



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

2001

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

On conserve les notations de l'énoncé et on pose, pour alléger les calculs, $s_* = \alpha/\beta$ et $r_* = a/b$. Ces deux nombres sont strictement positifs.

Partie I. Étude de la fonction F

1. Variations et minima de f et de g .

On étudie le signe des dérivées et les limites aux extrémités. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$, et

$$f'(x) = -\frac{\alpha}{x} + \beta = \frac{\beta x - \alpha}{x}.$$

Le dénominateur est positif. Ainsi f' est négative sur $]0, s_*[$, nulle en s_* et positive sur $]s_*, +\infty[$. La fonction f décroît strictement jusqu'à s_* , puis croît strictement. Elle atteint donc son minimum en ce seul point, avec

$$m_f = f(s_*) = \alpha - \alpha \ln(\alpha/\beta).$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $-\alpha \ln x \rightarrow +\infty$ et $\beta x \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $f(x)/x = \beta - \alpha(\ln x)/x \rightarrow \beta > 0$, par croissance comparée du logarithme et de la fonction identité. Donc $f(x) \rightarrow +\infty$ également.

De même, $g'(y) = (by - a)/y$. La fonction g décroît strictement sur $]0, r_*]$, croît strictement sur $[r_*, +\infty[$, et tend vers $+\infty$ en 0^+ et en $+\infty$. Son minimum est atteint uniquement en r_* et vaut

$$m_g = g(r_*) = a - a \ln(a/b).$$

Argument de f	0^+	s_*	$+\infty$
Variation de f	$+\infty \searrow$	m_f	$\nearrow +\infty$
Argument de g	0^+	r_*	$+\infty$
Variation de g	$+\infty \searrow$	m_g	$\nearrow +\infty$

2. Bijections définies par les restrictions.

La fonction f_1 est continue et strictement décroissante sur $]0, s_*]$. Son minimum est m_f et sa limite en 0^+ est $+\infty$. Le théorème de la bijection donne donc une bijection de $]0, s_*]$ sur $[m_f, +\infty[$.

La fonction f_2 est continue et strictement croissante sur $[s_*, +\infty[$, avec valeur m_f à la borne gauche et limite $+\infty$ à droite. Elle est donc une bijection de $[s_*, +\infty[$ sur $[m_f, +\infty[$.

Le même théorème s'applique aux restrictions de g , avec les variations et limites établies en 1. Les quatre résultats sont les suivants.

Application	Intervalle de départ	Image	Sens de variation
f_1	$]0, s_*]$	$[m_f, +\infty[$	strictement décroissante
f_2	$[s_*, +\infty[$	$[m_f, +\infty[$	strictement croissante
g_1	$]0, r_*]$	$[m_g, +\infty[$	strictement décroissante
g_2	$[r_*, +\infty[$	$[m_g, +\infty[$	strictement croissante

Leurs réciproques existent et sont continues sur les intervalles images. Elles ont respectivement les mêmes sens de variation que les applications correspondantes.

3. Minimum global de F .

Méthode 1 — Additionner les deux minoration.

Pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, les résultats de 1 donnent $f(x) \geq m_f$ et $g(y) \geq m_g$. Ainsi $F(x, y) \geq m_f + m_g$. L'égalité est atteinte en (s_*, r_*) .

Si $F(x, y) = m_f + m_g$, la somme des deux nombres positifs ou nuls $f(x) - m_f$ et $g(y) - m_g$ est nulle; chacun doit donc être nul. L'unicité des points minimisants de f et de g impose $x = s_*$ et $y = r_*$. Par conséquent,

$$m_F = m_f + m_g = \alpha + a - \alpha \ln(\alpha/\beta) - a \ln(a/b),$$

et l'ensemble des points où ce minimum est atteint est $\{(s_*, r_*)\}$.

Méthode 2 — Utiliser la hessienne sur le domaine.

La fonction F est de classe C^2 sur l'ouvert convexe $D =]0, +\infty[^2$. Son gradient vaut $\nabla F(x, y) = (\beta - \alpha/x, b - a/y)$; il s'annule uniquement en (s_*, r_*) . Sa hessienne est

$$\nabla^2 F(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha/x^2 & 0 \\ 0 & a/y^2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice diagonale a les deux valeurs propres $\alpha/x^2 > 0$ et $a/y^2 > 0$. Pour expliciter la conclusion globale, choisissons $(x, y) \neq (s_*, r_*)$ dans D et posons

$Q(t) = F(s_* + t(x - s_*), r_* + t(y - r_*))$ pour $t \in [0, 1]$. Le segment reste dans D , car ses deux coordonnées restent strictement positives. On a $Q'(0) = 0$ et

$$Q''(t) = \frac{\alpha(x - s_*)^2}{(s_* + t(x - s_*))^2} + \frac{a(y - r_*)^2}{(r_* + t(y - r_*))^2} > 0.$$

Au moins un des deux carrés est strictement positif. Ainsi Q' est strictement croissante, donc $Q'(t) > 0$ pour $t > 0$, puis $Q(1) > Q(0)$. Cela prouve que (s_*, r_*) est l'unique minimum global; sa valeur est le nombre m_F calculé ci-dessus.

La première preuve exploite la séparation des variables. La seconde montre comment la hessienne et l'étude sur un segment permettent une conclusion globale, et pas seulement locale.

Partie II. Étude des lignes de niveau de F

1. Niveaux au-dessous du minimum ou au minimum.

La question I.3 assure $F(x, y) \geq m_F$ pour tous les points du domaine. Si $c < m_F$, l'équation $F(x, y) = c$ n'a donc aucune solution : $\Gamma_c = \emptyset$.

Si $c = m_F$, ses solutions sont précisément les points minimisants de F . Ainsi

$$\Gamma_{m_F} = \{(s_*, r_*)\}.$$

Dans la suite de cette partie, $c > m_F$.

2. (a) Définition des deux abscisses extrêmes.

La condition recherchée équivaut à $f(x) = c - m_g$. Or $c - m_g > m_f$. Les deux bijections de I.2 permettent de définir

$$u_c = f_1^{-1}(c - m_g), \quad v_c = f_2^{-1}(c - m_g).$$

Ces nombres sont strictement positifs. Puisque $c - m_g \neq m_f = f(s_*)$, ni l'un ni l'autre n'est égal à s_* . Leurs intervalles de définition donnent donc $u_c < s_* < v_c$.

Ils vérifient $f(u_c) = f(v_c) = c - m_g$, c'est-à-dire $m_g = c - f(u_c) = c - f(v_c)$. Ce sont les seules solutions positives de cette équation.

2. (b) Projection de la ligne de niveau sur l'axe des abscisses.

Pour $x > 0$, il existe $y > 0$ tel que $F(x, y) = c$ si et seulement si $c - f(x)$ appartient à l'image de g . D'après I.2, cette image est $[m_g, +\infty[$. La condition équivaut donc à $f(x) \leq c - m_g$.

Les variations de f et les égalités $f(u_c) = f(v_c) = c - m_g$ montrent que cette dernière inégalité est satisfaite exactement pour $u_c \leq x \leq v_c$. Ainsi $K_c = [u_c, v_c]$.

2. (c) Les ordonnées possibles pour une abscisse donnée.

Si $u_c < x < v_c$, les variations strictes de f donnent $f(x) < c - m_g$, donc $c - f(x) > m_g$. L'équation $g(y) = c - f(x)$ a exactement une solution dans $]0, r_*[$ et exactement une dans

$]r_*, +\infty[$, grâce aux bijections g_1 et g_2 . Elles sont

$$y_1 = g_1^{-1}(c - f(x)), \quad y_2 = g_2^{-1}(c - f(x)),$$

avec $y_1 < r_* < y_2$.

Si $x = u_c$ ou $x = v_c$, l'équation devient $g(y) = m_g$. Le minimum de g n'est atteint qu'en r_* . Dans ces deux cas, l'ensemble des ordonnées possibles est donc le singleton $\{r_*\}$.

2. (d) Deux branches, forme de la courbe et tangentes.

On définit, pour $x \in [u_c, v_c]$,

$$h_1(x) = g_1^{-1}(c - f(x)), \quad h_2(x) = g_2^{-1}(c - f(x)).$$

Ces expressions sont bien définies puisque $c - f(x) \geq m_g$ sur ce segment. Les fonctions sont continues, par composition de fonctions continues, et satisfont $h_1(x) \leq r_* \leq h_2(x)$. Les inégalités sont strictes à l'intérieur ; aux extrémités,

$$h_1(u_c) = h_2(u_c) = h_1(v_c) = h_2(v_c) = r_*.$$

La question 2 (c) montre alors que Γ_c est exactement la réunion des deux graphes annoncés.

À l'intérieur du segment, les valeurs de h_1 et de h_2 diffèrent de r_* , donc g' n'y est pas nulle. Le théorème de dérivation de la réciproque s'applique à chaque branche de g . En dérivant la composition, on obtient, pour $i \in \{1, 2\}$ et $x \in]u_c, v_c[$,

$$h'_i(x) = -\frac{f'(x)}{g'(h_i(x))}.$$

On a $g'(h_1(x)) < 0$ et $g'(h_2(x)) > 0$. Ainsi le signe de h'_1 est celui de f' , et celui de h'_2 lui est opposé. Cela donne les variations suivantes.

Abscisse	u_c	s_*	v_c
h_1	$r_* \searrow$	$h_1(s_*)$	$\nearrow r_*$
h_2	$r_* \nearrow$	$h_2(s_*)$	$\searrow r_*$

La branche inférieure atteint son minimum en s_* et la branche supérieure son maximum au même endroit. Elles ne se rencontrent qu'à leurs extrémités. Leur réunion forme donc la courbe fermée située dans le quadrant strictement positif que représente le schéma du sujet.

Aux deux points d'abscisse s_* , $f'(s_*) = 0$ et les deux dénominateurs $g'(h_i(s_*))$ sont non nuls. Ainsi $h'_1(s_*) = h'_2(s_*) = 0$. Les tangentes y sont horizontales, d'équations $y = h_1(s_*)$ et $y = h_2(s_*)$.

Aux extrémités, il faut justifier les tangentes sans supposer la dérivabilité des réciproques de g en son minimum. On change le rôle des coordonnées. Près de $y = r_*$, la quantité $c - g(y)$ est strictement supérieure à m_f , par continuité et parce que $c - g(r_*) = c - m_g > m_f$. On peut donc définir localement

$$q_1(y) = f_1^{-1}(c - g(y)), \quad q_2(y) = f_2^{-1}(c - g(y)).$$

Les dérivées $f'(u_c) < 0$ et $f'(v_c) > 0$ sont non nulles. Le théorème de dérivation de la réciproque donne $q'_i(y) = -g'(y)/f'(q_i(y))$, puis $q'_1(r_*) = q'_2(r_*) = 0$.

Les paramétrisations $y \mapsto (q_1(y), y)$ et $y \mapsto (q_2(y), y)$ ont donc, en r_* , pour vecteur dérivé $(0, 1)$, qui est non nul et vertical. Les tangentes aux deux points extrêmes sont bien verticales, d'équations $x = u_c$ et $x = v_c$. Cette preuve utilise uniquement des réciproques de fonctions d'une variable.

Partie III. Étude du cas discret

1. Calcul simultané des deux suites.

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Les relations de récurrence s'écrivent $S_{k+1} = S_k(1 + \delta(a - bR_k))$ et $R_{k+1} = R_k(1 + \delta(-\alpha + \beta S_k))$. Il faut que les deux nouvelles valeurs utilisent les deux anciennes valeurs. Une affectation simultanée réalise cette contrainte.

Python

```
def calcul(S0, R0, alpha, beta, a, b, n, Delta):
    delta = Delta / n
    S, R = S0, R0
    for k in range(n):
        S, R = (
            S * (1 + delta * (a - b * R)),
            R * (1 + delta * (-alpha + beta * S))
        )
    return S, R
```

Les arguments représentent les données de l'énoncé ; $n \geq 1$ rend la division licite. Au début de l'itération d'indice k , les variables S et R valent S_k et R_k . Les expressions à droite sont toutes deux évaluées avant l'affectation, donc elles deviennent ensuite S_{k+1} et R_{k+1} . Cette propriété est vraie à l'initialisation et se conserve à chaque itération. Après les n itérations, la fonction renvoie bien (S_n, R_n) .

La stricte positivité des valeurs successives est une hypothèse de cette partie, et non une propriété garantie pour n'importe quel pas de calcul. Pour une étape, les facteurs multiplicatifs doivent notamment rester strictement positifs.

Le code a été exécuté. Avec $\alpha = \beta = a = b = 1$, $S_0 = 2$, $R_0 = 1$, $n = 1$ et $\Delta = 0,1$, il renvoie $(2, 1, 1)$. Avec les mêmes données et $n = 2$, il renvoie $(1,995, 1,1025)$, à l'arrondi machine près. Le cas d'équilibre $S_0 = R_0 = 1$ conserve exactement ces deux valeurs. Ces tests vérifient notamment l'usage simultané des anciennes valeurs ; la justification générale est l'invariant de boucle établi ci-dessus.

2. (a) Annulation des termes croisés.

On remplace les accroissements par les expressions fournies par la récurrence. Pour $0 \leq k \leq n - 1$,

$$\beta(S_{k+1} - S_k) + b(R_{k+1} - R_k) = \delta\beta S_k(a - bR_k) + \delta b R_k(-\alpha + \beta S_k).$$

Les deux termes en $\beta b S_k R_k$ s'annulent. Il reste

$$\beta(S_{k+1} - S_k) + b(R_{k+1} - R_k) = \delta a \beta S_k - \delta \alpha b R_k.$$

2. (b) Somme télescopique des accroissements.

Pour $1 \leq p \leq n$, on somme l'égalité de 2 (a) pour k de 0 à $p - 1$. Les sommes d'accroissements sont télescopiques :

$$\sum_{k=0}^{p-1} (S_{k+1} - S_k) = S_p - S_0,$$

et de même pour R . Ainsi,

$$\delta a \beta \sum_{k=0}^{p-1} S_k - \delta \alpha b \sum_{k=0}^{p-1} R_k = \beta(S_p - S_0) + b(R_p - R_0).$$

2. (c) Identité pour les accroissements relatifs.

Les termes S_k et R_k sont strictement positifs, donc les quotients utilisés sont définis. En multipliant les deux relations de récurrence par α et a , puis en additionnant,

$$\alpha \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} + a \frac{R_{k+1} - R_k}{R_k} = \delta \alpha (a - b R_k) + \delta a (-\alpha + \beta S_k) = \delta a \beta S_k - \delta \alpha b R_k.$$

On somme de 0 à $p - 1$ et on applique 2 (b). Cela donne

$$\alpha \sum_{k=0}^{p-1} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} + a \sum_{k=0}^{p-1} \frac{R_{k+1} - R_k}{R_k} = \beta(S_p - S_0) + b(R_p - R_0).$$

3. (a) Erreur du logarithme au premier ordre.

La famille $(S_k)_{0 \leq k \leq n}$ est finie et strictement positive, donc $m > 0$. Le segment reliant S_k et S_{k+1} est contenu dans $[m, +\infty[$.

Méthode 1 — Inégalité de Taylor-Lagrange.

La fonction $\ln$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, et sa dérivée seconde est $-1/x^2$. Sur le segment considéré, sa valeur absolue est majorée par $1/m^2$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, au point S_k , donne

$$\left| \ln S_{k+1} - \ln S_k - \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} \right| \leq \frac{1}{2m^2} |S_{k+1} - S_k|^2.$$

Cette conclusion vaut quel que soit le signe de l'accroissement, et aussi lorsqu'il est nul.

Méthode 2 — Intégrer la différence des dérivées.

Posons $u = S_k$ et $v = S_{k+1}$. Le théorème fondamental de l'intégration donne

$$\ln v - \ln u - \frac{v - u}{u} = \int_u^v \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u} \right) dt.$$

Sur le segment entre u et v , $t \geq m$ et $u \geq m$, donc $|1/t - 1/u| = |t - u|/(tu) \leq |t - u|/m^2$. En tenant compte d'une éventuelle inversion des bornes,

$$\left| \int_u^v \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u} \right) dt \right| \leq \frac{1}{m^2} \int_{\min(u,v)}^{\max(u,v)} |t - u| dt = \frac{(v - u)^2}{2m^2}.$$

On retrouve l'inégalité demandée. Taylor-Lagrange est réutilisable pour une fonction régulière quelconque ; la seconde méthode explicite ici l'erreur grâce à la primitive du logarithme.

3. (b) Majoration de l'accroissement.

La première récurrence et les bornes $S_k \leq M$, $R_k \leq L$ donnent

$$|S_{k+1} - S_k| = \delta S_k |a - bR_k| \leq \frac{\Delta}{n} M(a + bR_k) \leq \frac{\Delta M(a + bL)}{n}.$$

Les nombres concernés sont positifs, donc on peut élever cette inégalité au carré, puis la substituer dans 3 (a). On obtient

$$\left| \ln S_{k+1} - \ln S_k - \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} \right| \leq \frac{\Delta^2 M^2 (a + bL)^2}{2m^2 n^2}.$$

3. (c) Accumulation des erreurs sur au plus n étapes.

Posons $e_k = \ln S_{k+1} - \ln S_k - (S_{k+1} - S_k)/S_k$. Pour $1 \leq p \leq n$, la somme des différences de logarithmes est télescopique. Ainsi,

$$\ln S_p - \ln S_0 - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} = \sum_{k=0}^{p-1} e_k.$$

L'inégalité triangulaire et 3 (b) donnent

$$\left| \sum_{k=0}^{p-1} e_k \right| \leq \sum_{k=0}^{p-1} |e_k| \leq p \frac{\Delta^2 M^2 (a + bL)^2}{2m^2 n^2} \leq \frac{\Delta^2 M^2 (a + bL)^2}{2m^2 n}.$$

On obtient la majoration uniforme en p annoncée.

4. Contrôle de l'écart à une ligne de niveau.

Question adaptée au programme actuel. Rectification de l'énoncé : la liste des paramètres pouvant intervenir dans A inclut désormais Δ , dont le carré apparaît dans les majorations de la question 3.

On effectue le même calcul pour les logarithmes de R_k . La famille finie des R_k est strictement positive, donc $\ell > 0$. Sa récurrence fournit

$$|R_{k+1} - R_k| = \frac{\Delta}{n} R_k |-\alpha + \beta S_k| \leq \frac{\Delta L(\alpha + \beta M)}{n}.$$

Le raisonnement de 3 (a), avec la borne inférieure ℓ au lieu de m , puis la sommation de

3 (c), donne, pour $1 \leq p \leq n$,

$$\left| \ln R_p - \ln R_0 - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{R_{k+1} - R_k}{R_k} \right| \leq \frac{\Delta^2 L^2 (\alpha + \beta M)^2}{2\ell^2 n}.$$

Notons $E_S(p)$ l'erreur logarithmique de 3 (c), et $E_R(p)$ celle de la dernière inégalité. En remplaçant les différences de logarithmes par les sommes d'accroissements relatifs et ces deux erreurs, on a

$$F(S_p, R_p) - c = -\alpha E_S(p) - a E_R(p),$$

car les autres termes s'annulent grâce à 2 (c). L'inégalité triangulaire donne alors

$$|F(S_p, R_p) - c| \leq \frac{\Delta^2}{2n} \left(\frac{\alpha M^2 (a + bL)^2}{m^2} + \frac{aL^2 (\alpha + \beta M)^2}{\ell^2} \right).$$

On peut donc choisir

$$A = \frac{\Delta^2}{2} \left(\frac{\alpha M^2 (a + bL)^2}{m^2} + \frac{aL^2 (\alpha + \beta M)^2}{\ell^2} \right).$$

Pour $p = 0$, l'écart est nul par définition de c , donc la même majoration est vraie. Les bornes m, M, ℓ, L sont celles du calcul discret considéré : sans hypothèse supplémentaire assurant des bornes uniformes lorsque n varie, cette estimation ne constitue pas à elle seule une preuve de convergence du schéma discret vers une solution continue.

Partie IV. Étude du cas continu

1. (a) Conservation de $F(S(t), R(t))$.

Comme S et R sont de classe C^1 et strictement positives, les logarithmes composés sont de classe C^1 . On dérive $G(t) = F(S(t), R(t))$ en utilisant les deux équations :

$$G'(t) = (-\alpha/S(t) + \beta)S'(t) + (-a/R(t) + b)R'(t),$$

$$G'(t) = (-\alpha + \beta S(t))(a - bR(t)) + (-a + bR(t))(-\alpha + \beta S(t)) = 0.$$

La fonction G est donc constante sur $[0, +\infty[$. En posant $c = F(S(0), R(0))$, on obtient $F(S(t), R(t)) = c$ pour tout $t \geq 0$. Ainsi $(S(t), R(t)) \in \Gamma_c$. Nécessairement $c \geq m_F$.

1. (b) Bornes supérieures et bornes strictement positives.

Si $c = m_F$, la ligne de niveau est réduite au point (s_*, r_*) , ce qui donne directement des fonctions bornées.

Si $c > m_F$, la question II.2 (b) donne $u_c \leq S(t) \leq v_c$. Pour contrôler aussi R , posons

$$y_- = g_1^{-1}(c - m_f), \quad y_+ = g_2^{-1}(c - m_f).$$

Puisque $c - m_f > m_g$, on a $0 < y_- < r_* < y_+$. L'égalité de niveau et la minoration $f(S(t)) \geq m_f$ entraînent $g(R(t)) \leq c - m_f$. Les variations de g montrent que cela équivaut à $y_- \leq R(t) \leq y_+$.

Les deux fonctions sont donc bornées ; plus précisément, leurs valeurs restent aussi séparées de 0 par des constantes strictement positives. Ces bornes seront utilisées pour les limites de la question 2.

1. (c) Cas du niveau minimal.

Si $c = m_F$, la question II.1 donne $(S(t), R(t)) = (s_*, r_*)$ pour tout $t \geq 0$. Les fonctions sont donc constantes : $S(t) = \alpha/\beta$ et $R(t) = a/b$. Ces valeurs annulent effectivement les deux seconds membres du système.

Dans la suite concernant S et R , on suppose $c > m_F$; on conserve les bornes u_c, v_c, y_-, y_+ de 1 (b).

2. (a) Limite de S sous l'hypothèse d'absence de zéro de S' .

La dérivée S' est continue sur $[\theta, +\infty[$ et ne s'y annule pas. Elle a donc un signe constant :

deux valeurs de signes contraires imposeraient un zéro par le théorème des valeurs intermédiaires. La fonction S est ainsi strictement monotone sur cette demi-droite.

Elle est bornée d'après 1 (b). Le théorème de la limite monotone assure une limite finie s en $+\infty$. La minoration $S(t) \geq u_c > 0$ donne, par passage à la limite, $s \geq u_c > 0$. Cette limite est donc strictement positive.

2. (b) Monotonie finale et limite de R .

Le signe de $R'(t) = \beta R(t)(S(t) - s_*)$ est celui de $S(t) - s_*$, puisque $\beta R(t) > 0$.

Si la limite s obtenue en 2 (a) est différente de s_* , il existe $\lambda \geq \theta$ tel que $|S(t) - s| < |s - s_*|/2$ pour $t \geq \lambda$. Alors $S(t) - s_*$ ne s'annule pas et garde le signe de $s - s_*$ sur cette demi-droite.

Si $s = s_*$, la stricte monotonie de S implique qu'elle n'atteint pas sa limite sur $[\theta, +\infty[$. En effet, si S est strictement croissante, toutes ses valeurs sont strictement inférieures à sa limite : une valeur supérieure ou égale serait contredite par les valeurs ultérieures. Si S est strictement décroissante, elles sont strictement supérieures. Ainsi $S(t) - s_*$ ne s'annule pas non plus dans ce cas ; on peut prendre $\lambda = \theta$.

Dans tous les cas, R' ne s'annule pas sur $[\lambda, +\infty[$ et y a un signe constant. La fonction R y est strictement monotone. Étant bornée, elle admet une limite finie r , avec $r \geq y_- > 0$.

2. (c) Limite nulle de S' .

Les limites finies de S et de R , et la première équation, donnent

$$S'(t) = S(t)(a - bR(t)) \longrightarrow L_S = s(a - br).$$

Pour $A \geq \theta$, le théorème fondamental de l'intégration s'applique à la dérivée continue de S et donne $\int_{\theta}^A S'(t) dt = S(A) - S(\theta)$. Le membre de droite tend vers $s - S(\theta)$, un réel fini. L'intégrale impropre $\int_{\theta}^{+\infty} S'(t) dt$ converge donc.

Il faut utiliser ici l'existence de la limite de S' , et non supposer que toute fonction intégrable tend vers 0. Si $L_S > 0$, alors pour t assez grand $S'(t) \geq L_S/2 > 0$, et l'intégrale sur une demi-droite divergerait vers $+\infty$. Si $L_S < 0$, on aurait finalement

$S'(t) \leq L_S/2 < 0$, ce qui la ferait diverger vers $-\infty$. Les deux possibilités contredisent sa convergence.

Ainsi $L_S = 0$, et $\lim_{t \rightarrow +\infty} S'(t) = 0$.

2. (d) Limite nulle de R' .

La seconde équation et les limites précédentes donnent l'existence de la limite

$$R'(t) = R(t)(-\alpha + \beta S(t)) \rightarrow L_R = r(-\alpha + \beta s).$$

Pour $A \geq \lambda$, $\int_{\lambda}^A R'(t) dt = R(A) - R(\lambda) \rightarrow r - R(\lambda)$. L'intégrale impropre de R' sur cette demi-droite converge. Si $L_R > 0$, une minoration finale par $L_R/2$ rendrait cette intégrale divergente vers $+\infty$; si $L_R < 0$, une majoration finale par $L_R/2$ la rendrait divergente vers $-\infty$. Par conséquent $L_R = 0$, et $R'(t) \rightarrow 0$.

2. (e) Contradiction et existence d'une infinité de zéros.

Les conclusions de 2 (c) et 2 (d) imposent $s(a - br) = 0$ et $r(-\alpha + \beta s) = 0$. Comme $s > 0$ et $r > 0$, on peut diviser et obtenir $r = r_* = a/b$ et $s = s_* = \alpha/\beta$.

La fonction F est continue sur son domaine et le point limite est strictement positif. On peut donc passer à la limite dans $F(S(t), R(t)) = c$:

$$c = F(s_*, r_*) = m_F.$$

Cela contredit l'hypothèse $c > m_F$. L'hypothèse d'absence de zéro de S' sur $[\theta, +\infty[$ est donc impossible, quel que soit $\theta \geq 0$.

En particulier, pour tout $A \geq 0$, on peut appliquer ce résultat à $\theta = A + 1$: il existe un zéro de S' strictement supérieur à A . L'ensemble des zéros est non borné, donc il contient une infinité de points.

3. (a) Un zéro de R' entre deux zéros de S' .

Comme $S(\tau_i) > 0$, la première équation et $S'(\tau_i) = 0$ donnent $R(\tau_i) = r_*$ pour $i = 1, 2$. La fonction R est continue sur $[\tau_1, \tau_2]$ et dérivable à l'intérieur. Ses valeurs aux extrémités sont égales, donc le théorème de Rolle fournit $\theta \in]\tau_1, \tau_2[$ tel que $R'(\theta) = 0$.

3. (b) Écart minimal entre les valeurs de S .

À l'instant θ , $R(\theta) > 0$, donc $R'(\theta) = R(\theta)(-\alpha + \beta S(\theta)) = 0$ entraîne $S(\theta) = s_*$.

À l'instant τ_1 , on sait $R(\tau_1) = r_*$ et $F(S(\tau_1), r_*) = c$. Ainsi $f(S(\tau_1)) = c - m_g$. Les deux seules solutions de cette équation sont u_c et v_c d'après II.2 (a). Donc $S(\tau_1) \in \{u_c, v_c\}$.

Posons $\mu = \min(s_* - u_c, v_c - s_*)$. La double inégalité stricte $u_c < s_* < v_c$ assure $\mu > 0$. Ce nombre dépend uniquement de la ligne de niveau et des paramètres, et non des instants choisis. On a

$$|S(\theta) - S(\tau_1)| = |s_* - S(\tau_1)| \geq \mu.$$

3. (c) Borne uniforme de S' .

La première équation et les bornes de 1 (b) donnent, pour tout $t \geq 0$,

$$|S'(t)| = S(t)|a - bR(t)| \leq v_c(a + bR(t)) \leq v_c(a + by_+).$$

Le nombre $C = v_c(a + by_+)$ est fini et strictement positif. Ainsi $|S'(t)| \leq C$ sur tout $[0, +\infty[$, ce qui prouve que S' est bornée.

3. (d) Séparation uniforme des zéros de S' .

Les hypothèses du théorème des accroissements finis sont satisfaites par S sur $[\tau_1, \theta]$. La borne de 3 (c) entraîne

$$|S(\theta) - S(\tau_1)| \leq C(\theta - \tau_1).$$

Comme $\tau_1 < \theta < \tau_2$, la question 3 (b) donne $\mu \leq C(\theta - \tau_1) < C(\tau_2 - \tau_1)$. En divisant par $C > 0$,

$$\tau_2 - \tau_1 > \frac{\mu}{C}.$$

On peut donc choisir $\eta = \mu/C > 0$. Ce nombre est indépendant de τ_1 et τ_2 , et tous les zéros distincts de S' sont séparés par une distance strictement supérieure à η .

4. (a) Choix de trois zéros.

La question 2 (e) assure un zéro de S' au-delà de tout instant donné. Choisissons d'abord un zéro $\theta_1 \geq 0$, puis un zéro $\theta_2 > \theta_1$, puis un zéro $\theta_3 > \theta_2$. On obtient les trois réels demandés avec $S'(\theta_i) = 0$ pour chaque i .

4. (b) Nombre fini de zéros sur le segment.

On utilise la séparation $\eta > 0$ de 3 (d). Si l'on choisit N zéros distincts dans $[0, \theta_3]$ et qu'on les ordonne $z_1 < \dots < z_N$, alors, pour $N \geq 2$,

$$z_N - z_1 = \sum_{i=1}^{N-1} (z_{i+1} - z_i) > (N-1)\eta.$$

Or $z_N - z_1 \leq \theta_3$, donc $N < 1 + \theta_3/\eta$. Il est impossible de choisir un nombre arbitrairement grand de zéros distincts dans ce segment. L'ensemble de ces zéros est donc fini. Cette preuve ne requiert aucun résultat sur les points d'accumulation.

4. (c) Trois zéros consécutifs.

L'ensemble des zéros sur $[0, \theta_3]$ est fini et contient au moins les trois points de 4 (a). On peut donc les classer par ordre strictement croissant et prendre trois zéros consécutifs, par exemple les trois premiers, que l'on note $t_1 < t_2 < t_3$.

Ils sont tous positifs ou nuls, et aucun autre zéro ne se trouve entre le premier et le troisième. Ainsi $0 \leq t_1 < t_2 < t_3$, et, pour tout $t \in [t_1, t_3]$,

$$S'(t) = 0 \iff t \in \{t_1, t_2, t_3\}.$$

5. Signes successifs de S' .

Méthode 1 — Étudier le franchissement de $R = r_*$.

La dérivée S' est continue et ne s'annule ni sur $]t_1, t_2[$ ni sur $]t_2, t_3[$. Le théorème des valeurs intermédiaires impose un signe constant, strictement positif ou strictement

négatif, sur chacun de ces intervalles.

Il reste à prouver que les signes sont opposés. La première équation donne $R(t_i) = r_*$ pour $i = 1, 2, 3$. En particulier, $S(t_2)$ vérifie $f(S(t_2)) = c - m_g$ et appartient donc à $\{u_c, v_c\}$. Ces deux nombres diffèrent de s_* . Par conséquent,

$$R'(t_2) = \beta r_*(S(t_2) - s_*) \neq 0.$$

La définition de la dérivée, appliquée à $R(t) - R(t_2)$, montre alors que $R(t) - r_*$ a des signes opposés immédiatement à gauche et à droite de t_2 : son quotient par $t - t_2$ a, pour t assez proche, le signe non nul de $R'(t_2)$.

Or $S'(t) = bS(t)(r_* - R(t))$ et $bS(t) > 0$. Les signes de S' sont donc eux aussi opposés immédiatement de part et d'autre de t_2 . Comme ils sont constants sur chacun des deux intervalles, ils sont opposés sur l'ensemble de ces intervalles.

Méthode 2 — Utiliser les deux valeurs possibles de S aux zéros.

La continuité de S' et l'absence de zéro dans les deux intervalles donnent encore un signe constant et non nul sur chacun. Aux trois instants t_i , la première équation donne $R(t_i) = r_*$, puis la conservation du niveau impose $S(t_i) \in \{u_c, v_c\}$.

Si $S' > 0$ sur le premier intervalle, $S(t_1) < S(t_2)$, donc $S(t_1) = u_c$ et $S(t_2) = v_c$. Sur le second intervalle, un signe positif imposerait $S(t_3) > v_c$, impossible puisque $S(t_3) \in \{u_c, v_c\}$. Le signe y est donc négatif.

Si $S' < 0$ sur le premier intervalle, on a au contraire $S(t_1) = v_c$ et $S(t_2) = u_c$. Un signe négatif sur le second intervalle imposerait $S(t_3) < u_c$, de nouveau impossible. Le signe y est alors positif. Dans les deux cas, les signes sont opposés.

La première méthode étudie le passage de la trajectoire à travers la droite $R = r_*$; la seconde utilise les valeurs permises par la ligne de niveau aux instants critiques.

Pour les questions suivantes, on adopte l'hypothèse de l'énoncé : $S' > 0$ sur $]t_1, t_2[$ et $S' < 0$ sur $]t_2, t_3[$.

6. (a) Valeurs extrêmes de S .

Aux trois instants t_i , $R(t_i) = r_*$, donc chaque $S(t_i)$ appartient à $\{u_c, v_c\}$. La stricte croissance de S sur $[t_1, t_2]$ impose $S(t_1) < S(t_2)$: les seules possibilités sont $S(t_1) = u_c$ et $S(t_2) = v_c$.

La stricte décroissance sur $[t_2, t_3]$ impose ensuite $S(t_3) < S(t_2) = v_c$, donc $S(t_3) = u_c$. Ainsi $S(t_1) = S(t_3) = u_c$ et $S(t_2) = v_c$.

6. (b) Valeurs de R aux instants de retour.

La première équation et $S(t_i) > 0$ donnent $S'(t_i) = 0 \implies a - bR(t_i) = 0$. Comme $b > 0$,

$$R(t_1) = R(t_3) = a/b = r_*.$$

On a également $R(t_2) = r_*$; cette valeur sera utilisée dans le tableau suivant.

7. (a) Tableau commun des variations.

On introduit les instants où R' s'annule. La fonction S est continue et strictement croissante de u_c à v_c sur $[t_1, t_2]$, et $u_c < s_* < v_c$. Le théorème de la bijection fournit donc un unique $\sigma_1 \in]t_1, t_2[$ tel que $S(\sigma_1) = s_*$. De même, il existe un unique $\sigma_2 \in]t_2, t_3[$ tel que $S(\sigma_2) = s_*$.

Le signe de $R' = \beta R(S - s_*)$ est celui de $S - s_*$. Ainsi R décroît sur $[t_1, \sigma_1]$, croît sur $[\sigma_1, \sigma_2]$, puis décroît sur $[\sigma_2, t_3]$.

Sur $]t_1, t_2[$, $S' > 0$ implique $R < r_*$; sur $]t_2, t_3[$, $S' < 0$ implique $R > r_*$. La ligne de niveau donne donc $R(\sigma_1) = h_1(s_*) = y_-$ et $R(\sigma_2) = h_2(s_*) = y_+$, avec les notations de 1 (b).

Le tableau ci-dessous donne les valeurs aux instants indiqués et, dans les lignes de variation, le sens sur l'intervalle allant de l'instant de la colonne à l'instant de la colonne suivante.

Instant	t_1	σ_1	t_2	σ_2	t_3
Valeur de S	u_c	s_*	v_c	s_*	u_c

Instant	t_1	σ_1	t_2	σ_2	t_3
Variation de S ensuite	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	—
Valeur de R	r_*	y_-	r_*	y_+	r_*
Variation de R ensuite	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	—

La dérivée S' s'annule aux trois t_i , et la dérivée R' s'annule aux deux σ_i . Les valeurs de $R'(t_1)$ et $R'(t_3)$ sont strictement négatives, tandis que $R'(t_2)$ est strictement positive.

7. (b) Sens de parcours de la ligne de niveau.

Sur $]t_1, t_2[$, on a $R(t) < r_*$, donc $R(t) = h_1(S(t))$. Comme S croît strictement de u_c à v_c et prend toutes les valeurs intermédiaires, le point parcourt toute la branche inférieure de gauche à droite, du point (u_c, r_*) au point (v_c, r_*) .

Sur $]t_2, t_3[$, on a $R(t) > r_*$, donc $R(t) = h_2(S(t))$. La fonction S décroît strictement de v_c à u_c et le point parcourt toute la branche supérieure de droite à gauche. Il revient finalement à (u_c, r_*) .

Dans le repère orthonormé usuel, la courbe est donc parcourue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre : on descend au point de gauche, on va vers la droite par la branche inférieure, on monte au point de droite et on revient par la branche supérieure.

8. Périodicité par unicité de deux solutions coïncidentes.

Le résultat d'unicité est admis dans l'énoncé : deux couples de fonctions positives de classe C^1 vérifiant le même système $(\mathcal{E})$ et égaux à un instant $t_0 \geq 0$ sont égaux pour tout $t \geq 0$. On utilise seulement cette assertion précise.

Posons $T = t_3 - t_1 > 0$, $\tilde{S}(t) = S(t + T)$ et $\tilde{R}(t) = R(t + T)$ pour $t \geq 0$. Ces fonctions sont définies sur $[0, +\infty[$, strictement positives et de classe C^1 . Le système ne dépend

pas explicitement du temps ; ainsi,

$$\tilde{S}'(t)/\tilde{S}(t) = a - b\tilde{R}(t), \quad \tilde{R}'(t)/\tilde{R}(t) = -\alpha + \beta\tilde{S}(t).$$

Elles vérifient donc le même système que S, R . Les questions 6 (a) et 6 (b) assurent

$$\tilde{S}(t_1) = S(t_3) = S(t_1), \quad \tilde{R}(t_1) = R(t_3) = R(t_1).$$

Toutes les hypothèses du résultat admis sont satisfaites, avec $t_0 = t_1$. Il donne $S(t + T) = S(t)$ et $R(t + T) = R(t)$ pour tout $t \geq 0$. Les deux fonctions sont donc périodiques de période T .

La question ne demande pas de déterminer si T est leur plus petite période positive ; aucune telle propriété n'est nécessaire aux moyennes suivantes.

9. (a) Intégrale de la dérivée logarithmique.

La fonction S est de classe C^1 et strictement positive, donc $(\ln S)' = S'/S$ est continue sur $[u, u + T]$. Le théorème fondamental de l'intégration et la périodicité donnent

$$\int_u^{u+T} \frac{S'(t)}{S(t)} dt = \ln S(u + T) - \ln S(u) = 0.$$

9. (b) Valeurs moyennes des deux populations.

On intègre la première équation sur $[u, u + T]$. Les fonctions sont continues sur ce segment et les intégrales existent. La question 9 (a) donne

$$0 = \int_u^{u+T} (a - bR(t)) dt = aT - b \int_u^{u+T} R(t) dt.$$

Puisque $bT > 0$, on obtient

$$\frac{1}{T} \int_u^{u+T} R(t) dt = \frac{a}{b} = r_*.$$

De même, la positivité de R et sa périodicité donnent

$$\int_u^{u+T} R'(t)/R(t) dt = \ln R(u + T) - \ln R(u) = 0. \text{ En intégrant la seconde équation,}$$

$$0 = -\alpha T + \beta \int_u^{u+T} S(t) dt,$$

donc $\frac{1}{T} \int_u^{u+T} S(t) dt = \alpha/\beta = s_*$. Les deux moyennes sont indépendantes du point de départ u et sont égales aux coordonnées de l'équilibre.

10. Système modifié par un taux de pêche.

Posons $a_\varepsilon = a - \varepsilon$ et $\alpha_\varepsilon = \alpha + \varepsilon$. L'hypothèse $0 < \varepsilon < a$ assure $a_\varepsilon > 0$; on a également $\alpha_\varepsilon > 0$, $\beta > 0$ et $b > 0$. Le système $(\mathcal{E}')$ est donc exactement le système $(\mathcal{E})$ avec ces deux paramètres positifs à la place de a et α .

On doit distinguer le cas d'équilibre du cas non constant. Pour les paramètres modifiés, la fonction conservée est

$$F_\varepsilon(x, y) = -\alpha_\varepsilon \ln x + \beta x - a_\varepsilon \ln y + by.$$

Les démonstrations I.1 à IV.1 s'appliquent avec ces paramètres : $F_\varepsilon(K(t), H(t))$ est constant, au moins égal au minimum de F_ε .

Si cette constante est le minimum, les deux fonctions sont constantes, avec $K(t) = \alpha_\varepsilon/\beta$ et $H(t) = a_\varepsilon/b$. Elles sont alors périodiques pour toute période $\Theta > 0$, et leurs moyennes sont ces mêmes valeurs.

Si la constante est strictement supérieure au minimum, les preuves IV.2 à IV.8, appliquées avec les paramètres modifiés, fournissent une période commune $\Theta > 0$. Le résultat d'unicité admis s'utilise pour ce même système à paramètres modifiés, puisque les quatre paramètres sont toujours strictement positifs.

Dans les deux cas, l'intégration des deux équations sur $[u, u + \Theta]$, pour $u \geq 0$, donne une intégrale nulle pour chacune des dérivées logarithmiques. Il vient

$$0 = (a - \varepsilon)\Theta - b \int_u^{u+\Theta} H(t) dt,$$

$$0 = -(\alpha + \varepsilon)\Theta + \beta \int_u^{u+\Theta} K(t) dt.$$

On conclut que K et H ont une période commune strictement positive et que

$$\frac{1}{\Theta} \int_u^{u+\Theta} K(t) dt = \frac{\alpha + \varepsilon}{\beta}, \quad \frac{1}{\Theta} \int_u^{u+\Theta} H(t) dt = \frac{a - \varepsilon}{b}.$$

Le cas constant est inclus, même si l'hypothèse de niveau strictement supérieur au minimum a été retenue auparavant pour les fonctions S et R .

Partie V. Le contexte historique du modèle de Vito Volterra

Dans l'interprétation donnée, K représente les proies et H les prédateurs. La question IV.10 établit que leurs effectifs moyens sur une période sont respectivement $(\alpha + \varepsilon)/\beta$ et $(a - \varepsilon)/b$.

Considérons deux taux de pêche satisfaisant $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < a$. La différence entre les effectifs moyens de proies après et avant la diminution du taux est

$$\frac{\alpha + \varepsilon_2}{\beta} - \frac{\alpha + \varepsilon_1}{\beta} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\beta} < 0.$$

Pour les prédateurs, la différence est

$$\frac{a - \varepsilon_2}{b} - \frac{a - \varepsilon_1}{b} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{b} > 0.$$

Le modèle prédit donc qu'une diminution de la pêche fait diminuer l'effectif moyen des proies et augmenter celui des prédateurs. Il explique ainsi le phénomène observé dans l'Adriatique, au sens des moyennes sur les cycles. Cette conclusion ne prétend pas que l'effectif des proies soit plus faible à chaque instant, puisqu'il varie périodiquement.

Relevé des adaptations

- Partie II, 2 (d) : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les positions mesurées sur le scan. Le schéma original ne comporte aucune graduation numérique ; aucune valeur ni échelle numérique n'est ajoutée.

- Partie III, 1 : Code adapté en Python. La fonction renvoie le couple final et conserve la mise à jour simultanée des deux populations ; les paramètres figurent explicitement dans sa signature.
- Partie III, 4 : rectification de la liste des paramètres de A par ajout de Δ , nécessaire dans la majoration issue des questions 3 (b) et 3 (c). La borne demandée et toutes les autres données sont conservées.