



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

2001

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Le but de ce problème est l'étude du modèle démographique «Proies et prédateurs» de Vito Volterra.

Dans tout le problème, $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien, et α, β, a, b désignent des réels strictement positifs, fixés une fois pour toutes. On définit les fonctions f et g sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = -\alpha \ln x + \beta x, \quad g(y) = -a \ln y + by.$$

Enfin, on appelle F la fonction définie sur $]0, +\infty[^2$ par $F(x, y) = f(x) + g(y)$.

Partie I. Étude de la fonction F

1. Étudier les variations de f et vérifier qu'elle admet un minimum, que l'on note m_f .
On définit de même m_g , le minimum de g .
2. On note f_1 et f_2 les restrictions respectives de f à $]0, \alpha/\beta]$ et à $[\alpha/\beta, +\infty[$. On note g_1 et g_2 les restrictions respectives de g à $]0, a/b]$ et à $[a/b, +\infty[$. Montrer que f_1 définit une bijection de $]0, \alpha/\beta]$ dans un ensemble que l'on précisera. Énoncer des résultats analogues pour f_2, g_1 et g_2 .
3. Montrer que F possède un minimum et préciser l'ensemble des points en lesquels celui-ci est atteint. On notera m_F le minimum de F .

Partie II. Étude des lignes de niveau de F

Pour tout réel c , on définit $\Gamma_c = \{(x, y) \in]0, +\infty[^2 : F(x, y) = c\}$. On se propose d'étudier la forme de sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé.

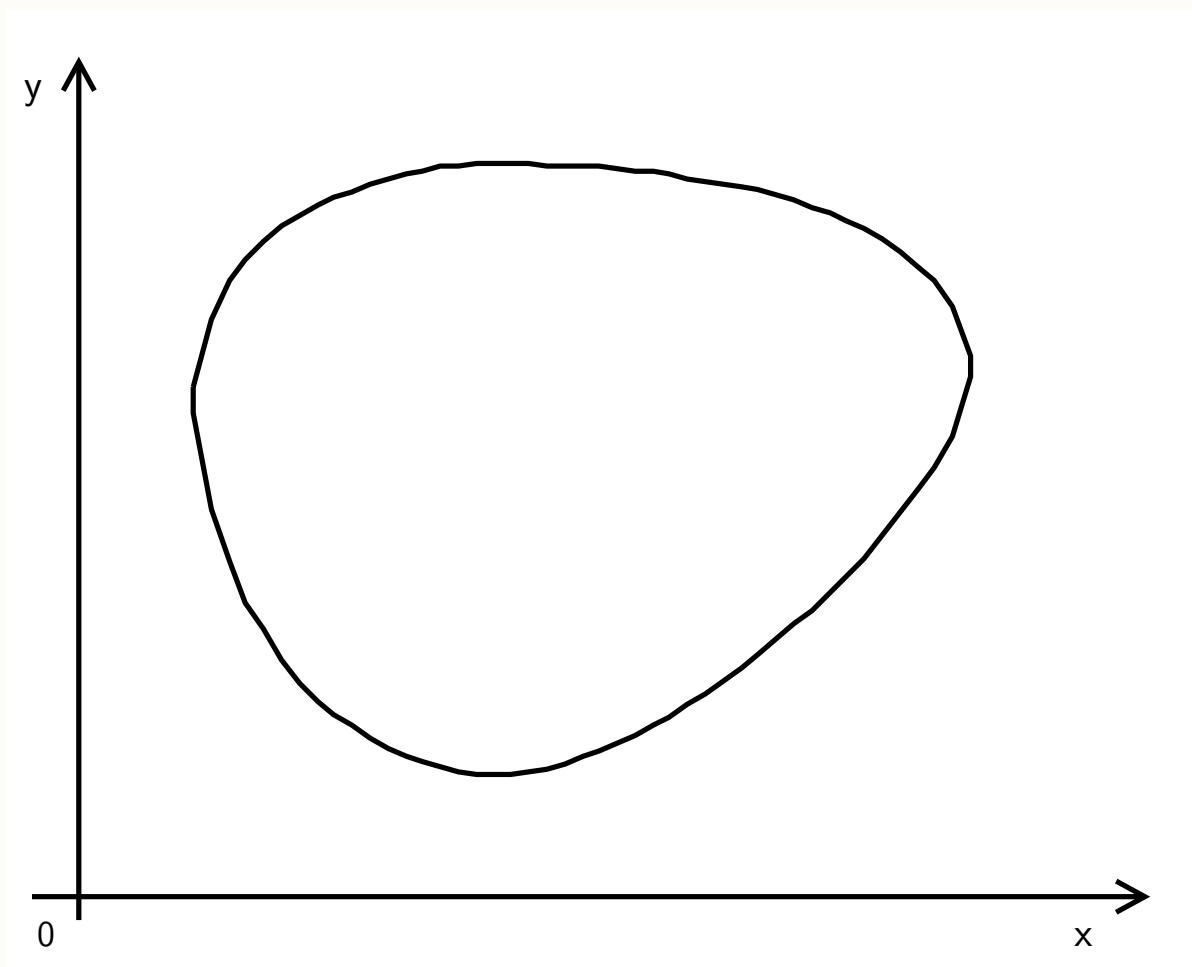
1. Préciser Γ_c lorsque $c < m_F$ et lorsque $c = m_F$.

Dans toute la question 2, on suppose $c > m_F$.

2. (a) Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs u_c et v_c tels que $u_c < \alpha/\beta < v_c$ et $m_g = c - f(u_c) = c - f(v_c)$.
2. (b) On note K_c l'ensemble des réels strictement positifs x pour lesquels il existe au moins un réel strictement positif y tel que $F(x, y) = c$. Montrer que $K_c = [u_c, v_c]$.
2. (c) Montrer que, lorsque $x \in]u_c, v_c[$, il existe exactement deux réels strictement positifs y tels que $F(x, y) = c$, et exprimer ces nombres à l'aide de f , g_1^{-1} et g_2^{-1} . Préciser l'ensemble $\{y > 0 : F(x, y) = c\}$ lorsque $x = u_c$, puis lorsque $x = v_c$.
2. (d) Montrer qu'il existe deux fonctions h_1 et h_2 définies sur $[u_c, v_c]$ telles que, pour tout $x \in [u_c, v_c]$, $h_1(x) \leq a/b \leq h_2(x)$ et

$$\Gamma_c = \{(x, h_1(x)) : x \in [u_c, v_c]\} \cup \{(x, h_2(x)) : x \in [u_c, v_c]\}.$$

Justifier la représentation de Γ_c ci-dessous. Préciser les positions des tangentes éventuelles aux points d'abscisses u_c , α/β et v_c .



Partie III. Étude du cas discret

Dans cette partie, Δ est un réel strictement positif et n un entier strictement positif; on pose $\delta = \Delta/n$. On considère deux suites de nombres réels strictement positifs $(S_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$ telles que, pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} = \delta(a - bR_k), \quad \frac{R_{k+1} - R_k}{R_k} = \delta(-\alpha + \beta S_k).$$

On pose $m = \min_{0 \leq k \leq n} S_k$, $M = \max_{0 \leq k \leq n} S_k$, $\ell = \min_{0 \leq k \leq n} R_k$ et $L = \max_{0 \leq k \leq n} R_k$.

1. Écrire une fonction Python `calcul(S0, R0, alpha, beta, a, b, n, Delta)` qui renvoie le couple (S_n, R_n) obtenu à partir de $S_0 = S0$ et $R_0 = R0$ par les relations précédentes. Les arguments satisfont les hypothèses de cette partie. Les deux mises à jour à chaque étape doivent utiliser les valeurs de S_k et R_k de la même étape.

2. (a) Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, calculer $\beta(S_{k+1} - S_k) + b(R_{k+1} - R_k)$ en fonction de S_k et R_k .

2. (b) Déterminer, pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$,

$$\delta a \beta \sum_{k=0}^{p-1} S_k - \delta \alpha b \sum_{k=0}^{p-1} R_k$$

en fonction de S_p, S_0, R_p et R_0 .

2. (c) Montrer que, pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$,

$$\alpha \sum_{k=0}^{p-1} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} + a \sum_{k=0}^{p-1} \frac{R_{k+1} - R_k}{R_k} = \beta(S_p - S_0) + b(R_p - R_0).$$

3. (a) Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\left| \ln S_{k+1} - \ln S_k - \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} \right| \leq \frac{(S_{k+1} - S_k)^2}{2m^2}.$$

3. (b) En déduire que, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\left| \ln S_{k+1} - \ln S_k - \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} \right| \leq \frac{\Delta^2 M^2 (a + bL)^2}{2m^2 n^2}.$$

3. (c) Montrer que, pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$,

$$\left| \ln S_p - \ln S_0 - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} \right| \leq \frac{\Delta^2 M^2 (a + bL)^2}{2m^2 n}.$$

4. On pose $c = -\alpha \ln S_0 + \beta S_0 - a \ln R_0 + b R_0$. Déterminer un réel A , s'exprimant à l'aide de $\alpha, \beta, a, b, \Delta, m, M, \ell$ et L , tel que, pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$,

$$|-\alpha \ln S_p + \beta S_p - a \ln R_p + b R_p - c| \leq \frac{A}{n}.$$

Partie IV. Étude du cas continu

Dans cette partie, S et R sont définies sur $[0, +\infty[$, de classe C^1 sur cet intervalle et à valeurs strictement positives. On suppose qu'elles vérifient les relations $(\mathcal{E})$:

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{S'(t)}{S(t)} = a - bR(t), \quad \frac{R'(t)}{R(t)} = -\alpha + \beta S(t).$$

Les notations S' et R' désignent les dérivées de S et de R . Le plan est toujours muni d'un repère orthonormé.

1. (a) Montrer qu'il existe un réel c tel que, pour tout $t \geq 0$, le point de coordonnées $(S(t), R(t))$ appartient à Γ_c , introduit dans la partie II.

1. (b) En déduire que S et R sont bornées.

1. (c) Que peut-on dire des fonctions S et R si $c = m_F$?

Pour l'étude des fonctions S et R dans la suite de cette partie, on suppose $c > m_F$.

2. Soit $\theta \geq 0$. On suppose que S' ne s'annule pas sur $[\theta, +\infty[$.

2. (a) Montrer que S admet une limite finie en $+\infty$ et que cette limite est strictement positive.

2. (b) Montrer qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que R' ne s'annule pas sur $[\lambda, +\infty[$. Que peut-on en déduire pour R ?

2. (c) Montrer que S' admet une limite en $+\infty$, puis que cette limite est nulle en considérant la nature de l'intégrale $\int_{\theta}^{+\infty} S'(t) dt$.

2. (d) Montrer également que $\lim_{t \rightarrow +\infty} R'(t) = 0$.

2. (e) En considérant les limites de S et de R en $+\infty$, montrer qu'on arrive à une contradiction. En déduire que S' s'annule en une infinité de points.
3. On considère deux réels $\tau_1, \tau_2 \geq 0$, distincts, tels que $S'(\tau_1) = S'(\tau_2) = 0$, et on suppose $\tau_1 < \tau_2$.
 3. (a) Montrer qu'il existe $\theta \in]\tau_1, \tau_2[$ tel que $R'(\theta) = 0$.
 3. (b) En considérant les valeurs de S en θ et τ_1 , montrer qu'il existe un réel $\mu > 0$, indépendant de τ_1 et τ_2 , tel que $|S(\theta) - S(\tau_1)| \geq \mu$.
 3. (c) Montrer que S' est bornée sur $[0, +\infty[$.
 3. (d) Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$, indépendant de τ_1 et τ_2 , tel que $|\tau_2 - \tau_1| > \eta$.
 4. (a) Montrer qu'on peut trouver trois réels $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \geq 0$ tels que $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ et $S'(\theta_1) = S'(\theta_2) = S'(\theta_3) = 0$.
 4. (b) Montrer que S' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur $[0, \theta_3]$.
 4. (c) En déduire qu'il existe trois réels t_1, t_2, t_3 tels que $0 \leq t_1 < t_2 < t_3$ et, pour tout $t \in [t_1, t_3]$, $S'(t) = 0 \iff t \in \{t_1, t_2, t_3\}$.
 5. Montrer que S' est de signe constant sur $]t_1, t_2[$ et sur $]t_2, t_3[$, et que les signes respectifs de S' sur ces deux intervalles sont opposés. On pourra considérer les valeurs de R en t_1, t_2, t_3 .

Dans la suite, on suppose que S' est positive sur $]t_1, t_2[$ et donc négative sur $]t_2, t_3[$.

6. (a) Montrer que $S(t_1) = S(t_3) = u_c$ et $S(t_2) = v_c$.
6. (b) Déterminer $R(t_1)$ et $R(t_3)$.

7. (a) Sur un même tableau de variation, faire apparaître les variations de S et de R sur $[t_1, t_3]$.
7. (b) En déduire le sens de déplacement du point $M_t = (S(t), R(t))$ sur la représentation graphique de Γ_c lorsque t décrit $[t_1, t_3]$.
8. On admet que si (S_1, R_1) et (S_2, R_2) sont deux couples de fonctions définies sur $[0, +\infty[$, de classe C^1 et à valeurs strictement positives, vérifiant les relations $(\mathcal{E})$, et s'il existe $t_0 \geq 0$ tel que $S_1(t_0) = S_2(t_0)$ et $R_1(t_0) = R_2(t_0)$, alors $S_1(t) = S_2(t)$ et $R_1(t) = R_2(t)$ pour tout $t \geq 0$.

Montrer que S et R sont périodiques de période $T = t_3 - t_1$.

9. Soit $u \geq 0$.

9. (a) Calculer $\int_u^{u+T} \frac{S'(t)}{S(t)} dt$.

9. (b) En déduire la valeur moyenne de R sur $[u, u+T]$, c'est-à-dire $\frac{1}{T} \int_u^{u+T} R(t) dt$.
Déterminer de même la valeur moyenne de S sur ce segment.

10. Dans cette question, K et H sont définies sur $[0, +\infty[$, de classe C^1 et à valeurs strictement positives. Soit $\varepsilon \in]0, a[$. On suppose qu'elles vérifient les relations $(\mathcal{E}')$:

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{K'(t)}{K(t)} = a - \varepsilon - bH(t), \quad \frac{H'(t)}{H(t)} = -\alpha - \varepsilon + \beta K(t).$$

Les notations K' et H' désignent leurs dérivées. Montrer qu'il existe $\Theta > 0$ tel que K et H sont périodiques de période Θ , et déterminer leurs valeurs moyennes sur un segment de longueur Θ .

Partie V. Le contexte historique du modèle de Vito Volterra

On peut voir dans les calculs précédents une représentation de l'évolution d'une population d'individus de deux types : les proies et les prédateurs. Ceux-ci se nourrissent uniquement de celles-là, et celles-là d'une autre nourriture disponible en abondance. Les proies, en l'absence de prédateurs, se développeraient de façon exponentielle, mais cette croissance est réduite par la présence des prédateurs. Le nombre de prédateurs, en l'absence de proies, décroîtrait de manière exponentielle : sans proies, ils finiraient par disparaître. Cette décroissance est compensée par la présence des proies.

Supposons que cette population soit une population de poissons constituée de proies et de prédateurs d'effectifs relatifs $K(t)$ et $H(t)$ à l'instant t , les fonctions introduites en IV.10. La constante ε des relations $(\mathcal{E}')$ représente un taux de pêche identique pour les proies et les prédateurs.

Au cours de la Première Guerre mondiale, on a pu constater, dans l'Adriatique, qu'une diminution de la pêche était défavorable aux proies.

Montrer que les calculs de la question IV.10 expliquent directement le phénomène observé.