



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

2000

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Ce problème a pour objet l'étude des points en lesquels une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ atteint son maximum sur l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires.

Pour tout entier p strictement positif, on identifiera $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Partie I. Préliminaires

On dit qu'une partie K non vide de $\mathbb{R}$ est majorée lorsqu'il existe un réel M tel que $\forall x \in K, x \leq M$. Un réel M vérifiant ces inégalités s'appelle un majorant de K ; on dit aussi que M majore K .

Dans ce qui suit, on suppose que K est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soient M un majorant de K et a un élément de K . On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = a$, $v_0 = M$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_{n+1}, v_{n+1}) = \begin{cases} \left(\frac{u_n + v_n}{2}, v_n \right) & \text{si } \frac{u_n + v_n}{2} \text{ ne majore pas } K, \\ \left(u_n, \frac{u_n + v_n}{2} \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. On suppose, dans cette question seulement, que $K = [0, 1[\cup]3, 4]$, $a = 0$ et $M = 10$.
Déterminer (u_n, v_n) pour tout entier $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

2. On revient désormais au cas général.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.

(b) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers un réel b .

(c) Montrer que, pour tout entier positif n , v_n est un majorant de K , puis que b majore K .

(d) Montrer qu'il existe une suite d'éléments de K qui converge vers b .

(e) On suppose que b' est un majorant de K .

- Montrer que $b' \geq b$.
- En déduire que b ne dépend pas des choix initiaux de a et M , pourvu que a appartienne à K et que M majore K .

Désormais, on notera α_K le majorant b de K ainsi obtenu.

Partie II. Étude d'un exemple

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne, définie par $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pour $P \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, la boule ouverte de centre P et de rayon r est $B(P, r) = \{Q \in \mathbb{R}^2 : \|Q - P\| < r\}$.

Une partie est ouverte si chaque point de cette partie est le centre d'une boule ouverte incluse dans cette partie ; elle est fermée si son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ est ouvert. Une partie est bornée si elle est contenue dans une boule de rayon fini.

1. On considère trois nombres réels a, b, c tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. On définit les trois ensembles

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\},$$

$$\mathcal{R}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c > 0\}, \quad \mathcal{R}_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c < 0\}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}_+$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

On pourra montrer, en utilisant la continuité de $(x, y) \mapsto ax + by + c$ en un point $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}_+$, qu'il existe une boule ouverte centrée en (x_0, y_0) et incluse dans $\mathcal{R}_+$.

Il s'ensuit, par un raisonnement analogue, que $\mathcal{R}_-$ est également une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, ce que l'on admettra.

(b) Soient (x, y) et (x', y') deux éléments de $\mathcal{R}_+$. Montrer que, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, le couple $(\lambda x + (1 - \lambda)x', \lambda y + (1 - \lambda)y')$ appartient à $\mathcal{R}_+$.

(c) On suppose que (x, y) et (x', y') appartiennent respectivement à $\mathcal{R}_+$ et $\mathcal{R}_-$. En considérant la fonction $\lambda \mapsto a(\lambda x + (1 - \lambda)x') + b(\lambda y + (1 - \lambda)y') + c$, montrer qu'il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $(\lambda x + (1 - \lambda)x', \lambda y + (1 - \lambda)y')$ appartient à $\mathcal{D}$.

2. Soit k un entier strictement positif. On considère des parties non vides et ouvertes de $\mathbb{R}^2$: $A_1, \dots, A_k$.

(a) On suppose dans cette sous-question que $A_1 \cap \dots \cap A_k$ est non vide. Montrer que $A_1 \cap \dots \cap A_k$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Si (x_0, y_0) est un élément de cette intersection, on montrera qu'il existe un réel $r > 0$ tel que la boule de centre (x_0, y_0) et de rayon r soit incluse dans $A_1 \cap \dots \cap A_k$.

(b) Montrer que $A_1 \cup \dots \cup A_k$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

3. On note Δ l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 1 - 2x + y \geq 0, 1 + x - 2y \geq 0\}$$

et g l'application définie sur Δ par $g(x, y) = 3x - y + 4$.

(a) Représenter graphiquement Δ dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j) .

(b) Montrer que Δ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.

(c) Montrer que g admet un maximum sur Δ .

(d) Ce maximum peut-il être atteint en un point de l'ensemble Δ' défini par

$$\Delta' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 1 - 2x + y > 0, 1 + x - 2y > 0\} ?$$

(e) Déterminer l'ensemble des points de Δ où ce maximum est atteint.

4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble

$$\left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \text{ et } AX = B \right\}.$$

(a) Montrer que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si x_1, x_2, x_3, x_4 satisfont

$$x_3 = 1 - 2x_1 + x_2, \quad x_4 = 1 + x_1 - 2x_2, \quad (x_1, x_2) \in \Delta.$$

(b) On considère $W = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique

$\langle X, Y \rangle = {}^tXY$ et on considère la fonction f définie sur $\mathcal{C}$ par $f(X) = \langle X, W \rangle$.

- Montrer que $f(X) = g(x_1, x_2)$ pour tout

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}.$$

- Déterminer l'ensemble des points en lesquels f atteint son maximum sur $\mathcal{C}$.

Partie III. Sommets et maximum

Désormais, n et p désignent des entiers strictement positifs. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et deux matrices colonnes $B \in \mathbb{R}^n$ et $W \in \mathbb{R}^p$.

Pour $X \in \mathbb{R}^p$ et $i \in \{1, \dots, p\}$, on note X_i sa i -ième composante, donc $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$. On dit

que X est positif, et on écrit $X \geq 0$, lorsque toutes ses composantes sont positives ou nulles.

On munit $\mathbb{R}^p$ de son produit scalaire canonique $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$. On considère $\mathcal{C} = \{X \in \mathbb{R}^p : X \geq 0 \text{ et } AX = B\}$ et l'application f définie sur $\mathcal{C}$ par $f(X) = \langle X, W \rangle$.

On dit qu'un élément $Z \in \mathcal{C}$ est un sommet de $\mathcal{C}$ lorsque

$$\forall (Z', Z'') \in \mathcal{C}^2, \forall \lambda \in]0, 1[, \quad Z = \lambda Z' + (1 - \lambda)Z'' \implies Z' = Z''.$$

Pour $X \in \mathbb{R}^p$, on note $s(X) = \{i \in \{1, \dots, p\} : X_i \neq 0\}$, appelé support de X . Enfin, $C^1, \dots, C^p$ désignent les colonnes de A . Toutes ces notations seront utilisées jusqu'à la fin du problème.

1. Vérifier que, si l'élément nul de $\mathbb{R}^p$ appartient à $\mathcal{C}$, alors il est un sommet de $\mathcal{C}$.
2. On revient au cas général. On suppose que $\mathcal{C}$ est non vide et que f atteint son maximum sur $\mathcal{C}$ en U . Ce maximum est noté M_0 . Le but est de construire un sommet de $\mathcal{C}$ en lequel f atteint son maximum.

On suppose donc que U n'est pas un sommet de $\mathcal{C}$ et on considère deux éléments distincts $U', U'' \in \mathcal{C}$ et un réel $\lambda \in]0, 1[$ tels que $U = \lambda U' + (1 - \lambda)U''$.

(a) Vérifier que $f(U') = f(U'') = f(U)$ et en déduire que $V = U'' - U'$ est orthogonal à W .

Le vecteur $U'' - U'$ étant non nul, il a au moins une composante non nulle et, quitte à échanger U' et U'' , on peut supposer que $V = U'' - U'$ admet une composante strictement négative. C'est ce que l'on suppose désormais.

(b)

- Montrer que $s(U') \subseteq s(U)$, $s(U'') \subseteq s(U)$ et $s(V) \subseteq s(U)$.
- Pour tout réel μ , calculer $A(U + \mu V)$.

- Montrer que $s(U + \mu V) \subseteq s(U)$ pour tout réel μ .

(c) Montrer que la famille $(C^i)_{i \in s(U)}$ est liée. On pourra considérer AV .

(d) On considère $K = \{\mu \in \mathbb{R} : U + \mu V \in \mathcal{C}\}$.

- Montrer que K est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
- Montrer que $U + \alpha_K V$ appartient à $\mathcal{C}$ et que $f(U + \alpha_K V) = M_0$. Le nombre α_K a été défini dans la partie I.

(e) On suppose que, pour tout $i \in s(U)$, la i -ième composante Y_i de $Y = U + \alpha_K V$ est non nulle.

En remarquant que, pour tout $i \in s(U)$, $\lim_{\mu \rightarrow 0} (U_i + (\alpha_K + \mu)V_i) = U_i + \alpha_K V_i$, justifier l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que $U + (\alpha_K + \eta)V$ appartienne à $\mathcal{C}$.

En déduire que $s(U + \alpha_K V)$ est strictement inclus dans $s(U)$.

(f) On note désormais $U^{(1)} = U + \alpha_K V$ et on suppose que $U^{(1)}$ n'est pas un sommet de $\mathcal{C}$.

En se servant des questions précédentes, montrer que l'on peut construire $U^{(2)} \in \mathcal{C}$ tel que $f(U^{(2)}) = M_0$ et tel que $s(U^{(2)})$ soit strictement inclus dans $s(U^{(1)})$.

(g) Dédurre de ce qui précède l'existence d'un sommet de $\mathcal{C}$ en lequel f atteint son maximum sur $\mathcal{C}$.

Partie IV. Existence du maximum de la fonction f

On reprend les notations de la partie III et on note $\langle X, X' \rangle$ aussi bien le produit scalaire canonique de deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$ que celui de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe $A' \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, \quad \langle AX, Y \rangle = \langle X, A'Y \rangle.$$

2. On note r le rang de A . On suppose que $r \neq 0$ et que la famille $(C^1, \dots, C^r)$ est libre.

On note E l'espace vectoriel engendré par les colonnes $C^1, \dots, C^p$ de A .

(a) Montrer que l'application $\theta : E \rightarrow \mathbb{R}^r$ définie par

$$\theta(Y) = \begin{pmatrix} \langle Y, C^1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Y, C^r \rangle \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme.

- (b) Montrer qu'il existe un unique vecteur colonne $Z \in E$ tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $\langle Z, C^i \rangle = W_i$. On rappelle que W_i représente la i -ième composante du vecteur W introduit dans la partie III.
- (c) Exprimer les composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ du vecteur $A'Z$ à l'aide des produits scalaires $\langle Z, C^i \rangle$, pour $i \in \{1, \dots, p\}$.
- (d) Dans cette sous-question, on suppose en outre que $\forall i \in \{r+1, \dots, p\}$, $\langle Z, C^i \rangle \geq W_i$.
- Soit $X \in \mathcal{C}$. Montrer que $\langle Z, B \rangle \geq \langle X, W \rangle$.
 - On suppose qu'il existe $U \in \mathcal{C}$ tel que $s(U) = \{1, \dots, r\}$. Prouver que $f : X \mapsto \langle X, W \rangle$ atteint son maximum sur $\mathcal{C}$ en U et que U est un sommet de $\mathcal{C}$.
3. Dans cette question, A et W sont respectivement la matrice et le vecteur introduits dans la partie II.
- (a) Déterminer la valeur de r .
- (b) Déterminer le vecteur Z .
- (c) Est-ce que $A'Z - W \geq 0$?
- (d) Retrouve-t-on les résultats de la partie II, en prenant $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?