplication par un scalaire, h est continue sur K_n .

b) Méthode 1 — Récurrence sur le nombre de fonctions

Pour une seule fonction, l'assertion est l'hypothèse de continuité de g_1 . Supposons que le maximum de $q \geq 1$ fonctions continues soit continu, et posons $h_q = \max(g_1, \dots, g_q)$.

Alors $h_{q+1} = \max(h_q, g_{q+1})$ est le maximum de deux fonctions continues ; la question a) montre qu'il est continu. Par récurrence, $g = \max(g_1, \dots, g_p)$ est continue pour tout $p \geq 1$.

Méthode 2 — Estimation directe des variations du maximum

Pour deux familles de réels (u_j) et (v_j) de même longueur p , posons $D = \max_j |u_j - v_j|$. Pour chaque j , $u_j \leq v_j + D \leq \max_\ell v_\ell + D$. En prenant le maximum sur j , puis en échangeant les deux familles, il vient

$$|\max_j u_j - \max_j v_j| \leq \max_j |u_j - v_j|.$$

Fixons $X_0 \in K_n$ et $\varepsilon > 0$. La continuité de chaque g_j fournit $\delta_j > 0$ tel que $X \in K_n$ et $\|X - X_0\| < \delta_j$ impliquent $|g_j(X) - g_j(X_0)| < \varepsilon$. Puisque la famille est finie, $\delta = \min_j \delta_j$ est strictement positif. Pour $\|X - X_0\| < \delta$, l'inégalité précédente donne $|g(X) - g(X_0)| < \varepsilon$.

Ainsi g est continue en chaque point de K_n . La récurrence réutilise directement a) ; l'estimation directe est utile pour contrôler quantitativement l'effet de variations simultanées des fonctions.

3) a) Fixons $X \in K_n$. Pour $Y = {}^t(y_1, \dots, y_p) \in K_p$, le produit matriciel s'écrit

$$f(X, Y) = \sum_{j=1}^p y_j \varphi_j(X).$$

Chaque $\varphi_j(X)$ est inférieur ou égal à $\lambda(X)$, et les y_j sont positifs ou nuls. Comme leur

somme vaut 1,

$$f(X, Y) \leq \sum_{j=1}^p y_j \lambda(X) = \lambda(X).$$

- b)** La famille finie non vide $(\varphi_j(X))_{1 \leq j \leq p}$ possède un maximum. Choisissons un indice j_0 qui le réalise, et notons e_{j_0} le vecteur de la base canonique de E_p dont la coordonnée j_0 vaut 1.

Le vecteur $Y_X = e_{j_0}$ appartient à K_p et vérifie $f(X, Y_X) = \varphi_{j_0}(X) = \lambda(X)$. Ce choix reste possible même si plusieurs indices réalisent le maximum.

- c)** La question a) montre que $\lambda(X)$ est un majorant des valeurs de $f(X, \cdot)$ sur K_p , et b) montre que ce majorant est atteint. Donc

$$\lambda(X) = \max_{Y \in K_p} f(X, Y).$$

- 4)** a) Si $X \in K_n$, alors $0 \leq x_i \leq 1$ pour chaque i , car les coordonnées sont positives ou nulles et leur somme vaut 1. Ainsi $x_i^2 \leq x_i$, d'où

$$\|X\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Donc K_n est contenu dans la boule de centre 0 et de rayon 1, et est borné. La même démonstration vaut pour K_p .

Résultat admis dans cette version adaptée : K_n est fermé dans E_n , et K_p est fermé dans E_p . Cette propriété est déjà admise dans le sujet original. Elle permettra d'appliquer le théorème des extrema sur un ensemble fermé et borné de dimension finie.

- b)** Chaque φ_j est la restriction à K_n d'une forme linéaire sur l'espace réel de dimension finie E_n , donc est continue. D'après 2), $\lambda = \max_j \varphi_j$ est continue.

Le théorème des extrema affirme qu'une fonction réelle continue sur une partie non vide, fermée et bornée d'un espace euclidien de dimension finie atteint son minimum et

son maximum. L'ensemble K_n est non vide, fermé et borné ; toutes les hypothèses sont donc satisfaites. Il existe $X_0 \in K_n$ tel que

$$\alpha(A) = \lambda(X_0) = \min_{X \in K_n} \lambda(X) = \min_{X \in K_n} \max_{Y \in K_p} f(X, Y).$$

Précisons aussi l'existence de $\beta(A)$, utilisée ensuite. Pour $Y \in K_p$, posons

$$\psi_i(Y) = \sum_{j=1}^p a_{ij} y_j.$$

Alors

$$f(X, Y) = \sum_i x_i \psi_i(Y) \geq \min_i \psi_i(Y),$$

avec égalité pour $X = e_{i_0}$ si i_0 réalise ce minimum. Ainsi,

$$\eta(Y) = \min_{X \in K_n} f(X, Y) = \min_i \psi_i(Y) = -\max_i (-\psi_i(Y)).$$

Cette fonction est continue par 2), puisque les ψ_i sont linéaires. Sur l'ensemble non vide, fermé et borné K_p , elle atteint un maximum. Il existe donc $Y_0 \in K_p$ tel que

$$\beta(A) = \eta(Y_0) = \max_{Y \in K_p} \min_{X \in K_n} f(X, Y).$$

5) a) Pour $(X', Y) \in K_n \times K_p$, la définition du minimum et la question 3) donnent

$$\min_{X \in K_n} f(X, Y) \leq f(X', Y) \leq \lambda(X').$$

On obtient bien l'inégalité demandée.

b) Fixons X' . L'inégalité de a) est vraie pour tout $Y \in K_p$, donc le maximum sur Y de son membre gauche vérifie $\beta(A) \leq \lambda(X')$. Cela vaut pour tout $X' \in K_n$. En prenant le minimum sur X' ,

$$\beta(A) \leq \min_{X' \in K_n} \lambda(X') = \alpha(A).$$

- 6) a) La fonction norme $Y \mapsto \|Y\|$ est continue sur E_p . L'ensemble $\mathcal{C}$ est, par hypothèse, non vide, fermé et borné. Le théorème des extrema utilisé en 4) donne donc un élément $W \in \mathcal{C}$ où la norme est minimale :

$$\forall Y \in \mathcal{C}, \quad \|W\| \leq \|Y\|.$$

La convexité n'est pas nécessaire à cette existence ; elle intervient en b).

b) Premier point — Développement du carré de la norme

Pour $m \in [0, 1]$, la convexité de $\mathcal{C}$ assure que $Y_m = (1 - m)W + mY$ appartient à $\mathcal{C}$. Par minimalité de la norme de W , $\|Y_m\|^2 \geq \|W\|^2$.

En développant à l'aide du produit scalaire,

$$(1 - m)^2\|W\|^2 + 2m(1 - m)\langle W, Y \rangle + m^2\|Y\|^2 \geq \|W\|^2.$$

Donc

$$2m(1 - m)\langle W, Y \rangle \geq (1 - (1 - m)^2)\|W\|^2 - m^2\|Y\|^2 = m(2 - m)\|W\|^2 - m^2\|Y\|^2.$$

Pour $m \in]0, 1[$, le nombre $2m(1 - m)$ est strictement positif. On peut donc diviser sans changer le sens de l'inégalité et obtenir

$$\langle W, Y \rangle \geq \frac{2 - m}{2(1 - m)}\|W\|^2 - \frac{m}{2(1 - m)}\|Y\|^2.$$

Second point — Inégalité de produit scalaire

Méthode 1 — Passage à la limite dans l'inégalité précédente

Les vecteurs W, Y sont fixés. Lorsque m tend vers 0 par valeurs strictement positives, les coefficients $\frac{2 - m}{2(1 - m)}$ et $\frac{m}{2(1 - m)}$ tendent respectivement vers 1 et 0. L'inégalité est

valable pour tout $m \in]0, 1[$; le passage à la limite donne

$$\langle W, Y \rangle \geq \|W\|^2.$$

Méthode 2 — Dérivée à droite le long du segment

Posons $q(m) = \|W + m(Y - W)\|^2$ pour $m \in [0, 1]$. La fonction q est polynomiale et vérifie $q(m) \geq q(0)$ par convexité de $\mathcal{C}$ et minimalité de W . Pour $m > 0$, le quotient $\frac{q(m) - q(0)}{m}$ est donc positif ou nul; sa limite donne $q'(0) \geq 0$.

Or $q(m) = \|W\|^2 + 2m\langle W, Y - W \rangle + m^2\|Y - W\|^2$, donc $q'(0) = 2\langle W, Y - W \rangle$. Ainsi $\langle W, Y - W \rangle \geq 0$, soit de nouveau $\langle W, Y \rangle \geq \|W\|^2$.

La première méthode suit l'indication de l'énoncé; la seconde traduit la minimalité par une dérivée dans une direction autorisée par la convexité. Dans les deux cas, l'inégalité vaut pour tout $Y \in \mathcal{C}$, y compris si $W = 0$.

7) a) Soient $X_1, X_2 \in K_n$ et $t \in [0, 1]$. Les coordonnées de $tX_1 + (1 - t)X_2$ sont positives ou nulles et leur somme vaut $t + (1 - t) = 1$. Ce vecteur appartient donc à K_n .

Comme K_n est non vide, il est convexe. Le même argument montre que K_p est convexe.

b) Pour établir la convexité, considérons deux éléments

$$Z_r = m_r t A X_r + (1 - m_r) Y_r \in \mathcal{C} \quad (r = 1, 2),$$

où $m_r \in [0, 1]$, $X_r \in K_n$, $Y_r \in K_p$. Fixons $t \in [0, 1]$ et posons $m = tm_1 + (1 - t)m_2 \in [0, 1]$.

Si $0 < m < 1$, définissons

$$X = \frac{tm_1 X_1 + (1 - t)m_2 X_2}{m}, \quad Y = \frac{t(1 - m_1)Y_1 + (1 - t)(1 - m_2)Y_2}{1 - m}.$$

Les coefficients dans chacune de ces expressions sont positifs ou nuls et leur somme vaut 1. Par convexité de K_n et de K_p , $X \in K_n$ et $Y \in K_p$. La linéarité donne alors

$$tZ_1 + (1-t)Z_2 = m^tAX + (1-m)Y \in \mathcal{C}.$$

Si $m = 0$, les deux coefficients positifs ou nuls tm_1 et $(1-t)m_2$ sont nuls. Le terme contenant tA disparaît et $tZ_1 + (1-t)Z_2 = tY_1 + (1-t)Y_2 \in K_p$. C'est un élément de $\mathcal{C}$ obtenu avec le paramètre $m = 0$ et un choix quelconque de $X \in K_n$.

Si $m = 1$, les coefficients $t(1-m_1)$ et $(1-t)(1-m_2)$ sont nuls. On a alors $tZ_1 + (1-t)Z_2 = {}^tA(tX_1 + (1-t)X_2)$, qui appartient à $\mathcal{C}$ avec le paramètre $m = 1$ et un choix quelconque de $Y \in K_p$.

Les cas limites sont ainsi traités et $\mathcal{C}$ est convexe. Il est non vide puisqu'il contient K_p .

Pour établir qu'il est borné, posons $M = \max_{i,j} |a_{ij}|$, un réel positif ou nul. Pour $X \in K_n$ et $1 \leq j \leq p$,

$$|({}^tAX)_j| = \left| \sum_i a_{ij}x_i \right| \leq \sum_i |a_{ij}|x_i \leq M.$$

Il en résulte $\|{}^tAX\| \leq \sqrt{p} M$. Par 4), $\|Y\| \leq 1$ pour $Y \in K_p$. L'inégalité triangulaire donne, pour tout élément $Z = m^tAX + (1-m)Y$ de $\mathcal{C}$,

$$\|Z\| \leq m\sqrt{p} M + (1-m) \leq \max(\sqrt{p} M, 1).$$

Donc $\mathcal{C}$ est borné.

Résultat admis dans cette version adaptée : $\mathcal{C}$ est fermé dans E_p . Cette propriété est déjà admise dans le sujet original. Avec la convexité, la bornitude et la non-vacuité établies ici, elle rend la question 6) applicable à cet ensemble.

8) a) Puisque $0 \in \mathcal{C}$, il existe $m \in [0, 1]$, $X_0 \in K_n$ et $Y_0 \in K_p$ tels que

$$0 = m^tAX_0 + (1-m)Y_0.$$

Si $m = 0$, on aurait $Y_0 = 0$, ce qui est impossible puisque la somme de ses coordonnées vaut 1. Donc $m > 0$ et l'on peut poser $\mu = -\frac{1-m}{m} \leq 0$. L'égalité précédente devient ${}^tAX_0 = \mu Y_0$, ce qui établit le résultat.

b) Pour tout $Y \in K_p$,

$${}^t(X_0)AY = {}^t({}^tAX_0)Y = \mu {}^t(Y_0)Y.$$

Les coordonnées de Y_0 et de Y sont positives ou nulles, donc ${}^t(Y_0)Y \geq 0$. Puisque $\mu \leq 0$, on obtient ${}^t(X_0)AY \leq 0$. Une égalité peut se produire ; aucune stricte négativité n'est requise.

c) Toutes les valeurs de $f(X_0, \cdot)$ sont inférieures ou égales à zéro. Par conséquent,

$$\alpha(A) = \min_{X \in K_n} \lambda(X) \leq \lambda(X_0) = \max_{Y \in K_p} {}^t(X_0)AY \leq 0.$$

Donc $\alpha(A)$ est négatif ou nul.

9) a) L'ensemble $\mathcal{C}$ est non vide, fermé, borné et convexe. Par 6), il existe $W \in \mathcal{C}$ de norme minimale et, pour tout $Z \in \mathcal{C}$,

$$\langle W, Z \rangle \geq \|W\|^2.$$

Puisque $0 \notin \mathcal{C}$, ce vecteur W est non nul. Donc $\|W\|^2 > 0$. Pour $Z = m{}^tAX + (1 - m)Y$, on obtient

$$m{}^tXAW + (1 - m){}^tYW = \langle W, Z \rangle \geq \|W\|^2 > 0.$$

Cette inégalité vaut pour tous $m \in [0, 1]$, $X \in K_n$ et $Y \in K_p$; elle établit a) et donne de plus une minoration uniforme.

b) Prenons $m = 0$ et $Y = e_i \in K_p$ dans l'inégalité précédente. Le vecteur X peut être choisi arbitrairement dans K_n . Il vient

$$w_i = {}^t(e_i)W \geq \|W\|^2 > 0.$$

Toutes les coordonnées de W sont donc strictement positives.

c) Prenons $m = 1$. Le choix de Y n'intervient plus et, pour tout $X \in K_n$,

$${}^tXAW \geq \|W\|^2 > 0.$$

d) Posons

$$\sigma = \sum_{i=1}^p w_i.$$

D'après b), $\sigma > 0$, donc le vecteur $W' = \frac{1}{\sigma}W$ est bien défini. Ses coordonnées sont positives et leur somme vaut 1, d'où $W' \in K_p$.

En divisant l'inégalité de c) par $\sigma > 0$, on obtient

$$\forall X \in K_n, \quad {}^tXAW' \geq \frac{\|W\|^2}{\sigma} > 0.$$

Le vecteur W' a donc la propriété demandée.

e) La minoration uniforme de d) donne

$$\min_{X \in K_n} {}^tXAW' \geq \frac{\|W\|^2}{\sigma} > 0.$$

Comme $W' \in K_p$, cette valeur est inférieure ou égale au maximum qui définit $\beta(A)$. Ainsi,

$$\beta(A) = \max_{Y \in K_p} \min_{X \in K_n} {}^tXAY \geq \frac{\|W\|^2}{\sigma} > 0.$$

La conclusion repose sur une borne strictement positive commune à tous les X .

10) a) Pour $X \in K_n$ et $Y \in K_p$, les sommes des coordonnées valent 1, donc

$${}^tXJY = \left(\sum_i x_i \right) \left(\sum_j y_j \right) = 1.$$

Il en résulte ${}^tXBY = {}^tXAY - \beta(A)$. Soustraire une constante à une fonction soustrait cette même constante à chacun de ses extrema. Ainsi,

$$\alpha(B) = \alpha(A) - \beta(A), \quad \beta(B) = \beta(A) - \beta(A) = 0.$$

b) Appliquons les questions 7) à 9) à la matrice B , en notant

$$\mathcal{C}_B = \{m^t B X + (1 - m)Y : X \in K_n, Y \in K_p, m \in [0, 1]\}.$$

Si $0 \notin \mathcal{C}_B$, la question 9) donnerait $\beta(B) > 0$, ce qui contredit $\beta(B) = 0$. Donc $0 \in \mathcal{C}_B$. La question 8) donne alors $\alpha(B) \leq 0$.

D'autre part, l'inégalité de 5), valable pour toute matrice réelle de la forme prescrite, donne $0 = \beta(B) \leq \alpha(B)$. Par conséquent $\alpha(B) = 0$. Avec a),

$$\alpha(A) - \beta(A) = 0, \quad \text{donc } \alpha(A) = \beta(A).$$

Cette égalité a été démontrée à partir des questions précédentes, sans utiliser de théorème général de minimax.

Partie III. Point-selle et point critique

1) Par II.4), il existe $X_0 \in K_n$ minimisant $X \mapsto \max_Y f(X, Y)$ et $Y_0 \in K_p$ maximisant $Y \mapsto \min_X f(X, Y)$. Posons $c = \alpha(A) = \beta(A)$, égalité établie en II.10).

Pour tout $Y \in K_p$, $f(X_0, Y) \leq \max_{Y' \in K_p} f(X_0, Y') = c$. Pour tout $X \in K_n$, $f(X, Y_0) \geq \min_{X' \in K_n} f(X', Y_0) = c$.

En prenant $Y = Y_0$ dans la première inégalité et $X = X_0$ dans la seconde, on obtient $f(X_0, Y_0) = c$. Ainsi,

$$\forall (X, Y) \in K_n \times K_p, \quad f(X_0, Y) \leq f(X_0, Y_0) \leq f(X, Y_0).$$

Le couple (X_0, Y_0) est donc un point-selle.

Considérons maintenant un point-selle quelconque $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ et notons $s = f(\tilde{X}, \tilde{Y})$. Les inégalités du point-selle montrent que $\max_Y f(\tilde{X}, Y) = s$ et $\min_X f(X, \tilde{Y}) = s$, car les deux extrema sont atteints au couple lui-même.

Il en résulte $\alpha(A) \leq s \leq \beta(A)$. Puisque $\alpha(A) = \beta(A)$, nécessairement $s = \alpha(A)$. Tout point-selle a donc la valeur annoncée.

2) a) Posons $D = a + d - b - c$. Le développement du produit donne, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$g(x, y) = axy + bx(1 - y) + c(1 - x)y + d(1 - x)(1 - y) = d + (b - d)x + (c - d)y + Dxy.$$

Cette fonction polynomiale est de classe C^∞ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Ses dérivées partielles sont

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = b - d + Dy, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = c - d + Dx.$$

Si $D \neq 0$, l'annulation de ces deux dérivées impose et permet le couple unique

$$x_0 = \frac{d - c}{D}, \quad y_0 = \frac{d - b}{D}.$$

Si $D = 0$, les dérivées sont constantes. Lorsque $b = d$ et $c = d$, elles sont toutes deux nulles ; de plus $D = 0$ donne $a = d$, donc g est constante et tous les points de $\mathbb{R}^2$ sont critiques. Si au moins l'une des égalités $b = d$, $c = d$ est fausse, aucune annulation simultanée n'est possible : il n'y a aucun point critique.

Dans les deux cas où $D = 0$, il n'y a pas de point critique unique. L'équivalence et les coordonnées demandées sont donc établies.

b) Premier point — Existence du point critique dans le carré

Le fait que $a - b$ et $d - c$ soient de même signe et non tous nuls signifie qu'ils sont tous deux positifs ou nuls avec au moins l'un strictement positif, ou tous deux négatifs ou nuls avec au moins l'un strictement négatif.

Leur somme $D = (a - b) + (d - c)$ est alors non nulle. Le quotient $x_0 = \frac{d - c}{D}$ est compris entre 0 et 1 : dans le cas positif, $0 \leq d - c \leq D$; dans le cas négatif, $D \leq d - c \leq 0$ et la division par $D < 0$ renverse les inégalités.

De même, $D = (a - b) + (d - c)$ et la seconde hypothèse de signe donnent $0 \leq y_0 = \frac{d - b}{D} \leq 1$. La question a) assure donc un unique point critique $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$. Les cas où l'une des différences est nulle sont inclus et peuvent placer le point sur le bord du carré.

Deuxième point — Identité autour du point critique

Méthode 1 — Bilinéarité et vecteurs d'écart

Avec les notations proposées, $X = X_0 + U$, $Y = Y_0 + V$, donc

$$g(x, y) = {}^t(X_0)AY_0 + {}^tUAY_0 + {}^t(X_0)AV + {}^tUAV.$$

$$\text{Or } U = (x - x_0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } V = (y - y_0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ On a}$$

$${}^tUAY_0 = (x - x_0)(b - d + Dy_0) = 0,$$

$${}^t(X_0)AV = (y - y_0)(c - d + Dx_0) = 0,$$

car (x_0, y_0) est critique. Enfin,

$${}^tUAV = (x - x_0)(y - y_0) \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = D(x - x_0)(y - y_0).$$

Ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$g(x, y) = g(x_0, y_0) + D(x - x_0)(y - y_0).$$

Méthode 2 — Développement du polynôme au point critique

Écrivons $x = x_0 + u$ et $y = y_0 + v$. La formule de a) donne exactement

$$g(x_0 + u, y_0 + v) = g(x_0, y_0) + (b - d + Dy_0)u + (c - d + Dx_0)v + Duv.$$

Les deux coefficients linéaires s'annulent puisque le point est critique. En remplaçant u par $x - x_0$ et v par $y - y_0$, on obtient la même identité sur tout $\mathbb{R}^2$.

La première méthode suit l'indication et met en évidence la bilinéarité du produit matriciel ; la seconde exploite directement la forme polynomiale et l'annulation des termes du premier degré.

Troisième point — Propriété de point-selle

L'identité précédente implique, pour tous $x, y \in [0, 1]$,

$$g(x_0, y) = g(x_0, y_0) = g(x, y_0).$$

Tout élément de K_2 a la forme ${}^t(x, 1 - x)$ avec $x \in [0, 1]$. Comme $X_0, Y_0 \in K_2$, on a donc, pour tous $X, Y \in K_2$,

$$f(X_0, Y) = f(X_0, Y_0) = f(X, Y_0).$$

Ces égalités impliquent les deux inégalités qui définissent un point-selle. Le couple (X_0, Y_0) est bien un point-selle de f .

Quatrième point — Valeur de $\alpha(A)$

D'après 1), $\alpha(A) = g(x_0, y_0)$. Les relations $Dx_0 = d - c$ et $Dy_0 = d - b$ donnent

$$g(x_0, y_0) = d - \frac{(d - b)(d - c)}{D}.$$

Le numérateur se simplifie par

$$dD - (d - b)(d - c) = d(a + d - b - c) - (d^2 - db - dc + bc) = ad - bc.$$

Puisque $D \neq 0$, on conclut

$$\alpha(A) = \beta(A) = \frac{ad - bc}{a + d - b - c}.$$

Ce calcul est une simplification algébrique directe.

Partie IV. Application à une étude de la concurrence

- 1) La variable aléatoire $V_{x,y}$ prend ses valeurs dans l'ensemble fini $\{-2, 3, 1, -1\}$ et est bornée en valeur absolue par 3. Son espérance existe donc pour tous $x, y \in [0, 1]$.

Les choix de Primus et de Secundus sont indépendants par hypothèse. Les probabilités des quatre couples de stratégies sont donc les produits des probabilités individuelles :

Couple de stratégies	Valeur de $V_{x,y}$	Probabilité
(P_1, S_1)	-2	xy
(P_1, S_2)	3	$x(1 - y)$
(P_2, S_1)	1	$(1 - x)y$
(P_2, S_2)	-1	$(1 - x)(1 - y)$

Ces probabilités sont positives ou nulles et leur somme est $(x + 1 - x)(y + 1 - y) = 1$. La définition de l'espérance donne

$$E(V_{x,y}) = -2xy + 3x(1 - y) + (1 - x)y - (1 - x)(1 - y) = -1 + 4x + 2y - 7xy.$$

Il s'agit de la fonction $h(x, y)$ de II.1). La variation espérée de la part de marché de Primus est son opposée, $-h(x, y)$.

- 2) Les avantages sont comparés en espérance. Secundus cherche à maximiser $h(x, y)$ tandis que Primus cherche à la minimiser, puisque sa propre variation est $-h(x, y)$.

Méthode 1 — Utilisation du point-selle

Pour $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, les différences de III.2.b) valent $a - b = -5$, $d - c = -2$,

$a - c = -3$, $d - b = -4$. Les deux paires ont des termes de même signe et non tous nuls.

De plus $D = a + d - b - c = -7$.

La question III.2) fournit le point-selle

$$x_0 = \frac{d - c}{D} = \frac{2}{-7}, \quad y_0 = \frac{d - b}{D} = \frac{4}{-7},$$

de valeur $h(x_0, y_0) = \frac{ad - bc}{D} = \frac{2 - 3}{-7} = \frac{1}{7}.$

Par les inégalités du point-selle, $h(x_0, y) \leq h(x_0, y_0)$ pour tout y : Secundus ne peut augmenter son gain espéré en changeant seul de probabilité. De même, $h(x, y_0) \geq h(x_0, y_0)$ pour tout x , donc $-h(x, y_0) \leq -h(x_0, y_0)$: Primus ne peut augmenter son propre gain espéré en changeant seul de probabilité.

Ici les inégalités sont même des égalités. Directement,

$$h\left(\frac{2}{7}, y\right) = -1 + 4 \cdot \frac{2}{7} + \left(2 - 7 \cdot \frac{2}{7}\right) y = \frac{1}{7},$$

$$h\left(x, \frac{4}{7}\right) = -1 + 2 \cdot \frac{4}{7} + \left(4 - 7 \cdot \frac{4}{7}\right) x = \frac{1}{7}.$$

Le couple demandé existe donc avec $x_0 = \frac{2}{7}$ et $y_0 = \frac{4}{7}$.

Méthode 2 — Égalisation des gains des stratégies pures

Si Primus utilise la probabilité x , le gain espéré de Secundus lorsqu'il choisit sûrement S_1 est $-2x + (1 - x) = 1 - 3x$. Lorsqu'il choisit sûrement S_2 , ce gain est $3x - (1 - x) = -1 + 4x$.

Pour rendre Secundus indifférent entre ces deux stratégies, imposons $1 - 3x = -1 + 4x$. Cela donne $7x = 2$, donc $x_0 = \frac{2}{7} \in [0, 1]$. Les deux gains valent alors $\frac{1}{7}$. Toute stratégie aléatoire de Secundus est une combinaison de ces deux choix ; son gain espéré reste donc $\frac{1}{7}$ pour tout y .

Si Secundus utilise la probabilité y , le gain espéré de Secundus lorsque Primus choisit sûrement P_1 vaut $-2y + 3(1 - y) = 3 - 5y$; lorsque Primus choisit sûrement P_2 , il vaut $y - (1 - y) = -1 + 2y$. Les gains propres de Primus sont les opposés de ces deux valeurs.

Pour rendre Primus indifférent, imposons $3 - 5y = -1 + 2y$. Cela donne $7y = 4$, donc $y_0 = \frac{4}{7} \in [0, 1]$. Les deux valeurs pour Secundus sont alors $\frac{1}{7}$ et les deux valeurs pour Primus sont $-\frac{1}{7}$. Toute stratégie aléatoire de Primus conserve ce gain espéré lorsqu'il est le seul à modifier sa probabilité.

Ainsi $(x_0, y_0) = (\frac{2}{7}, \frac{4}{7})$ vérifie exactement la condition demandée. Primus choisit donc P_1 avec probabilité $\frac{2}{7}$ et P_2 avec probabilité $\frac{5}{7}$; Secundus choisit S_1 avec probabilité $\frac{4}{7}$ et S_2 avec probabilité $\frac{3}{7}$.

La première méthode réutilise la théorie démontrée dans le problème; la seconde explique concrètement le choix des probabilités par l'indifférence qu'elles créent chez l'autre joueur. À ce couple, les variations espérées sont $\frac{1}{7}$ pour Secundus et $-\frac{1}{7}$ pour Primus.

Relevé des adaptations

- Notations préliminaires : remplacement de la borne n par k pour la famille de k réels et harmonisation de l'ensemble $\mathcal{A}$ sur lequel sont pris les extrema; correction de deux incohérences de notation.
- I.3.a) et I.3.b) : remplacement des fonctions Pascal par des fonctions Python sur un tableau NumPy, avec indices commençant à zéro, conformément au référentiel actuel.
- II.2.a) : formulation pour deux fonctions continues, indépendamment de p , afin de couvrir aussi le cas autorisé $p = 1$. Le contenu mathématique est conservé.