



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2001

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Rappels et conventions utilisés dans tout le corrigé.

Une variable exponentielle d'espérance $m > 0$ a pour densité $x \mapsto \frac{1}{m}e^{-x/m}$ sur $]0, +\infty[$ (nulle ailleurs), pour espérance m et pour variance m^2 ; sa fonction de répartition vaut $1 - e^{-x/m}$ pour $x \geq 0$ et 0 pour $x < 0$. Ainsi $E(\Delta_i) = \mathbf{V}(\Delta_i) = 1$, $E(C_i) = c$ et $\mathbf{V}(C_i) = c^2$.

Pour tout $i \geq 1$, on note $L_i = C_i - r\Delta_i$ (pour un réel $r > 0$ fixé à partir de la partie II). Par le lemme des coalitions, les variables $L_1, L_2, \dots$ sont mutuellement indépendantes, puisque L_i ne dépend que du couple (C_i, Δ_i) et que ces couples sont formés de variables distinctes de la famille indépendante (Δ_n, C_n) . Elles ont toutes la même loi, car la loi de $C_i - r\Delta_i$ ne dépend que des lois de C_i et Δ_i (variables indépendantes), qui ne dépendent pas de i .

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

1) On utilise la linéarité de l'espérance et, pour la variance, l'indépendance des Δ_i .

Pour $n = 0$, $T_0 = 0$ est constante : $E(T_0) = 0$ et $\mathbf{V}(T_0) = 0$.

Pour $n \geq 1$, chaque Δ_i admet une espérance et une variance égales à 1. Par linéarité,

$$E(T_n) = \sum_{i=1}^n E(\Delta_i) = n.$$

Les variables $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ étant indépendantes, la variance de leur somme est la somme de leurs variances :

$$\mathbf{V}(T_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(\Delta_i) = n.$$

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(T_n) = n$ et $V(T_n) = n$.

2) a) Soit $n > t$ et $\omega \in [T_n < t]$. Alors $n - T_n(\omega) > n - t > 0$, donc

$$|T_n(\omega) - n| = n - T_n(\omega) \geq n - t.$$

Conclusion

pour $n > t$, $[T_n < t] \subset [|T_n - n| \geq n - t]$.

b) Pour $n > t$, $n - t > 0$ et T_n admet une variance; l'inclusion de a), la croissance de P et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donnent :

$$0 \leq P([T_n < t]) \leq P(|T_n - E(T_n)| \geq n - t) \leq \frac{V(T_n)}{(n - t)^2} = \frac{n}{(n - t)^2}$$

Or $\frac{n}{(n - t)^2} \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Par encadrement :

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P([T_n < t]) = 0.$$

c) L'intersection $\bigcap_{k=1}^{+\infty} [T_k < t]$ est un événement (intersection dénombrable d'événements). Pour tout $n \geq 1$, elle est contenue dans $[T_n < t]$, donc :

$$0 \leq P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [T_k < t]\right) \leq P([T_n < t])$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant b), on obtient que cette probabilité est nulle.

Conclusion

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [T_k < t]\right) = 0.$$

- 3) On décrit les événements $[N(t) = n]$ à l'aide des variables T_k , puis on calcule $P([N(t) = 0])$.

Comme les Δ_i sont strictement positives, la suite $(T_k(\omega))_k$ est strictement croissante pour tout ω . L'ensemble $A_\omega = \{k \in \mathbb{N}; T_k(\omega) \leq t\}$ contient 0 car $T_0 = 0 \leq t$, et si $k \in A_\omega$ alors $\{0, \dots, k\} \subset A_\omega$. Donc A_ω est soit de la forme $\{0, 1, \dots, m\}$, soit égal à $\mathbb{N}$, et il est infini si et seulement si $T_k(\omega) \leq t$ pour tout k .

Justification de l'observation. Soit $n \geq 1$. Si $T_n(\omega) \leq t < T_{n+1}(\omega)$, alors par stricte croissance $A_\omega = \{0, \dots, n\}$, donc $N(t)(\omega) = n$. Réciproquement, si $N(t)(\omega) = n \geq 1$, alors A_ω est fini (sinon $N(t)(\omega)$ vaudrait 0) et de plus grand élément n , donc $T_n(\omega) \leq t$ et $T_{n+1}(\omega) > t$.

$N(t)$ est une variable aléatoire. Elle prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n \geq 1$, $[N(t) = n] = [T_n \leq t] \cap [T_{n+1} > t]$ est un événement, car T_n et T_{n+1} sont des variables aléatoires réelles (sommes de variables aléatoires). Ensuite $[N(t) = 0]$ est le complémentaire de la réunion dénombrable $\bigcup_{n \geq 1} [N(t) = n]$, donc c'est aussi un événement. Pour tout réel x , $[N(t) \leq x]$ est la réunion (finie ou vide) des $[N(t) = n]$ pour $n \leq x$, donc un événement. Ainsi $N(t)$ est une variable aléatoire réelle discrète.

Calcul de $P([N(t) = 0])$. On a $N(t)(\omega) = 0$ si et seulement si $A_\omega = \{0\}$, c'est-à-dire $T_1(\omega) > t$, ou A_ω est infini. Donc :

$$[N(t) = 0] = [T_1 > t] \cup D \text{ où } D = \bigcap_{k=1}^{+\infty} [T_k \leq t]$$

et cette réunion est disjointe. Or $D \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} [T_k < t + 1]$, événement de probabilité nulle d'après 2) c) appliqué au réel $t + 1 \geq 0$. Donc $P(D) = 0$ et

$$P([N(t) = 0]) = P([T_1 > t]) + P(D) = P([T_1 > t]).$$

Conclusion

$N(t)$ est une variable aléatoire réelle et $P([N(t) = 0]) = P([T_1 > t])$. On retiendra aussi que l'événement D est négligeable.

- 4) a) D'après le cours, une variable exponentielle d'espérance 1 suit la loi $\gamma(1)$, et la somme de n variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1 suit la loi gamma de paramètre de forme n et de taux 1, notée $\gamma(n)$. Les Δ_i étant indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1 :

Conclusion

T_n suit la loi $\gamma(n)$, de densité $x \mapsto \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!}$ sur $]0, +\infty[$ et nulle sur $] - \infty, 0]$.

- b) Soit $t > 0$ et $n \geq 1$.

Méthode 1 — Formule de Taylor avec reste intégral.

La fonction exp est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et toutes ses dérivées sont égales à exp. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et t donne :

$$e^t = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} + \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} e^u du$$

En multipliant par e^{-t} :

$$1 = \sum_{k=0}^n \frac{t^k e^{-t}}{k!} + e^{-t} \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} e^u du$$

Méthode 2 — Récurrence et intégration par parties.

Notons $R_n = e^{-t} \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} e^u du$ pour $n \geq 0$. Pour $n = 0$: $R_0 = e^{-t}(e^t - 1) = 1 - e^{-t}$, donc $1 = e^{-t} + R_0$. Pour $n \geq 1$, une intégration par parties sur le segment $[0, t]$, avec $u \mapsto -\frac{(t-u)^n}{n!}$ de dérivée $u \mapsto \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}$ et $u \mapsto e^u$, toutes deux de classe C^1 :

$$\int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} e^u du = \left[-\frac{(t-u)^n}{n!} e^u \right]_0^t + \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} e^u du = \frac{t^n}{n!} + \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} e^u du$$

donc $R_{n-1} = \frac{t^n e^{-t}}{n!} + R_n$. Par récurrence, si

$$1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k e^{-t}}{k!} + R_{n-1},$$

alors

$$1 = \sum_{k=0}^n \frac{t^k e^{-t}}{k!} + R_n.$$

La méthode 1 reconnaît directement une formule du cours ; la méthode 2 la redémontre dans ce cas particulier et montre d'où vient chaque terme de la somme.

Déduction de la loi de $N(t)$. Avec l'événement négligeable D de la question 3), montrons que $[N(t) \geq n+1] = [T_{n+1} \leq t] \setminus D$. Si $N(t)(\omega) = m \geq n+1$, alors A_ω est fini, $\omega \notin D$, et $T_{n+1}(\omega) \leq T_m(\omega) \leq t$. Réciproquement, si $T_{n+1}(\omega) \leq t$ et $\omega \notin D$, alors A_ω est fini et contient $n+1$, donc $N(t)(\omega) \geq n+1$. Comme $P(D) = 0$:

$$P([N(t) \leq n]) = 1 - P([N(t) \geq n+1]) = 1 - P([T_{n+1} \leq t])$$

D'après a), $P([T_{n+1} \leq t]) = \int_0^t \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx$. Le changement de variable affine $x = t - u$ donne :

$$P([T_{n+1} \leq t]) = \int_0^t \frac{(t-u)^n e^{u-t}}{n!} du = e^{-t} \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} e^u du$$

et l'égalité établie plus haut donne :

Conclusion

pour tout $n \geq 1$,

$$P([N(t) \leq n]) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k e^{-t}}{k!}.$$

c) Cas $t > 0$. D'après 3), $P([N(t) = 0]) = P([T_1 > t]) = e^{-t}$, et la formule de b) est donc aussi vraie pour $n = 0$. Pour $n \geq 1$, comme $N(t)$ est à valeurs entières :

$$P([N(t) = n]) = P([N(t) \leq n]) - P([N(t) \leq n-1]) = \frac{t^n e^{-t}}{n!}$$

Donc $N(t)$ suit la loi de Poisson de paramètre t .

Cas $t = 0$. $P([N(0) = 0]) = P([T_1 > 0]) = 1$ car $T_1 = \Delta_1 > 0$: $N(0)$ est presque sûrement nulle (loi certaine égale à 0, qui prolonge la loi de Poisson au paramètre 0).

Conclusion

pour $t > 0$, $N(t)$ suit la loi de Poisson de paramètre t ; pour $t = 0$, $N(0) = 0$ presque sûrement.

Partie II : Étude de la probabilité d'être en déficit après le premier ou le second sinistre

Préliminaire. Pour $n \geq 1$, on a $N(T_n) = n$ pour tout ω : en effet $T_n \leq T_n < T_{n+1}$ (stricte croissance), donc l'observation de I.3) s'applique avec $t = T_n(\omega)$. Ainsi $K(T_1) = a + rT_1 - C_1 = a - L_1$ et $K(T_2) = a + r(\Delta_1 + \Delta_2) - C_1 - C_2 = a - L_1 - L_2$.

- 1) a) Notons $Y = -r\Delta_1$ et F_Y sa fonction de répartition. Comme $\Delta_1 > 0$, $Y < 0$, donc $F_Y(x) = 1$ pour $x \geq 0$. Pour $x < 0$, comme $r > 0$:

$$F_Y(x) = P([\Delta_1 \geq -\frac{x}{r}]) = e^{x/r}$$

La fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ (en $0 : e^{x/r} \rightarrow 1$) et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, donc Y est à densité, et une densité s'obtient en dérivant F_Y là où c'est possible.

Conclusion

une densité de $-r\Delta_1$ est $f_Y : x \mapsto \frac{1}{r}e^{x/r}$ si $x < 0$, $f_Y(x) = 0$ si $x \geq 0$.

- b) Les variables C_1 et $Y = -r\Delta_1$ sont indépendantes (fonctions de variables indépendantes) et à densité. On applique le théorème de convolution : si la fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_C(y)f_Y(x-y) dy$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, c'est une densité de $C_1 + Y$, où f_C désigne la densité de C_1 .

Soit $x \in \mathbb{R}$. Le produit $f_C(y)f_Y(x-y)$ est non nul si et seulement si $y > 0$ et $x-y < 0$, c'est-à-dire $y > m$ avec $m = \max(0, x)$. Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_C(y)f_Y(x-y) dy = \int_m^{+\infty} \frac{1}{c}e^{-y/c} \cdot \frac{1}{r}e^{(x-y)/r} dy = \frac{e^{x/r}}{cr} \int_m^{+\infty} e^{-y\frac{c+r}{cr}} dy$$

car $\frac{1}{c} + \frac{1}{r} = \frac{c+r}{cr} > 0$. L'intégrale converge et vaut $\frac{cr}{c+r}e^{-m\frac{c+r}{cr}}$. Donc :

$$\text{si } x \leq 0 \ (m = 0) : \frac{1}{c+r} e^{x/r};$$

$$\text{si } x > 0 \ (m = x) : \frac{1}{c+r} e^{x/r - x/c - x/r} = \frac{1}{c+r} e^{-x/c}.$$

Cette fonction est continue sur $] -\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$, et ses deux expressions tendent vers $\frac{1}{c+r}$ en 0 : elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Conclusion

L_1 admet la densité continue f définie par $f(x) = \frac{1}{c+r} e^{x/r}$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \frac{1}{c+r} e^{-x/c}$ si $x > 0$.

c) Pour $x \leq 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{u/r}}{c+r} du = \frac{r}{c+r} e^{x/r}$$

(intégrale convergente car $e^{u/r} \rightarrow 0$ en $-\infty$). Pour $x > 0$:

$$F(x) = F(0) + \int_0^x \frac{e^{-u/c}}{c+r} du = \frac{r}{c+r} + \frac{c}{c+r} (1 - e^{-x/c}) = 1 - \frac{c}{c+r} e^{-x/c}$$

D'après le préliminaire, $[K(T_1) < 0] = [L_1 > a]$, donc $P([K(T_1) < 0]) = 1 - F(a)$.

Conclusion

$F(x) = \frac{r}{c+r} e^{x/r}$ pour $x \leq 0$, $F(x) = 1 - \frac{c}{c+r} e^{-x/c}$ pour $x > 0$, et $P([K(T_1) < 0]) = 1 - \frac{r}{c+r} \exp\left(\frac{a}{r}\right)$ si $a \leq 0$, $P([K(T_1) < 0]) = \frac{c}{c+r} \exp\left(\frac{-a}{c}\right)$ si $a > 0$.

2) a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. L'événement $[L_1 \leq x + h]$ est la réunion disjointe de $[L_1 \leq x]$ et de $[x < L_1 \leq x + h]$, donc :

$$g(x+h) - g(x) = P([x < L_1 \leq x+h] \cap [L_1 + L_2 \leq a])$$

Sur $[x < L_1 \leq x+h]$: si $L_2 \leq a - x - h$, alors $L_1 + L_2 \leq x+h + a - x - h = a$; si $L_1 + L_2 \leq a$, alors $L_2 \leq a - L_1 < a - x$. D'où les inclusions :

$$[x < L_1 \leq x+h] \cap [L_2 \leq a - x - h] \subset [x < L_1 \leq x+h] \cap [L_1 + L_2 \leq a]$$

$$\subset [x < L_1 \leq x+h] \cap [L_2 < a - x]$$

Les variables L_1 et L_2 étant indépendantes, la probabilité de chaque intersection extrême est le produit des probabilités.

Conclusion

$$\begin{aligned} P([x < L_1 \leq x+h]) P([L_2 \leq a - x - h]) &\leq g(x+h) - g(x) \\ &\leq P([x < L_1 \leq x+h]) P([L_2 < a - x]). \end{aligned}$$

b) Comme L_2 a la même loi que L_1 , qui est à densité :

$P([L_2 \leq a - x - h]) = F(a - x - h)$ et $P([L_2 < a - x]) = F(a - x)$. En divisant par $h > 0$:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} F(a - x - h) \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} F(a - x)$$

La densité f étant continue sur $\mathbb{R}$, F est de classe C^1 avec $F' = f$, donc

$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \rightarrow f(x)$ quand $h \rightarrow 0^+$; et $F(a - x - h) \rightarrow F(a - x)$ par continuité de F . Les deux membres extrêmes tendent vers $f(x)F(a - x)$ et, par encadrement :

Conclusion

g est dérivable à droite en tout réel x et $g'_d(x) = f(x)F(a - x)$.

Le résultat qui suit dans l'énoncé (dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = f(x)F(a - x)$) est admis et utilisé en 3) b).

- 3) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $B_n = [-n < L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a]$. La suite d'événements (B_n) est croissante pour l'inclusion et sa réunion est $[L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a]$, car tout réel est strictement supérieur à $-n$ pour n assez grand. Le théorème de continuité monotone donne :

Conclusion

$$P([L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P([-n < L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a]).$$

- b) Comme en 2) a), $P(B_n) = g(a) - g(-n)$ (réunion disjointe $[L_1 \leq a] = [L_1 \leq -n] \cup [-n < L_1 \leq a]$ pour $n \geq -a$). D'après le résultat admis, g est dérivable de dérivée $x \mapsto f(x)F(a - x)$, qui est continue ; g est donc de classe C^1 et, par le théorème fondamental de l'analyse :

$$P(B_n) = g(a) - g(-n) = \int_{-n}^a f(x)F(a - x) dx$$

La fonction $x \mapsto f(x)F(a - x)$ est continue, positive et majorée par f , dont l'intégrale sur $]-\infty, a]$ converge. Par comparaison, $\int_{-n}^a f(x)F(a - x) dx$ converge, et sa valeur est la limite de $\int_{-n}^a f(x)F(a - x) dx$ quand $n \rightarrow +\infty$. Avec a) :

Conclusion

$$P([L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a]) = \int_{-\infty}^a f(x)F(a-x) dx.$$

c) D'après le préliminaire, $[K(T_1) < 0] = [L_1 > a]$ et $[K(T_2) < 0] = [L_1 + L_2 > a]$.

Première égalité. Le complémentaire de $[K(T_1) < 0] \cup [K(T_2) < 0]$ est $[L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a]$, donc d'après 3) b) :

$$P([K(T_1) < 0] \cup [K(T_2) < 0]) = 1 - \int_{-\infty}^a f(x)F(a-x) dx$$

Seconde égalité. La réunion est disjointe : $[L_1 > a] \cup ([L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 > a])$. Donc :

$$\begin{aligned} P([K(T_1) < 0] \cup [K(T_2) < 0]) &= P([L_1 > a]) + P([L_1 \leq a]) \\ &\quad - P([L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a]) \end{aligned}$$

Or $P([L_1 \leq a]) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$. Par linéarité des intégrales convergentes :

$$\begin{aligned} P([L_1 \leq a]) - \int_{-\infty}^a f(x)F(a-x) dx &= \int_{-\infty}^a f(x)(1 - F(a-x)) dx \\ &= \int_{-\infty}^a f(x) P([L_2 > a-x]) dx \end{aligned}$$

car L_2 a pour fonction de répartition F .

Conclusion

les deux égalités demandées sont établies.

4) Soit $a \geq 0$. On utilise la seconde égalité de 3) c).

Pour $x < a$, on a $a - x > 0$, donc d'après 1) c),

$P([L_2 > a - x]) = 1 - F(a - x) = \frac{c}{c+r} e^{-(a-x)/c}$ (la valeur en $x = a$ n'affecte pas l'intégrale). Donc :

$$\int_{-\infty}^a f(x) P([L_2 > a - x]) dx = \frac{c}{c+r} e^{-a/c} \int_{-\infty}^a f(x) e^{x/c} dx$$

On découpe en 0 (car $a \geq 0$). D'une part, comme $\frac{1}{r} + \frac{1}{c} = \frac{c+r}{rc}$:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{x/r} e^{x/c}}{c+r} dx = \frac{1}{c+r} \cdot \frac{rc}{c+r} = \frac{rc}{(c+r)^2}$$

D'autre part :

$$\int_0^a \frac{e^{-x/c} e^{x/c}}{c+r} dx = \frac{a}{c+r}$$

Enfin $P([L_1 > a]) = 1 - F(a) = \frac{c}{c+r} e^{-a/c}$ (pour $a > 0$ d'après 1) c), et pour $a = 0$ car $1 - F(0) = 1 - \frac{r}{c+r} = \frac{c}{c+r}$). En additionnant :

$$P([K(T_1) < 0] \cup [K(T_2) < 0]) = \frac{c}{c+r} e^{-a/c} + \frac{c}{c+r} e^{-a/c} \left(\frac{a}{c+r} + \frac{rc}{(c+r)^2} \right)$$

Conclusion

pour $a \geq 0$,

$$P([K(T_1) < 0] \cup [K(T_2) < 0]) = \frac{c}{c+r} \left(1 + \frac{a}{c+r} + \frac{rc}{(c+r)^2} \right) \exp\left(\frac{-a}{c}\right).$$

Partie III : Étude de la probabilité d'être en déficit au cours du temps : deux premiers cas

Préliminaire. Pour $n \geq 1$, d'après le préliminaire de la partie II,

$$K_a(T_n) = a + r \sum_{i=1}^n \Delta_i - \sum_{i=1}^n C_i = a - \sum_{i=1}^n L_i,$$

et $K_a(T_0) = a$. La réunion dénombrable $\bigcup_{n \geq 0} [K_a(T_n) < 0]$ est un événement, donc $\Pi(a)$ est bien défini.

- 1) Soit $a \leq b$. Pour tout n , $K_a(T_n) = K_b(T_n) - (b - a) \leq K_b(T_n)$, donc $[K_b(T_n) < 0] \subset [K_a(T_n) < 0]$. En prenant la réunion sur n , puis par croissance de P :

$$\Pi(b) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [K_b(T_n) < 0]\right) \leq P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [K_a(T_n) < 0]\right) = \Pi(a)$$

Conclusion

Π est décroissante sur $\mathbb{R}$.

- 2) L'événement $\bigcup_{n \geq 0} [K_a(T_n) < 0]$ contient $[K_a(T_1) < 0]$ et $[K_a(T_1) < 0] \cup [K_a(T_2) < 0]$, donc $\Pi(a)$ majore les probabilités calculées en partie II.

Si $a < 0$, on sait déjà que $\Pi(a) = 1$ (et la partie II donne la minoration

$$\Pi(a) \geq 1 - \frac{r}{c+r} e^{a/r}.$$

Si $a \geq 0$, la partie II donne :

$$\Pi(a) \geq \frac{c}{c+r} e^{-a/c} \text{ et } \Pi(a) \geq \frac{c}{c+r} \left(1 + \frac{a}{c+r} + \frac{rc}{(c+r)^2} \right) e^{-a/c}$$

La seconde minoration est la meilleure, car le facteur entre parenthèses est supérieur à 1.

Conclusion

$$\text{pour } a \geq 0, \quad \Pi(a) \geq \frac{c}{c+r} \left(1 + \frac{a}{c+r} + \frac{rc}{(c+r)^2} \right) \exp\left(\frac{-a}{c}\right), \text{ ce qui améliore } \Pi(a) \geq \frac{c}{c+r} \exp\left(\frac{-a}{c}\right).$$

3) Résultat admis dans l'énoncé ; seule une justification intuitive est demandée.

On raisonne sur le premier sinistre, qui survient à la date T_1 et après lequel le capital vaut $K_a(T_1) = a - L_1$:

- si $L_1 > a$, la compagnie est en déficit dès le premier sinistre, ce qui se produit avec la probabilité $P([L_1 > a])$;
- sinon, L_1 prend une valeur $x \leq a$ (avec la « densité » $f(x)$) et le capital après le premier sinistre vaut $a - x \geq 0$. Pour $n \geq 2$,

$$K_a(T_n) = (a - x) - \sum_{i=2}^n L_i :$$

la suite des capitaux après les sinistres suivants est construite à partir des $L_2, L_3, \dots$, indépendantes de L_1 et de même loi que $L_1, L_2, \dots$. Tout se passe comme si le processus recommençait avec le capital initial $a - x$, d'où une probabilité de déficit ultérieur égale à $\Pi(a - x)$.

En « sommant » sur les valeurs possibles $x \leq a$ de L_1 , comme dans une formule des probabilités totales, on obtient $\Pi(a) = P([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^a f(x) \Pi(a - x) dx$. C'est exactement la démarche de 3) c) dans la partie II, où $P([L_2 > a - x])$ est remplacé par $\Pi(a - x)$.

Conclusion

l'égalité traduit une décomposition selon le résultat du premier sinistre, le processus «repartant à neuf» après celui-ci. Elle est admise et sera utilisée en partie IV.

4) a) D'après le préliminaire et la partie I,

$$K_a(T_n) = a + rT_n - \sum_{i=1}^n C_i$$

admet une espérance et, par linéarité :

$$E(K_a(T_n)) = a + rn - nc = a + n(r - c)$$

(formule encore vraie pour $n = 0$). Quand $n \rightarrow +\infty$: si $r > c$, la limite est $+\infty$; si $r = c$, l'espérance est constante égale à a ; si $r < c$, la limite est $-\infty$.

Conclusion

$E(K_a(T_n)) = a + n(r - c)$, de limite $+\infty$ si $c < r$, a si $c = r$, $-\infty$ si $c > r$.

b) On a

$$K_a(T_n) = a - \sum_{i=1}^n L_i,$$

où les L_i sont indépendantes. Chaque $L_i = C_i - r\Delta_i$ admet une variance et, C_i et Δ_i étant indépendantes, $\mathbf{V}(L_i) = \mathbf{V}(C_i) + r^2\mathbf{V}(\Delta_i) = c^2 + r^2$. La variance d'une somme de variables indépendantes est la somme des variances, et une constante additive ne change pas la variance :

Conclusion

$$\mathbf{V}(K_a(T_n)) = n(c^2 + r^2).$$

- 5) a) Soit $n > \frac{a}{c-r}$ (ici $c-r > 0$). Alors $m_n = E(K_a(T_n)) = a + nr - nc < 0$. Si $K_a(T_n) \geq 0$, alors $K_a(T_n) - m_n \geq -m_n > 0$, donc :

$$[K_a(T_n) \geq 0] \subset [|K_a(T_n) - m_n| \geq -m_n]$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $-m_n > 0$:

$$P([K_a(T_n) \geq 0]) \leq \frac{\mathbf{V}(K_a(T_n))}{m_n^2} = \frac{n(c^2 + r^2)}{(a + nr - nc)^2}$$

En passant au complémentaire :

Conclusion

$$\text{pour } n > \frac{a}{c-r}, \quad P([K_a(T_n) < 0]) \geq 1 - \frac{n(c^2 + r^2)}{(a + nr - nc)^2}.$$

- b) Pour tout n , $[K_a(T_n) < 0] \subset \bigcup_{k \geq 0} [K_a(T_k) < 0]$, donc $\Pi(a) \geq P([K_a(T_n) < 0])$. Avec a), pour $n > \frac{a}{c-r}$:

$$1 \geq \Pi(a) \geq 1 - \frac{n(c^2 + r^2)}{(a - n(c-r))^2}$$

Or $(a - n(c-r))^2 \sim n^2(c-r)^2$, donc $\frac{n(c^2 + r^2)}{(a - n(c-r))^2} \sim \frac{c^2 + r^2}{n(c-r)^2} \rightarrow 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'encadrement, $\Pi(a) \geq 1$.

Conclusion

si $c > r$, $\Pi(a) = 1$ pour tout $a \geq 0$ (et aussi pour $a < 0$).

6) a) La formule

$$K_a(T_n) = a - \sum_{i=1}^n (C_i - r\Delta_i)$$

a été établie dans le préliminaire. Posons

$$S_n = \sum_{i=1}^n L_i.$$

Les L_i sont indépendantes, de même loi, d'espérance $c - r = 0$ et de variance $\sigma^2 = c^2 + r^2 = 2c^2 > 0$. Le théorème de la limite centrée affirme que $Z_n = \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable normale centrée réduite : pour tout réel z , $P([Z_n \leq z]) \rightarrow \Phi(z)$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (continue partout).

Soit $y \in \mathbb{R}$ et $z = -\frac{y}{\sigma}$. Alors :

$$P([K_a(T_n) \leq a + y\sqrt{n}]) = P([-S_n \leq y\sqrt{n}]) = P([Z_n \geq z]) = 1 - P([Z_n < z])$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, $P([Z_n \leq z - \varepsilon]) \leq P([Z_n < z]) \leq P([Z_n \leq z])$. Les deux membres extrêmes tendent vers $\Phi(z - \varepsilon)$ et $\Phi(z)$, donc pour n assez grand, $\Phi(z - \varepsilon) - \varepsilon \leq P([Z_n < z]) \leq \Phi(z) + \varepsilon$. Comme Φ est continue en z , on peut choisir ε tel que $\Phi(z - \varepsilon) \geq \Phi(z) - \varepsilon$; alors $|P([Z_n < z]) - \Phi(z)| \leq 2\varepsilon$ pour n assez grand, et donc $P([Z_n < z]) \rightarrow \Phi(z)$. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P([K_a(T_n) \leq a + y\sqrt{n}]) = 1 - \Phi\left(-\frac{y}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)$$

par symétrie de la loi normale centrée réduite ($\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$).

Conclusion

$$\text{pour tout réel } y, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P([K_a(T_n) \leq a + y\sqrt{n}]) = \Phi\left(\frac{y}{c\sqrt{2}}\right).$$

- b)** Soit $y > 0$ et $n > \frac{a^2}{y^2}$, de sorte que $y\sqrt{n} > a$ (avec $a \geq 0$). Alors $a - y\sqrt{n} < 0$, donc
 $[K_a(T_n) \leq a - y\sqrt{n}] \subset [K_a(T_n) < 0]$. D'autre part $a + y\sqrt{n} > 0$, donc
 $[K_a(T_n) < 0] \subset [K_a(T_n) \leq a + y\sqrt{n}]$. La croissance de P donne :

Conclusion

$$\text{pour } n > \frac{a^2}{y^2},$$

$$P([K_a(T_n) \leq a - y\sqrt{n}]) \leq P([K_a(T_n) < 0]) \leq P([K_a(T_n) \leq a + y\sqrt{n}]).$$

- c)** Notons $p_n = P([K_a(T_n) < 0])$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme Φ est continue en 0 et $\Phi(0) = \frac{1}{2}$,
 on peut choisir $y > 0$ tel que $\Phi\left(\frac{y}{c\sqrt{2}}\right) \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$ et $\Phi\left(\frac{-y}{c\sqrt{2}}\right) \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$. D'après a),
 appliqué à y et à $-y$, il existe un rang à partir duquel :

$$P([K_a(T_n) \leq a + y\sqrt{n}]) \leq \frac{1}{2} + 2\varepsilon \text{ et } P([K_a(T_n) \leq a - y\sqrt{n}]) \geq \frac{1}{2} - 2\varepsilon$$

$$\text{Avec b), pour } n \text{ assez grand, } \frac{1}{2} - 2\varepsilon \leq p_n \leq \frac{1}{2} + 2\varepsilon. \text{ Donc } p_n \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Enfin, comme en 5) b), $\Pi(a) \geq p_n$ pour tout n ; par passage à la limite dans l'inégalité,
 $\Pi(a) \geq \frac{1}{2}$.

Conclusion

$$\text{si } c = r \text{ et } a \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P([K_a(T_n) < 0]) = \frac{1}{2} \text{ et } \Pi(a) \geq \frac{1}{2}.$$

Partie IV : Étude de la probabilité d'être en déficit au cours du temps : le dernier cas

1) a) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \geq 0$,

$$H_n(a) = \frac{c}{c+r} e^{-a/c} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k! (c+r)^k},$$

et $\mathcal{P}(n)$: « pour tout $a \geq 0$, $\Pi(a) \geq H_n(a)$ ». On utilise l'égalité admise en III.3).

Initialisation. $H_0(a) = \frac{c}{c+r} e^{-a/c}$, et pour $a \geq 0$,

$\Pi(a) \geq P([K_a(T_1) < 0]) = \frac{c}{c+r} e^{-a/c}$ d'après II.1) c) (cas $a > 0$) et II.2) (cas $a = 0$, où $1 - \frac{r}{c+r} = \frac{c}{c+r}$). Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et soit $a \geq 0$. D'après III.3) :

$$\Pi(a) = P([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^a f(x) \Pi(a-x) dx$$

La fonction intégrée est positive ; on minore l'intégrale par sa partie sur $[0, a]$. Pour $x \in [0, a]$, $a-x \geq 0$, donc par $\mathcal{P}(n)$ et l'expression de f sur $]0, +\infty[$ (la valeur en 0 n'importe pas) :

$$f(x) \Pi(a-x) \geq \frac{e^{-x/c}}{c+r} \cdot \frac{c}{c+r} e^{-(a-x)/c} \sum_{k=0}^n \frac{(a-x)^k}{k! (c+r)^k} = \frac{c}{(c+r)^2} e^{-a/c} \sum_{k=0}^n \frac{(a-x)^k}{k! (c+r)^k}$$

Comme $\int_0^a (a-x)^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$, on obtient par croissance et linéarité de l'intégrale sur un segment :

$$\int_{-\infty}^a f(x) \Pi(a-x) dx \geq \frac{c}{(c+r)^2} e^{-a/c} \sum_{k=0}^n \frac{a^{k+1}}{(k+1)! (c+r)^k} = \frac{c}{c+r} e^{-a/c} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a^k}{k! (c+r)^k}$$

Enfin $P([L_1 > a]) = \frac{c}{c+r} e^{-a/c}$ (comme ci-dessus), ce qui est le terme d'indice $k = 0$.
En additionnant, $\Pi(a) \geq H_{n+1}(a) : \mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \geq 0$,

$$\Pi(a) \geq \frac{c}{c+r} \exp\left(\frac{-a}{c}\right) \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k! (c+r)^k}.$$

b) Soit $a \geq 0$. La série exponentielle donne

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{a}{c+r}\right)^k \rightarrow \exp\left(\frac{a}{c+r}\right)$$

quand $n \rightarrow +\infty$. Par passage à la limite dans l'inégalité de a) :

$$\Pi(a) \geq \frac{c}{c+r} \exp\left(-\frac{a}{c} + \frac{a}{c+r}\right)$$

Or $\frac{1}{c} - \frac{1}{c+r} = \frac{r}{c(c+r)}.$

Conclusion

pour tout $a \geq 0$, $\Pi(a) \geq \frac{c}{c+r} \exp\left(\frac{-ar}{c(c+r)}\right).$

2) a) Soit $\lambda \in \left[0, \frac{1}{c}\right[.$

Méthode 1 — Théorème de transfert.

La variable $\exp(\lambda L_1)$ est positive ; par le théorème de transfert, elle admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} f(x) dx$ converge, et cette intégrale vaut alors l'espérance. Sur $] -\infty, 0]$, $e^{\lambda x} f(x) = \frac{1}{c+r} e^{(\lambda+1/r)x}$ avec $\lambda + \frac{1}{r} > 0$:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{(\lambda+1/r)x}}{c+r} dx = \frac{1}{(c+r)(\lambda+1/r)} = \frac{r}{(c+r)(1+r\lambda)}$$

Sur $]0, +\infty[$, $e^{\lambda x} f(x) = \frac{1}{c+r} e^{-(1/c-\lambda)x}$ avec $\frac{1}{c} - \lambda > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(1/c-\lambda)x}}{c+r} dx = \frac{1}{(c+r)(1/c-\lambda)} = \frac{c}{(c+r)(1-c\lambda)}$$

Les deux intégrales convergent, donc l'espérance existe et :

$$E(\exp(\lambda L_1)) = \frac{r(1-c\lambda) + c(1+r\lambda)}{(c+r)(1+r\lambda)(1-c\lambda)} = \frac{1}{(1+r\lambda)(1-c\lambda)}$$

Méthode 2 — Indépendance.

On a $\exp(\lambda L_1) = \exp(\lambda C_1) \exp(-r\lambda \Delta_1)$. Par transfert, $\exp(\lambda C_1)$ admet l'espérance

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda y} \frac{1}{c} e^{-y/c} dy = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1/c-\lambda} = \frac{1}{1-c\lambda} \text{ (convergente car } \lambda < \frac{1}{c}), \text{ et } \exp(-r\lambda \Delta_1),$$

bornée par 1, admet l'espérance $\int_0^{+\infty} e^{-r\lambda z} e^{-z} dz = \frac{1}{1+r\lambda}$. Ces deux variables sont indépendantes (fonctions de C_1 et Δ_1 indépendantes). D'après le résultat du cours sur l'espérance d'un produit de variables indépendantes admettant une espérance, leur produit admet une espérance égale au produit des espérances : on retrouve $\frac{1}{(1+r\lambda)(1-c\lambda)}$.

La méthode 1 utilise la densité f déjà calculée; la méthode 2 évite ce calcul et met en évidence la structure multiplicative, qui est exactement celle exploitée en 2) b).

Conclusion

$$\text{pour } 0 \leq \lambda < \frac{1}{c}, \exp(\lambda L_1) \text{ admet une espérance et } E(\exp(\lambda L_1)) = \frac{1}{(1+r\lambda)(1-c\lambda)}.$$

b) Soit $\lambda \in \left[0, \frac{1}{c}\right]$. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^n L_k$$

et

$$\exp(\lambda S_n) = \prod_{k=1}^n \exp(\lambda L_k).$$

Les variables $\exp(\lambda L_k)$ sont mutuellement indépendantes (lemme des coalitions) et ont la même loi que $\exp(\lambda L_1)$, donc admettent l'espérance $q = \frac{1}{(1+r\lambda)(1-c\lambda)}$.

Par récurrence sur n : pour $n = 1$, c'est 2) a). Si $\exp(\lambda S_{n-1})$ admet l'espérance q^{n-1} , alors $\exp(\lambda S_n) = \exp(\lambda S_{n-1}) \exp(\lambda L_n)$ est le produit de deux variables indépendantes (lemme des coalitions) admettant une espérance, donc admet l'espérance $q^{n-1} \cdot q = q^n$.

Conclusion

$$E(\exp(\lambda S_n)) = \frac{1}{(1+r\lambda)^n (1-c\lambda)^n}.$$

3) a) Soit $\lambda \in \left[0, \frac{1}{c}\right]$, $a \geq 0$ et $n \geq 1$. La variable $X = \exp(\lambda S_n)$ est positive et admet une espérance d'après 2) b). La fonction $s \mapsto e^{\lambda s}$ étant croissante ($\lambda \geq 0$), $[S_n > a] \subset [X \geq e^{\lambda a}]$. L'inégalité de Markov, avec $e^{\lambda a} > 0$, donne :

$$P([S_n > a]) \leq P([X \geq e^{\lambda a}]) \leq \frac{E(X)}{e^{\lambda a}}$$

Conclusion

$$P([S_n > a]) \leq e^{-\lambda a} E(\exp(\lambda S_n)).$$

b) Soit $\lambda \in \left]0, \frac{1}{c} - \frac{1}{r}\right[$. Comme $c < r$, cet intervalle est non vide, et $\lambda < \frac{1}{c}$, donc 2) et

3) a) s'appliquent. Posons $q = \frac{1}{(1+r\lambda)(1-c\lambda)} > 0$. On a :

$$(1+r\lambda)(1-c\lambda) - 1 = \lambda(r-c-rc\lambda) = rc\lambda \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{r} - \lambda\right) > 0$$

donc $0 < q < 1$ et la série géométrique

$$\sum q^n$$

converge, de somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{q}{1-q}.$$

Pour $N \geq 1$, posons $B_N = \bigcup_{n=1}^N [S_n > a]$. Par sous-additivité finie et 3) a) :

$$P(B_N) \leq \sum_{n=1}^N P([S_n > a]) \leq e^{-\lambda a} \sum_{n=1}^N q^n \leq e^{-\lambda a} \sum_{n=1}^{+\infty} q^n$$

La suite (B_N) est croissante, de réunion $\bigcup_{n \geq 1} [S_n > a]$; par continuité monotone,

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} [S_n > a]\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P(B_N), \text{ d'où l'inégalité par passage à la limite.}$$

Conclusion

la série

$$\sum \frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$$

converge et

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n > a]\right) \leq e^{-\lambda a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}.$$

- 4) Justification de la remarque. Pour $a \geq 0$, $[K_a(T_0) < 0] = [a < 0] = \emptyset$ et, pour $n \geq 1$, $K_a(T_n) = a - S_n$ (préliminaire de la partie III), donc $[K_a(T_n) < 0] = [S_n > a]$. Ainsi $\Pi(a) = P\left(\bigcup_{n \geq 1} [S_n > a]\right)$.

Pour $\lambda \in \left]0, \frac{1}{c} - \frac{1}{r}\right[$, notons

$$M(\lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n},$$

réel strictement positif. D'après 3) b), pour tout $a \geq 0$, $0 \leq \Pi(a) \leq M(\lambda)e^{-\lambda a}$.

- i) Fixons un tel λ . Comme $\lambda > 0$, $M(\lambda)e^{-\lambda a} \rightarrow 0$ quand $a \rightarrow +\infty$; par encadrement, $\Pi(a) \rightarrow 0$.

Conclusion

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \Pi(a) = 0.$$

- ii) Soit $0 < \lambda < \frac{1}{c} - \frac{1}{r}$ et μ tel que $\lambda < \mu < \frac{1}{c} - \frac{1}{r}$. Pour tout $a \geq 0$:

$$\Pi(a) \leq M(\mu)e^{-\mu a} = e^{-\lambda a} \cdot M(\mu)e^{-(\mu-\lambda)a}$$

Comme $\mu - \lambda > 0$, on a $M(\mu)e^{-(\mu-\lambda)a} \leq 1$ dès que $a \geq A$, où $A = \max\left(0, \frac{\ln M(\mu)}{\mu - \lambda}\right)$.

Conclusion

pour tout $a \geq A$, $\Pi(a) \leq e^{-\lambda a}$.

5) a) Soit ψ continue sur $\mathbb{R}_+$, de limite nulle en $+\infty$.

Si ψ est identiquement nulle, $|\psi|$ a pour maximum 0. Sinon, il existe $a_0 \geq 0$ tel que $m = |\psi(a_0)| > 0$. Comme ψ tend vers 0 en $+\infty$, il existe $A \geq a_0$ tel que $|\psi(x)| \leq \frac{m}{2}$ pour tout $x \geq A$. La fonction $|\psi|$ est continue sur le segment $[0, A]$, donc y est bornée et atteint sa borne supérieure M' en un point $x_0 \in [0, A]$; de plus $M' \geq |\psi(a_0)| = m$ car $a_0 \in [0, A]$. Pour $x \geq A$, $|\psi(x)| \leq \frac{m}{2} \leq M'$. Donc $|\psi(x)| \leq M' = |\psi(x_0)|$ pour tout $x \geq 0$.

Conclusion

$|\psi|$ admet un maximum sur $\mathbb{R}_+$.

b) Posons $\delta = \Pi_1 - \Pi_2$ sur $\mathbb{R}_+$. C'est une fonction continue, de limite nulle en $+\infty$. Par linéarité des intégrales convergentes (celles de l'énoncé convergent par hypothèse), pour tout $a \geq 0$:

$$\delta(a) = \int_{-\infty}^a f(x) \delta(a-x) dx$$

D'après a), $|\delta|$ admet un maximum M sur $\mathbb{R}_+$, atteint en un point $a_0 \geq 0$. Pour $x \leq a_0$, $a_0 - x \geq 0$ et $|f(x)\delta(a_0 - x)| \leq Mf(x)$; l'intégrale converge donc absolument et :

$$M = |\delta(a_0)| \leq \int_{-\infty}^{a_0} f(x) |\delta(a_0 - x)| dx \leq M \int_{-\infty}^{a_0} f(x) dx = M F(a_0)$$

Or d'après II.1) c), $F(a_0) = 1 - \frac{c}{c+r} e^{-a_0/c} < 1$ si $a_0 > 0$, et $F(0) = \frac{r}{c+r} < 1$. Donc $M(1 - F(a_0)) \leq 0$ avec $1 - F(a_0) > 0$, d'où $M \leq 0$, puis $M = 0$.

Conclusion

δ est nulle, c'est-à-dire que Π_1 et Π_2 coïncident sur $\mathbb{R}_+$.

c) On montre que la fonction $\Pi_2 : a \mapsto \frac{c}{r} e^{-\theta a}$, avec $\theta = \frac{1}{c} - \frac{1}{r} > 0$, vérifie la même équation que Π , puis on applique b).

Propriétés de Π (rôle de Π_1) : Π est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie l'équation d'après le résultat admis en III.3), et $\lim_{a \rightarrow +\infty} \Pi(a) = 0$ d'après 4) i).

Propriétés de Π_2 : elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers 0 en $+\infty$ car $\theta > 0$. Vérifions l'équation. Soit $a \geq 0$. Comme $\theta + \frac{1}{r} = \frac{1}{c}$ et $\theta - \frac{1}{c} = -\frac{1}{r}$:

$$\int_{-\infty}^0 f(x) \Pi_2(a-x) dx = \frac{c}{r} e^{-\theta a} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{x/r} e^{\theta x}}{c+r} dx = \frac{c}{r} e^{-\theta a} \cdot \frac{c}{c+r}$$

$$\int_0^a f(x) \Pi_2(a-x) dx = \frac{c}{r} e^{-\theta a} \int_0^a \frac{e^{-x/c} e^{\theta x}}{c+r} dx = \frac{c}{r} e^{-\theta a} \cdot \frac{r}{c+r} (1 - e^{-a/r})$$

En additionnant :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^a f(x) \Pi_2(a-x) dx &= \frac{c}{r} e^{-\theta a} \left(1 - \frac{r}{c+r} e^{-a/r} \right) = \frac{c}{r} e^{-\theta a} - \frac{c}{c+r} e^{-\theta a - a/r} = \Pi_2(a) \\ &\quad - \frac{c}{c+r} e^{-a/c} \end{aligned}$$

car $\theta + \frac{1}{r} = \frac{1}{c}$. Comme $P([L_1 > a]) = \frac{c}{c+r} e^{-a/c}$ pour $a \geq 0$, on obtient bien

$$\Pi_2(a) = P([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^a f(x) \Pi_2(a-x) dx.$$

D'après b), Π et Π_2 coïncident sur $\mathbb{R}_+$.

Conclusion

si $c < r$, pour tout $a \geq 0$, $\Pi(a) = \frac{c}{r} \exp\left(-a\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{r}\right)\right)$. En particulier $\Pi(0) = \frac{c}{r}$, ce qui est cohérent avec la minoration de 1) b) ($\frac{c}{c+r} \leq \frac{c}{r}$) et la majoration de 4) ii).

Relevé des adaptations

Aucune adaptation : toutes les questions sont conformes au référentiel (pas de nombres complexes, de critère d'extremum, de théorème de Slutsky ni de code informatique).
Les résultats admis (dérivabilité de g en II.2) b), continuité de Π et équation de III.3)) sont ceux de l'énoncé original.