



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2001

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

L'objet du problème est l'étude de quelques aspects de la théorie classique du risque dont le contexte et les notations sont introduits au fur et à mesure.

Dans tout le problème, on considère deux suites de variables aléatoires réelles $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, vérifiant les conditions suivantes :

- i) les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ sont indépendantes ;
- ii) les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$ sont strictement positives et ont toutes la même densité égale sur $]0, +\infty[$ à la densité d'une variable aléatoire exponentielle d'espérance égale à 1 ;
- iii) les variables aléatoires $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ ont toutes la même densité qu'une variable aléatoire exponentielle d'espérance égale à c .

On pose $T_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, on note T_n la variable aléatoire définie par :

$$T_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i$$

On observera que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et que, pour tout entier naturel n , on a l'égalité : $\Delta_{n+1} = T_{n+1} - T_n$.

On notera $E(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

- 1) Pour tout entier naturel n , déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire T_n .
- 2) Soit t un réel positif ou nul.

- a) Pour tout entier naturel n strictement supérieur à t , justifier l'inclusion entre événements :

$$[T_n < t] \subset [|T_n - n| \geq n - t]$$

- b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, en déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} P([T_n < t])$.

- c) En déduire que l'événement $\bigcap_{k=1}^{+\infty} [T_k < t]$ est de probabilité nulle.

- 3) Soit t un réel positif ou nul. Étant donné un élément ω de Ω , on note $N(t)(\omega)$ le plus grand élément de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}; T_n(\omega) \leq t\}$ (qui contient 0) si cet ensemble est fini, et $N(t)(\omega) = 0$ sinon.

On observera que, pour tout entier naturel n non nul, $N(t)$ est égal à n si et seulement si : $T_n \leq t < T_{n+1}$.

Montrer que l'application $N(t)$ est une variable aléatoire réelle vérifiant :

$$P([N(t) = 0]) = P([T_1 > t]).$$

- 4) a) Pour tout entier naturel n non nul, reconnaître la loi de la variable aléatoire T_n .

- b) Soit t un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n non nul, justifier l'égalité :

$$1 = \sum_{k=0}^n \frac{t^k e^{-t}}{k!} + e^{-t} \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} e^u du$$

En déduire l'égalité :

$$P([N(t) \leq n]) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k e^{-t}}{k!}.$$

- c) Pour tout réel t positif ou nul, reconnaître la loi de la variable aléatoire $N(t)$.

Partie II : Étude de la probabilité d'être en déficit après le premier ou le second sinistre

Dans cette partie on considère deux réels a et r , r étant strictement positif et, pour tout réel positif t , on note $K_a(t)$ la variable aléatoire définie par l'égalité :

$$K_a(t) = a + rt - \sum_{i=1}^{N(t)} C_i$$

en convenant que la somme

$$\sum_{i=1}^{N(t)} C_i$$

est nulle lorsque $N(t)$ est nul.

En particulier, $K_a(T_0) = K_a(0) = a$ et, pour tout entier naturel n non nul, puisque $N(T_n) = n$:

$$K_a(T_n) = a + rT_n - \sum_{i=1}^n C_i$$

Par exemple, $K_a(t)$ pourrait représenter le capital (aléatoire) au temps t d'une compagnie d'assurance disposant d'un capital initial (de montant a éventuellement négatif), percevant des primes (de montant égal à r par unité de temps), et indemnisant des assurés victimes de sinistres de coûts aléatoires (les C_i) survenant à des dates elles-mêmes aléatoires (les T_i).

Dans cette partie, le réel a étant fixé, la variable aléatoire $K_a(t)$ sera notée plus simplement $K(t)$.

- 1) a) Déterminer une densité de probabilité de la variable aléatoire $-r\Delta_1$.
- b) Déterminer une densité de probabilité f , continue sur $\mathbb{R}$, de la variable aléatoire $L_1 = C_1 - r\Delta_1$.

- c) En déduire l'expression de la fonction de répartition F de la variable L_1 puis l'égalité :

$$P([K(T_1) < 0]) = 1 - \frac{r}{c+r} \exp\left(\frac{a}{r}\right) \text{ si } a \leq 0$$

$$P([K(T_1) < 0]) = \frac{c}{c+r} \exp\left(\frac{-a}{c}\right) \text{ si } a > 0$$

- 2) On pose $L_2 = C_2 - r\Delta_2$ et on considère la fonction g associant à tout réel x le réel :

$$g(x) = P([L_1 \leq x] \cap [L_1 + L_2 \leq a])$$

- a) Pour tout réel h strictement positif, justifier les inégalités :

$$g(x+h) - g(x) \geq P([x < L_1 \leq x+h]) P([L_2 \leq a-x-h])$$

et

$$g(x+h) - g(x) \leq P([x < L_1 \leq x+h]) P([L_2 < a-x])$$

- b) En déduire que la fonction g est dérivable à droite sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout réel x , $g'_d(x) = f(x)F(a-x)$.

On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout réel x , $g'(x) = f(x)F(a-x)$.

- 3) a) Prouver l'égalité :

$$P([L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P([-n < L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a])$$

b) En déduire l'égalité :

$$P([L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a]) = \int_{-\infty}^a f(x)F(a-x) dx$$

c) Établir les égalités :

$$P([K(T_1) < 0] \cup [K(T_2) < 0]) = 1 - \int_{-\infty}^a f(x)F(a-x) dx$$

et

$$P([K(T_1) < 0] \cup [K(T_2) < 0]) = P([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^a f(x) P([L_2 > a-x]) dx$$

4) En déduire, dans le cas où a est un réel positif ou nul, l'égalité :

$$P([K(T_1) < 0] \cup [K(T_2) < 0]) = \frac{c}{c+r} \left(1 + \frac{a}{c+r} + \frac{rc}{(c+r)^2} \right) \exp\left(\frac{-a}{c}\right)$$

Partie III : Étude de la probabilité d'être en déficit au cours du temps : deux premiers cas

Dans cette partie, le réel a n'étant plus nécessairement fixé, on utilisera la notation $K_a(t)$.

Pour tout réel a , on note $\Pi(a)$ la probabilité suivante :

$$\Pi(a) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [K_a(T_n) < 0]\right)$$

Dans le contexte décrit plus haut, $\Pi(a)$ représenterait la probabilité que la compagnie d'assurance (disposant d'un capital initial de montant a) soit en déficit après un sinistre. En particulier $\Pi(a) = 1$ si $a < 0$.

- 1) Montrer que la fonction Π est décroissante.
- 2) Pour tout réel a , quelles minoration de $\Pi(a)$ peut-on déduire de la partie II?
- 3) On admet que la fonction Π est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie, pour tout réel a positif ou nul, l'égalité :

$$\Pi(a) = P([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^a f(x) \Pi(a - x) dx$$

Pourquoi, intuitivement, peut-on conjecturer cette égalité ?

- 4) Soit a un réel et n un entier naturel.
 - a) Calculer l'espérance de $K_a(T_n)$ en fonction de n, a, c et r . Trouver sa limite quand n tend vers l'infini, selon les valeurs comparées de c et r .
 - b) Calculer la variance de $K_a(T_n)$ en fonction de n, r et c .
- 5) Dans cette question, on suppose que c est strictement plus grand que r et on considère un réel a positif ou nul.
 - a) Pour tout entier n strictement supérieur à $\frac{a}{c-r}$, établir l'inégalité :

$$P([K_a(T_n) < 0]) \geq 1 - \frac{n(c^2 + r^2)}{(a + nr - nc)^2}$$

b) En déduire l'égalité : $\Pi(a) = 1$.

6) Dans cette question, on suppose que c est égal à r et on considère un réel a positif ou nul.

a) Soit y un nombre réel. En remarquant que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité :

$$K_a(T_n) = a - \sum_{i=1}^n (C_i - r\Delta_i)$$

et, à l'aide du théorème de la limite centrée, exprimer le réel

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P([K_a(T_n) \leq a + y\sqrt{n}])$, en utilisant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

b) Pour tout nombre réel y strictement positif fixé, établir, pour tout entier naturel n assez grand, la double inégalité :

$$P([K_a(T_n) \leq a - y\sqrt{n}]) \leq P([K_a(T_n) < 0]) \leq P([K_a(T_n) \leq a + y\sqrt{n}])$$

c) En déduire la limite de la probabilité $P([K_a(T_n) < 0])$ quand n tend vers l'infini puis l'inégalité : $\Pi(a) \geq \frac{1}{2}$.

Partie IV : Étude de la probabilité d'être en déficit au cours du temps : le dernier cas

Dans cette partie, on suppose que c est strictement plus petit que r .

1) a) En procédant par récurrence, établir, pour tout entier naturel n et tout réel a positif ou nul, l'inégalité :

$$\Pi(a) \geq \frac{c}{c+r} \exp\left(\frac{-a}{c}\right) \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k! (c+r)^k}$$

b) En déduire, pour tout réel a positif ou nul, la minoration :

$$\Pi(a) \geq \frac{c}{c+r} \exp\left(\frac{-ar}{c(c+r)}\right)$$

2) a) Montrer que pour tout réel positif λ vérifiant $\lambda < \frac{1}{c}$, la variable $\exp(\lambda L_1)$ possède une espérance qu'on calculera.

b) Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n (C_k - r\Delta_k).$$

Pour tout réel positif λ vérifiant $\lambda < \frac{1}{c}$, justifier l'égalité :

$$E(\exp(\lambda S_n)) = \frac{1}{(1+r\lambda)^n (1-c\lambda)^n}$$

3) a) Pour tout réel positif λ vérifiant $\lambda < \frac{1}{c}$, tout réel a positif ou nul et tout entier naturel n non nul, établir l'inégalité :

$$P([S_n > a]) \leq e^{-\lambda a} E(\exp(\lambda S_n))$$

b) En déduire que, pour tout réel λ élément de $\left]0, \frac{1}{c} - \frac{1}{r}\right[$, la série de terme général

$$\frac{1}{(1+r\lambda)^n (1-c\lambda)^n} \text{ converge et qu'on a l'inégalité :}$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n > a]\right) \leq e^{-\lambda a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+r\lambda)^n (1-c\lambda)^n}$$

- 4) En remarquant que, pour tout réel a positif ou nul, $\Pi(a) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n > a]\right)$, établir les résultats suivants :

i) $\lim_{a \rightarrow +\infty} \Pi(a) = 0;$

- ii) pour tout réel λ vérifiant $0 < \lambda < \frac{1}{c} - \frac{1}{r}$, et tout réel a assez grand, on a l'inégalité : $\Pi(a) \leq e^{-\lambda a}$ (on introduira un réel μ vérifiant $\lambda < \mu < \frac{1}{c} - \frac{1}{r}$).

- 5) a) Montrer que si une fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de limite nulle en $+\infty$, alors la fonction $|\psi|$ a un maximum sur $\mathbb{R}_+$.

- b) Soit Π_1 et Π_2 deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, toutes deux de limite nulle en $+\infty$, vérifiant pour tout réel a positif ou nul, les égalités :

$$\begin{aligned} \Pi_1(a) &= P([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^a f(x) \Pi_1(a-x) dx \text{ et} \\ \Pi_2(a) &= P([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^a f(x) \Pi_2(a-x) dx \end{aligned}$$

Montrer que les fonctions Π_1 et Π_2 coïncident sur $\mathbb{R}_+$.

- c) Établir, pour tout réel a positif ou nul, l'égalité suivante :

$$\Pi(a) = \frac{c}{r} \exp\left(-a\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{r}\right)\right)$$