



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**HEC**

**Mathématiques 1**

**2000**

*Corrigé de mathématiques approfondies*

---

**Mathématiques approfondies — Prépa ECG**

*Annales de concours · Corrigé*

## Corrigé — HEC, Mathématiques I, 2000

On identifie les vecteurs réels aux matrices colonnes. Le produit scalaire canonique est  $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$ . Les inégalités entre vecteurs seront toujours entendues composante par composante.

### Partie I. Préliminaires

On considère une partie non vide et majorée  $K \subset \mathbb{R}$ , un élément  $a \in K$  et un majorant  $M$  de  $K$ . Les suites commencent à  $u_0 = a, v_0 = M$ . À chaque étape, si le milieu  $t_n = (u_n + v_n)/2$  ne majore pas  $K$ , on pose  $(u_{n+1}, v_{n+1}) = (t_n, v_n)$ ; sinon, on pose  $(u_{n+1}, v_{n+1}) = (u_n, t_n)$ .

1. Dans le cas  $K = [0, 1[ \cup [3, 4[$ , les majorants sont exactement les réels supérieurs ou égaux à 4. En effet, tous les éléments de  $K$  sont inférieurs à 4, et, si  $t < 4$ , un élément de  $[3, 4[$  est strictement supérieur à  $t$ .

Au départ, le milieu est 5, donc il majore  $K$  et  $(u_1, v_1) = (0, 5)$ . Le milieu suivant est  $5/2$ , qui ne majore pas  $K$ , d'où  $(u_2, v_2) = (5/2, 5)$ . Le milieu suivant est  $15/4 < 4$ , d'où  $(u_3, v_3) = (15/4, 5)$ . Enfin,  $35/8 > 4$ , donc  $(u_4, v_4) = (15/4, 35/8)$ .

| $n$ | $u_n$  | $v_n$  |
|-----|--------|--------|
| 1   | 0      | 5      |
| 2   | $5/2$  | 5      |
| 3   | $15/4$ | 5      |
| 4   | $15/4$ | $35/8$ |

2. (a) On raisonne par récurrence. Comme  $a \in K$  et que  $M$  majore  $K$ ,  $u_0 = a \leq M = v_0$ . Si  $u_n \leq v_n$ , alors  $u_n \leq t_n \leq v_n$ . Chacun des deux couples possibles au rang suivant vérifie donc  $u_{n+1} \leq v_{n+1}$ . Ainsi  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n \geq 0$ .

(b) Dans les deux branches de la définition, on a  $u_{n+1} \geq u_n, v_{n+1} \leq v_n$  et

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Par récurrence,  $v_n - u_n = (M - a)/2^n \rightarrow 0$ . La suite  $(u_n)$  est croissante, la suite  $(v_n)$  décroissante, et leur différence tend vers zéro : elles sont adjacentes. Le théorème des suites adjacentes assure leur convergence vers un même réel  $b$ . On a aussi  $a \leq u_n \leq b \leq v_n \leq M$ .

Si  $a = M$ , les suites sont constantes égales à  $a$ , et les mêmes conclusions restent valables.

- (c) La suite  $(v_n)$  conserve la propriété de majorer  $K$ . En effet,  $v_0 = M$  la possède. Si  $t_n$  ne majore pas  $K$ , le majorant précédent est conservé ; sinon,  $v_{n+1} = t_n$  est lui-même un majorant. Cela prouve la propriété par récurrence, pour tous les indices, y compris 0.

Fixons  $x \in K$ . Pour tout  $n$ ,  $x \leq v_n$ . Le passage à la limite dans cette inégalité réelle donne  $x \leq b$ . Ce raisonnement vaut pour chaque  $x \in K$ , donc  $b$  majore  $K$ .

- (d) Il faut construire des éléments de  $K$ , car les termes  $u_n$  n'appartiennent pas nécessairement à  $K$ , comme le montre  $u_2 = 5/2$  dans la question 1.

La définition assure par récurrence la propriété suivante : pour chaque  $n$ , soit  $u_n = a$ , soit  $u_n$  ne majore pas  $K$ . Elle est vraie au rang 0 ; lorsqu'on change  $u_n$ , on le remplace précisément par un milieu qui ne majore pas  $K$ , et lorsqu'on le conserve la propriété reste vraie.

Si  $u_n = a$ , choisissons  $x_n = a \in K$ . Sinon, la négation de la propriété de majorant fournit  $x_n \in K$  tel que  $x_n > u_n$ . Comme  $v_n$  majore  $K$ , on a dans tous les cas

$$u_n \leq x_n \leq v_n.$$

Les deux suites extrêmes convergent vers  $b$  ; le théorème d'encadrement donne donc  $x_n \rightarrow b$ . La suite  $(x_n)$  répond à la question, que  $b$  appartienne ou non à  $K$ .

(e) Soit  $b'$  un majorant de  $K$ . La suite de (d) vérifie  $x_n \leq b'$  pour tout  $n$ . En passant à la limite, on obtient  $b \leq b'$ .

D'après (c),  $b$  est lui-même un majorant. Il est donc le plus petit majorant de  $K$ . Si d'autres choix initiaux produisent un réel  $\tilde{b}$ , les résultats précédents montrent que  $\tilde{b}$  est également un majorant inférieur ou égal à tout majorant. En appliquant chacune des deux propriétés à l'autre réel, on obtient  $b \leq \tilde{b}$  et  $\tilde{b} \leq b$ , donc  $b = \tilde{b}$ .

Le réel obtenu ne dépend donc que de  $K$ . On le note désormais  $\alpha_K$ ; c'est sa borne supérieure. La construction établit aussi qu'il existe une suite d'éléments de  $K$  convergeant vers  $\alpha_K$ .

## Partie II. Étude d'un exemple

On travaille dans  $\mathbb{R}^2$  avec la norme euclidienne  $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Les définitions de boule ouverte, d'ouvert, de fermé et d'ensemble borné ont été explicitées dans le sujet adapté.

### 1. (a) Méthode 1 — Continuité de la fonction affine

Posons  $L(x, y) = ax + by + c$ . Cette fonction est continue sur  $\mathbb{R}^2$ , car elle est affine. Si  $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{R}_+$ , alors  $L(P_0) > 0$ . En appliquant la continuité avec  $\varepsilon = L(P_0)/2 > 0$ , il existe  $r > 0$  tel que

$$\|P - P_0\| < r \implies |L(P) - L(P_0)| < \frac{L(P_0)}{2}.$$

Pour ces points,  $L(P) > L(P_0)/2 > 0$ , donc  $B(P_0, r) \subset \mathcal{R}_+$ . Chaque point de  $\mathcal{R}_+$  possède ainsi une boule ouverte incluse dans cet ensemble : il est ouvert.

### Méthode 2 — Un rayon explicite par Cauchy-Schwarz

Posons  $q = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ , puisque  $(a, b) \neq (0, 0)$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|L(P) - L(P_0)| = |a(x - x_0) + b(y - y_0)| \leq q\|P - P_0\|.$$

Le choix  $r = L(P_0)/(2q) > 0$  implique donc  $L(P) > L(P_0)/2 > 0$  pour  $P \in B(P_0, r)$ . Cela prouve de nouveau l'ouverture. La continuité est la méthode générale; Cauchy-Schwarz fournit ici un rayon calculable.

Résultat admis dans cette version adaptée :  $\mathcal{R}_-$  est également ouvert. Comme dans le sujet original, ce résultat pourra être utilisé ensuite pour les inégalités affines strictes négatives.

(b) Soient  $P = (x, y)$  et  $P' = (x', y')$  dans  $\mathcal{R}_+$ . Pour  $\lambda \in [0, 1]$ , le caractère affine de  $L$  donne

$$L(\lambda P + (1 - \lambda)P') = \lambda L(P) + (1 - \lambda)L(P').$$

Les deux valeurs de  $L$  sont strictement positives. Les coefficients sont positifs ou nuls et leur somme vaut 1 ; la combinaison reste donc strictement positive, y compris pour  $\lambda = 0$  ou 1. Le point considéré appartient à  $\mathcal{R}_+$ . Cela établit sa convexité.

### (c) Méthode 1 — Théorème des valeurs intermédiaires

La fonction  $\varphi(\lambda) = L(\lambda P + (1 - \lambda)P')$  est affine, donc continue sur  $[0, 1]$ . On a  $\varphi(0) = L(P') < 0$  et  $\varphi(1) = L(P) > 0$ . Le théorème des valeurs intermédiaires fournit  $\lambda_0 \in ]0, 1[$  tel que  $\varphi(\lambda_0) = 0$ . Le point correspondant appartient donc à  $\mathcal{D}$ .

### Méthode 2 — Résolution de l'équation affine

Notons  $s = L(P) > 0$  et  $t = L(P') < 0$ . On a  $\varphi(\lambda) = \lambda s + (1 - \lambda)t$ . Son unique zéro est

$$\lambda_0 = \frac{-t}{s - t}.$$

Le dénominateur est strictement positif et  $0 < -t < s - t$ , donc  $0 < \lambda_0 < 1$ . Ce réel donne un point de  $\mathcal{D}$  situé sur le segment reliant  $P$  et  $P'$ . La première méthode prouve l'existence par continuité; la seconde fournit la position exacte du point et son unicité sur ce segment.

2. (a) Fixons  $P_0 \in A_1 \cap \dots \cap A_k$ . Chaque  $A_i$  est ouvert, donc il existe  $r_i > 0$  tel que  $B(P_0, r_i) \subset A_i$ .

Comme la famille de rayons est finie,  $r = \min(r_1, \dots, r_k)$  est strictement positif. La boule  $B(P_0, r)$  est incluse dans chacune des  $A_i$ , donc dans leur intersection. Cette propriété, valable pour tout  $P_0$  de l'intersection, prouve qu'elle est ouverte.

- (b) Si  $P_0 \in A_1 \cup \dots \cup A_k$ , il existe au moins un indice  $i_0$  tel que  $P_0 \in A_{i_0}$ . L'ouverture de  $A_{i_0}$  fournit  $r > 0$  tel que  $B(P_0, r) \subset A_{i_0}$ . Cette boule est donc incluse dans la réunion. Celle-ci est ainsi ouverte.

3. (a) On écrit les contraintes sous la forme

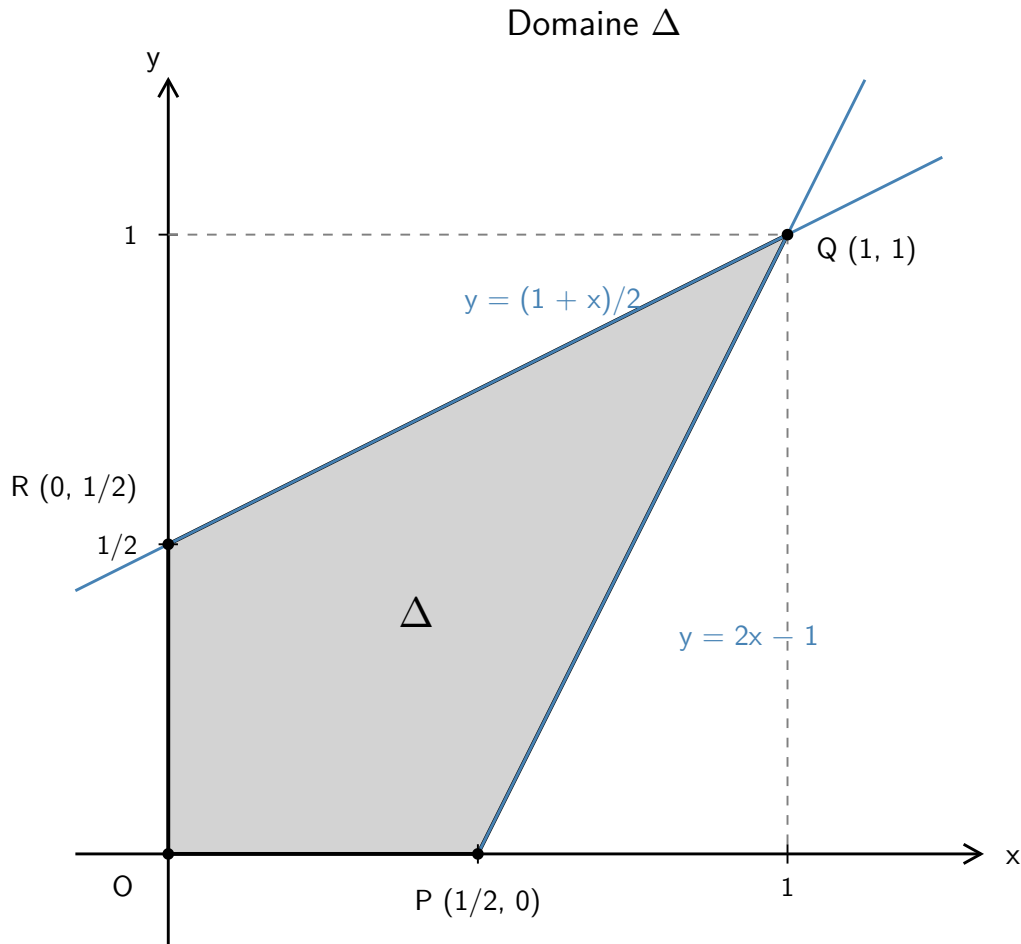
$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad y \geq 2x - 1, \quad y \leq \frac{1+x}{2}.$$

Les droites  $y = 0$  et  $y = 2x - 1$  se coupent en  $P = (1/2, 0)$ . Les deux droites obliques se coupent lorsque  $2x - 1 = (1+x)/2$ , soit  $x = 1, y = 1$  : on note  $Q = (1, 1)$ . Enfin, la droite  $x = 0$  coupe  $y = (1+x)/2$  en  $R = (0, 1/2)$ .

La condition  $2x - 1 \leq (1+x)/2$  impose  $x \leq 1$ . Ainsi une description complète est

$$\Delta = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1, \quad \max(0, 2x - 1) \leq y \leq \frac{1+x}{2} \right\}.$$

Le domaine est le quadrilatère fermé de sommets, dans l'ordre,  $O = (0, 0)$ ,  $P = (1/2, 0)$ ,  $Q = (1, 1)$  et  $R = (0, 1/2)$ . Tous ses côtés appartiennent au domaine. Les quatre contraintes sont des inégalités affines larges, donc chacune est conservée par une combinaison convexe; leur intersection remplit bien tout ce quadrilatère.



La région grisée comprend ses quatre côtés.

(b) Pour montrer que  $\Delta$  est fermé, on décrit son complémentaire :

$$\mathbb{R}^2 \setminus \Delta = \{x < 0\} \cup \{y < 0\} \cup \{1 - 2x + y < 0\} \cup \{1 + x - 2y < 0\}.$$

Chacune de ces quatre parties est un demi-plan ouvert, par II.1(a) et le résultat analogue admis pour les inégalités négatives. Leur réunion est ouverte par II.2(b). Le complémentaire de  $\Delta$  est donc ouvert :  $\Delta$  est fermé.

Les deux dernières contraintes donnent  $2x - y \leq 1$  et  $-x + 2y \leq 1$ . Deux fois la première plus la seconde donnent  $3x \leq 3$ ; la première plus deux fois la seconde donnent  $3y \leq 3$ . Avec  $x, y \geq 0$ , on obtient  $\Delta \subset [0, 1]^2$ . Ainsi  $\|(x, y)\| \leq \sqrt{2}$  sur  $\Delta$ , qui est donc borné.

- (c) Le point  $(0, 0)$  appartient à  $\Delta$ , donc cet ensemble est non vide. Il est fermé et borné d'après (b). La fonction  $g(x, y) = 3x - y + 4$  est affine, donc continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

Le théorème d'existence des extrema d'une fonction continue sur une partie non vide, fermée et bornée de  $\mathbb{R}^2$  s'applique. Il assure en particulier que  $g$  atteint un maximum sur  $\Delta$ .

(d) Méthode 1 — Un déplacement qui augmente  $g$

La partie  $\Delta'$  est l'intersection des quatre demi-plans ouverts associés aux contraintes strictes. Elle est non vide, car  $(1/2, 1/2)$  vérifie les quatre inégalités strictes. Par II.1(a) et II.2(a), elle est ouverte.

Si  $P_0 = (x_0, y_0) \in \Delta'$ , il existe donc  $r > 0$  tel que  $B(P_0, r) \subset \Delta' \subset \Delta$ . Pour  $h = r/2 > 0$ , le point  $(x_0 + h, y_0)$  appartient à cette boule et

$$g(x_0 + h, y_0) = g(x_0, y_0) + 3h > g(x_0, y_0).$$

Un point de  $\Delta'$  ne peut donc pas réaliser le maximum sur  $\Delta$ .

## Méthode 2 — Condition nécessaire sur le gradient

La fonction  $g$  est de classe  $C^2$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2$ , et  $\nabla g = (3, -1)$ . Si elle atteignait son maximum sur  $\Delta$  en un point de  $\Delta'$ , l'ouverture établie ci-dessus assurerait une boule autour de ce point incluse dans  $\Delta$ . Ce point serait donc un maximum local de  $g$  sur un ouvert.

La condition nécessaire d'extremum local pour une fonction dérivable sur un ouvert imposerait  $\nabla g = (0, 0)$ , ce qui est impossible. Le maximum n'est donc pas atteint dans  $\Delta'$ . Le déplacement donne une amélioration explicite ; le gradient fournit une méthode générale pour écarter les points intérieurs.

(e) Méthode 1 — Étude des quatre côtés

Le maximum existe par (c) et ne peut être atteint dans  $\Delta'$  par (d). Tout point de  $\Delta \setminus \Delta'$  vérifie l'égalité dans au moins une des quatre contraintes ; d'après (a), il appartient à l'un des quatre côtés du quadrilatère. On étudie donc les restrictions de  $g$  à ces côtés.

Sur  $[O, P]$ , les points sont  $(t, 0)$  avec  $0 \leq t \leq 1/2$ , et  $g(t, 0) = 4 + 3t$ . Le maximum est  $11/2$ , atteint uniquement en  $P$ .

Sur  $[P, Q]$ , les points sont  $(t, 2t - 1)$  avec  $1/2 \leq t \leq 1$ , et  $g(t, 2t - 1) = 5 + t$ . Le maximum est 6, atteint uniquement en  $Q$ .

Sur  $[R, Q]$ , les points sont  $(t, (1 + t)/2)$  avec  $0 \leq t \leq 1$ , et  $g(t, (1 + t)/2) = 7/2 + 5t/2$ . Le maximum est 6, atteint uniquement en  $Q$ .

Sur  $[O, R]$ , les points sont  $(0, t)$  avec  $0 \leq t \leq 1/2$ , et  $g(0, t) = 4 - t$ . Le maximum est 4, atteint uniquement en  $O$ .

Le maximum global est donc 6, et l'ensemble des points où il est atteint est le singleton  $\{(1, 1)\}$ .

## Méthode 2 — Combinaison des contraintes

Pour tout  $(x, y) \in \Delta$ , une identité affine donne

$$6 - g(x, y) = \frac{5}{3}(1 - 2x + y) + \frac{1}{3}(1 + x - 2y).$$

Les deux expressions entre parenthèses sont positives ou nulles, et leurs coefficients sont strictement positifs. Ainsi  $g(x, y) \leq 6$ . Le point  $(1, 1)$  est admissible et vérifie  $g(1, 1) = 6$ .

L'égalité est possible exactement lorsque  $1 - 2x + y = 0$  et  $1 + x - 2y = 0$ . Résolvons : la première équation donne  $y = 2x - 1$  ; reportée dans la seconde, elle donne  $3 - 3x = 0$ , donc  $x = 1$  et  $y = 1$ . Le maximum est donc 6, atteint uniquement en  $(1, 1)$ .

La première méthode utilise la frontière du domaine ; la seconde fournit directement un majorant et son cas d'égalité. Cette dernière identité sera retrouvée sous forme matricielle dans la partie IV.

4. (a) L'égalité  $AX = B$  équivaut au système

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \quad -x_1 + 2x_2 + x_4 = 1.$$

Elle est donc équivalente à  $x_3 = 1 - 2x_1 + x_2$  et  $x_4 = 1 + x_1 - 2x_2$ . Sous ces deux égalités, les conditions  $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$  deviennent exactement les quatre contraintes définissant  $(x_1, x_2) \in \Delta$ .

On a ainsi prouvé les deux implications de l'équivalence demandée. En particulier, l'application

$$T : \Delta \rightarrow \mathcal{C}, \quad T(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - 2x + y \\ 1 + x - 2y \end{pmatrix}$$

est une bijection : son inverse associe à un vecteur ses deux premières coordonnées.

(b) Avec  $W = {}^t(2, 4, 1, 3)$ , le produit scalaire et les expressions obtenues en (a) donnent

$$\begin{aligned} f(X) &= 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2x_1 + 4x_2 + (1 - 2x_1 + x_2) + 3(1 + x_1 - 2x_2) = 3x_1 \\ &\quad - x_2 + 4 = g(x_1, x_2). \end{aligned}$$

La bijection  $T$  conserve donc la valeur à maximiser. D'après II.3(e),  $f$  atteint le maximum 6 uniquement lorsque  $(x_1, x_2) = (1, 1)$ . Les égalités de (a) imposent alors  $x_3 = x_4 = 0$ .

L'ensemble des maximisateurs de  $f$  sur  $\mathcal{C}$  est donc

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

### Partie III. Sommets et maximum

Soient  $n, p \geq 1$ ,  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathbb{R}^n$  et  $W \in \mathbb{R}^p$ . On note

$\mathcal{C} = \{X \in \mathbb{R}^p : X \geq 0, AX = B\}$ ,  $f(X) = \langle X, W \rangle$ ,  $s(X) = \{i : X_i \neq 0\}$  et  $C^1, \dots, C^p$  les colonnes de  $A$ .

Un point  $Z \in \mathcal{C}$  est un sommet lorsque toute égalité  $Z = \lambda Z' + (1 - \lambda)Z''$ , avec  $Z', Z'' \in \mathcal{C}$  et  $0 < \lambda < 1$ , impose  $Z' = Z''$ .

- Supposons  $0 \in \mathcal{C}$  et écrivons  $0 = \lambda Z' + (1 - \lambda)Z''$  avec les hypothèses de la définition. Pour chaque indice  $i$ , les deux nombres  $Z'_i$  et  $Z''_i$  sont positifs ou nuls, et

$$0 = \lambda Z'_i + (1 - \lambda)Z''_i.$$

Les coefficients  $\lambda$  et  $1 - \lambda$  sont strictement positifs. Cette somme ne peut être nulle que si  $Z'_i = Z''_i = 0$ . Cela vaut pour tous les indices, donc  $Z' = Z'' = 0$ . Le point nul est bien un sommet.

- On suppose que  $f$  atteint son maximum  $M_0$  en  $U \in \mathcal{C}$  et que  $U$  n'est pas un sommet. On dispose donc de  $U' \neq U''$  dans  $\mathcal{C}$  et de  $\lambda \in ]0, 1[$  tels que  $U = \lambda U' + (1 - \lambda)U''$ . On pose  $V = U'' - U' \neq 0$ .

(a) La linéarité de  $f$  donne  $M_0 = \lambda f(U') + (1 - \lambda)f(U'')$ . Comme  $M_0$  est le maximum,  $M_0 - f(U') \geq 0$  et  $M_0 - f(U'') \geq 0$ . Ainsi

$$0 = \lambda(M_0 - f(U')) + (1 - \lambda)(M_0 - f(U'')).$$

Les deux coefficients étant strictement positifs, les deux différences sont nulles. Donc  $f(U') = f(U'') = f(U) = M_0$ . Par conséquent  $\langle V, W \rangle = f(U'') - f(U') = 0$ , c'est-à-dire  $V \perp W$ .

Puisque  $V \neq 0$ , il possède une composante non nulle. S'il n'en possède aucune strictement négative, remplacer  $U'$  et  $U''$  l'un par l'autre remplace  $V$  par  $-V$ , qui possède alors une composante négative. En remplaçant simultanément  $\lambda$  par  $1 - \lambda$ , on conserve la décomposition de  $U$ . On peut donc adopter l'hypothèse du sujet.

(b) Si  $i \notin s(U)$ , alors  $U_i = 0$ . La décomposition de  $U$  donne  $0 = \lambda U'_i + (1 - \lambda)U''_i$ . Les deux coordonnées sont positives ou nulles, donc  $U'_i = U''_i = 0$ , puis  $V_i = 0$ . Cela prouve

$$s(U') \subseteq s(U), \quad s(U'') \subseteq s(U), \quad s(V) \subseteq s(U).$$

Comme  $AU' = AU'' = B$ , on a  $AV = 0$ . Pour tout réel  $\mu$ ,

$$A(U + \mu V) = AU + \mu AV = B.$$

Enfin, pour  $i \notin s(U)$ ,  $U_i = V_i = 0$ , donc  $(U + \mu V)_i = 0$ . Ainsi  $s(U + \mu V) \subseteq s(U)$  pour tout réel  $\mu$ . Cette dernière inclusion ne requiert pas que le vecteur soit positif.

(c) L'écriture d'un produit matriciel à l'aide des colonnes de  $A$  et la question (b) donnent

$$0 = AV = \sum_{i=1}^p V_i C^i = \sum_{i \in s(U)} V_i C^i.$$

La famille de coefficients  $(V_i)_{i \in s(U)}$  n'est pas entièrement nulle, puisque  $V \neq 0$  et

$s(V) \subseteq s(U)$ . On dispose donc d'une relation linéaire non triviale entre les colonnes indexées par  $s(U)$ . Cette famille est liée.

(d) On a  $0 \in K$ , puisque  $U \in \mathcal{C}$ , donc  $K$  est non vide. Choisissons un indice  $i_0$  tel que  $V_{i_0} < 0$ . Si  $\mu \in K$ , la positivité du vecteur impose  $U_{i_0} + \mu V_{i_0} \geq 0$ , donc

$$\mu \leq \frac{U_{i_0}}{-V_{i_0}}.$$

Le dénominateur est strictement positif. Cette borne réelle montre que  $K$  est majoré, même s'il n'est pas minoré. La partie I s'applique donc et fournit  $\alpha_K$ , majorant de  $K$ , ainsi qu'une suite  $(\mu_j)$  d'éléments de  $K$  convergeant vers  $\alpha_K$ .

Pour chaque indice  $i$ ,  $U_i + \mu_j V_i \geq 0$ . Le passage à la limite dans cette inégalité réelle donne  $U_i + \alpha_K V_i \geq 0$ . Par (b), on a aussi  $A(U + \alpha_K V) = B$ . Par conséquent  $Y = U + \alpha_K V$  appartient à  $\mathcal{C}$ .

Enfin,  $V \perp W$  d'après (a), donc

$$f(Y) = \langle U, W \rangle + \alpha_K \langle V, W \rangle = M_0.$$

On a construit un nouveau maximisateur, correspondant au plus grand paramètre admissible dans la direction choisie.

(e) Méthode 1 — Contradiction à l'aide de la continuité

Supposons, comme dans la première étape demandée, que  $Y_i \neq 0$  pour tout  $i \in s(U)$ . Puisque  $Y \in \mathcal{C}$  par (d), ces coordonnées sont alors strictement positives.

Pour chaque  $i \in s(U)$ , la fonction  $\mu \mapsto U_i + (\alpha_K + \mu)V_i = Y_i + \mu V_i$  est continue en 0 et y prend la valeur  $Y_i > 0$ . Il existe donc  $\delta_i > 0$  tel que  $|\mu| < \delta_i$  implique  $Y_i + \mu V_i > 0$ .

Le support  $s(U)$  est fini et non vide, car il contient le support non vide de  $V$ . Posons  $\eta = \frac{1}{2} \min_{i \in s(U)} \delta_i > 0$ . Alors les coordonnées indexées par  $s(U)$  de  $U + (\alpha_K + \eta)V$  sont

positives. Hors de ce support, les coordonnées sont nulles par (b). La contrainte matricielle est également satisfaite par (b), donc ce vecteur appartient à  $\mathcal{C}$ .

Cela implique  $\alpha_K + \eta \in K$ , en contradiction avec le fait que  $\alpha_K$  majore  $K$ . L'hypothèse sur toutes les coordonnées  $Y_i$  est donc fausse : au moins une coordonnée d'indice dans  $s(U)$  s'annule dans  $Y$ . Comme  $s(Y) \subseteq s(U)$  par (b), cette inclusion est stricte.

## Méthode 2 — Calcul du paramètre où une coordonnée s'annule

L'ensemble  $J = \{i : V_i < 0\}$  est fini et non vide. Pour  $i \in J$ , on a  $U_i > 0$  : en effet,  $V_i \neq 0$  entraîne  $i \in s(U)$ , et  $U \geq 0$ . Le nombre

$$t_* = \min_{i \in J} \frac{U_i}{-V_i}$$

est donc bien défini et strictement positif. Pour  $0 \leq t \leq t_*$ , les coordonnées où  $V_i < 0$  vérifient  $U_i + tV_i \geq 0$ ; celles où  $V_i \geq 0$  restent positives ou nulles. Par (b),  $A(U + tV) = B$ . Donc  $[0, t_*] \subset K$ .

Un indice  $j$  atteint le minimum. Si  $t > t_*$ , sa coordonnée est  $U_j + tV_j = V_j(t - t_*) < 0$ , donc  $t \notin K$ . Ainsi  $t_*$  est à la fois un élément de  $K$  et un majorant de  $K$ , ce qui donne  $\alpha_K = t_*$ .

À ce paramètre,  $Y_j = U_j + t_*V_j = 0$  alors que  $U_j > 0$ . L'inclusion  $s(Y) \subseteq s(U)$  est donc stricte. Cette seconde méthode fournit une formule explicite pour le déplacement ; la première exploite uniquement la borne supérieure construite dans la partie I et la continuité des coordonnées.

(f) Le point  $U^{(1)}$  appartient à  $\mathcal{C}$  et réalise encore le maximum  $M_0$ , d'après (d). S'il n'est pas un sommet, la négation de la définition fournit deux points distincts de  $\mathcal{C}$  dont il est une combinaison convexe stricte.

On peut donc appliquer les questions (a) à (e) avec  $U^{(1)}$  à la place de  $U$ . La différence des deux nouveaux points est orthogonale à  $W$  ; on l'oriente pour qu'elle possède une

composante négative. La construction du plus grand paramètre admissible produit alors un point  $U^{(2)} \in \mathcal{C}$  vérifiant

$$f(U^{(2)}) = M_0, \quad s(U^{(2)}) \subsetneq s(U^{(1)}).$$

Les hypothèses requises sont ainsi conservées, ce qui permet de répéter la construction tant que le point obtenu n'est pas un sommet.

(g) Partons du maximisateur  $U^{(0)} = U$ . À chaque étape où le point n'est pas un sommet, la construction précédente donne un nouveau maximisateur dont le support est strictement plus petit.

Les entiers  $|s(U^{(k)})|$  sont compris entre 0 et  $p$ , et diminuent d'au moins 1 à chaque étape. On ne peut donc effectuer plus de  $|s(U)| \leq p$  diminutions. Si le support devient vide, le point est nul, et c'est un sommet par la question 1. Sinon, la procédure doit s'arrêter auparavant en un sommet, puisqu'un point qui ne serait pas un sommet autoriserait encore une diminution.

Il existe donc un sommet de  $\mathcal{C}$  en lequel  $f$  atteint le maximum  $M_0$ . Ce résultat est conditionnel à l'existence d'un maximum atteint, qui était l'hypothèse de départ ; la partie IV donnera un critère assurant cette existence.

## Partie IV. Existence du maximum de la fonction $f$

On reprend les notations de la partie III. Les produits scalaires sont les produits scalaires canoniques, dans  $\mathbb{R}^p$  ou dans  $\mathbb{R}^n$  selon les vecteurs considérés.

1. La transposée  ${}^tA$  est une matrice de taille  $p \times n$ . Pour  $X \in \mathbb{R}^p$  et  $Y \in \mathbb{R}^n$ , les règles de transposition donnent

$$\langle AX, Y \rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY = \langle X, {}^tAY \rangle.$$

On peut donc prendre  $A' = {}^tA$ . Cette matrice est même unique : si  $D$  satisfait la même

identité, alors  $\langle X, (D - {}^tA)Y \rangle = 0$  pour tous  $X, Y$ . Pour chaque  $Y$ , choisir  $X = (D - {}^tA)Y$  donne une norme carrée nulle, donc  $(D - {}^tA)Y = 0$ . Ainsi  $D = {}^tA$ .

2. On suppose  $r = \text{rg}(A) > 0$  et  $(C^1, \dots, C^r)$  libre. L'espace  $E$  engendré par toutes les colonnes est de dimension  $r$ . Les  $r$  premières colonnes forment donc une base de  $E$ .

(a) Méthode 1 — Noyau et dimension

L'application  $\theta$  est linéaire, par linéarité du produit scalaire en sa première variable. Supposons  $Y \in E$  tel que  $\theta(Y) = 0$ . Alors  $Y$  est orthogonal à chacune des colonnes  $C^1, \dots, C^r$ , donc à toute leur combinaison linéaire, c'est-à-dire à tout  $E$ .

Comme  $Y \in E$ , il est en particulier orthogonal à lui-même :  $\langle Y, Y \rangle = 0$ . La positivité définie du produit scalaire donne  $Y = 0$ . Le noyau de  $\theta$  est donc réduit à  $\{0\}$ , et  $\theta$  est injective.

Le domaine et le codomaine ont tous deux dimension  $r$ . Le théorème du rang montre donc que cette application injective est aussi surjective. Ainsi  $\theta : E \rightarrow \mathbb{R}^r$  est un isomorphisme.

## Méthode 2 — Matrice des produits scalaires de la base

Définissons la matrice réelle  $G$  d'ordre  $r$  par  $G_{i,j} = \langle C^j, C^i \rangle$ . Si

$$Y = \sum_{j=1}^r y_j C^j$$

et  $y = (y_j)_{1 \leq j \leq r}$ , la définition donne  $\theta(Y) = Gy$ .

Pour tout vecteur  $y \in \mathbb{R}^r$ , le développement d'une somme finie fournit

$${}^t_y Gy = \left\| \sum_{j=1}^r y_j C^j \right\|^2.$$

Si  $Gy = 0$ , le membre de gauche est nul. Le vecteur

$$\sum_j y_j C^j$$

est donc nul ; la liberté de la base impose  $y = 0$ . La matrice  $G$  possède un noyau nul, donc elle est inversible.

Pour tout  $t \in \mathbb{R}^r$ , le vecteur  $y = G^{-1}t$  donne

$$Y = \sum_j y_j C^j \in E$$

et  $\theta(Y) = t$ . Les coordonnées sont uniques puisque  $G$  est inversible. Cela établit directement la bijectivité de  $\theta$ .

La première méthode repose sur l'orthogonalité et les dimensions ; la seconde donne un système inversible pour calculer explicitement l'antécédent d'un vecteur. Aucun déterminant n'est nécessaire.

(b) Les contraintes demandées équivalent à

$$\theta(Z) = \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_r \end{pmatrix}.$$

Le membre de droite est un vecteur de  $\mathbb{R}^r$ . Puisque  $\theta$  est un isomorphisme d'après (a), il possède un unique antécédent dans  $E$ . C'est exactement l'unique vecteur  $Z$  demandé.

(c) Comme  $A' = {}^t A$ , sa  $i$ -ième ligne est la transposée de la colonne  $C^i$  de  $A$ . Par conséquent, pour  $1 \leq i \leq p$ ,

$$(A'Z)_i = {}^t(C^i)Z = \langle Z, C^i \rangle.$$

Ainsi  $A'Z = {}^t(\langle Z, C^1 \rangle, \dots, \langle Z, C^p \rangle)$ . Ses  $r$  premières composantes valent  $W_1, \dots, W_r$  par (b).

(d) Posons  $D = A'Z - W$ . D'après (b), (c) et l'hypothèse supplémentaire,  $D_i = 0$  pour  $i \leq r$  et  $D_i \geq 0$  pour  $i > r$ .

Pour  $X \in \mathcal{C}$ , les coordonnées  $X_i$  sont positives ou nulles, donc

$$\langle Z, B \rangle - \langle X, W \rangle = \langle Z, AX \rangle - \langle X, W \rangle = \langle X, A'Z - W \rangle = \sum_{i=r+1}^p X_i D_i \geq 0.$$

La question 1 justifie le passage du produit scalaire avec  $AX$  à celui avec  $A'Z$ . On a donc établi  $f(X) \leq \langle Z, B \rangle$  pour tout  $X \in \mathcal{C}$ .

Supposons maintenant  $U \in \mathcal{C}$  et  $s(U) = \{1, \dots, r\}$ . Pour  $i > r$ ,  $U_i = 0$ , donc la somme précédente est nulle en  $U$ . Ainsi  $f(U) = \langle Z, B \rangle$ , qui est un majorant de toutes les valeurs de  $f$ . Le maximum est donc atteint en  $U$ .

Il reste à démontrer que  $U$  est un sommet.

### Méthode 1 — Utilisation de la partie III

Si  $U$  n'était pas un sommet, les hypothèses de III.2 seraient réunies :  $U$  serait un maximisateur non sommet. III.2(c) imposerait alors que la famille  $(C^i)_{i \in s(U)} = (C^1, \dots, C^r)$  soit liée. Cela contredit sa liberté. Donc  $U$  est un sommet.

## Méthode 2 — Vérification directe de la définition

Supposons  $U = \lambda X' + (1 - \lambda)X''$ , avec  $X', X'' \in \mathcal{C}$  et  $0 < \lambda < 1$ . Pour  $i > r$ , on a  $U_i = 0$ . La positivité des coordonnées de  $X'$  et  $X''$  impose  $X'_i = X''_i = 0$ .

D'autre part,  $A(X' - X'') = B - B = 0$ . Puisque les coordonnées d'indices supérieurs à  $r$  sont nulles, cela donne

$$\sum_{i=1}^r (X'_i - X''_i)C^i = 0.$$

La liberté de  $C^1, \dots, C^r$  entraîne  $X'_i = X''_i$  pour  $i \leq r$ . Avec les autres coordonnées, on obtient  $X' = X''$ , comme l'exige la définition d'un sommet.

Les deux méthodes établissent donc que le maximisateur  $U$  est un sommet. La seconde montre directement le rôle de la liberté des colonnes du support, indépendamment de la maximalité. Si  $r = p$ , la somme d'indices supérieurs à  $r$  est vide et vaut zéro; tous les arguments restent valables.

3. (a) Dans l'exemple, les deux premières colonnes sont  $C^1 = {}^t(2, -1)$  et  $C^2 = {}^t(-1, 2)$ . Si  $aC^1 + bC^2 = 0$ , les coordonnées donnent  $2a - b = 0$  et  $-a + 2b = 0$ . La première impose  $b = 2a$ ; la seconde donne alors  $3a = 0$ , donc  $a = b = 0$ .

Ces deux colonnes sont libres. Comme  $A$  possède deux lignes, son rang est au plus 2; la liberté de deux colonnes impose un rang au moins égal à 2. Ainsi  $r = 2$  et  $E = \mathbb{R}^2$ .

- (b) Écrivons  $Z = {}^t(z_1, z_2)$ . Les conditions de IV.2(b), avec  $W_1 = 2$  et  $W_2 = 4$ , deviennent

$$2z_1 - z_2 = 2, \quad -z_1 + 2z_2 = 4.$$

La première équation donne  $z_2 = 2z_1 - 2$ . La seconde devient  $-z_1 + 4z_1 - 4 = 4$ , soit  $3z_1 = 8$ . On obtient donc

$$Z = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur appartient à  $E = \mathbb{R}^2$  et vérifie bien les deux égalités. Son unicité est aussi assurée par IV.2(b).

(c) Les troisième et quatrième colonnes de  $A$  sont  $C^3 = {}^t(1, 0)$  et  $C^4 = {}^t(0, 1)$ . La formule de IV.2(c) donne

$$A'Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}, \quad A'Z - W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \geq 0.$$

La réponse est donc oui. Les composantes d'indices supérieurs au rang sont même strictement positives, ce qui permettra de caractériser tous les cas d'égalité dans le majorant.

(d) Pour retrouver l'exemple de la partie II, le sujet adapté précise qu'on prend ici  $B = {}^t(1, 1)$ . Alors  $\langle Z, B \rangle = 8/3 + 10/3 = 6$ .

Le vecteur  $U = {}^t(1, 1, 0, 0)$  est positif et vérifie  $AU = {}^t(1, 1) = B$ . Son support est  $\{1, 2\} = \{1, \dots, r\}$ . Toutes les hypothèses de IV.2(d) sont donc satisfaites :  $f$  atteint le maximum 6 en  $U$ , et  $U$  est un sommet.

Pour retrouver aussi l'unicité, l'identité de IV.2(d) et le calcul de (c) donnent, pour tout  $X \in \mathcal{C}$ ,

$$6 - f(X) = \frac{5}{3}X_3 + \frac{1}{3}X_4.$$

Les coordonnées  $X_3, X_4$  sont positives ou nulles et leurs coefficients strictement positifs. Le maximum 6 est donc atteint exactement lorsque  $X_3 = X_4 = 0$ . La contrainte  $AX = B$  se réduit alors à  $2X_1 - X_2 = 1, -X_1 + 2X_2 = 1$ , dont l'unique solution est  $X_1 = X_2 = 1$ .

On retrouve ainsi le maximum 6 et l'unique maximisateur  $U$  de II.4(b). Par la bijection de II.4(a), cela correspond à l'unique point  $(1, 1)$  maximisant  $g$  sur  $\Delta$ . L'identité précédente est précisément celle de II.3(e), avec  $X_3 = 1 - 2x + y$  et  $X_4 = 1 + x - 2y$ .

## Relevé des adaptations

---

- II.1–3 : définitions de la boule ouverte, d'une partie ouverte, d'une partie fermée et d'une partie bornée ajoutées au préambule de la partie II. Ces précisions permettent de démontrer les propriétés demandées sans supposer un cours de topologie générale ; aucune question ni hypothèse mathématique d'origine n'est supprimée.
- II.3(a) : dessin demandé intégré au corrigé sous forme de SVG autonome. Ses sommets, côtés et droites sont calculés exactement à partir des quatre contraintes ; le PDF ne fournissait pas de figure à reproduire.
- IV.3(d) : choix  $B = {}^t(1, 1)$  explicité pour retrouver l'exemple de la partie II. Le texte original rappelait seulement les valeurs de  $A$  et  $W$ , alors que celles de la partie III étaient générales.