



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 1998

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Toutes les variables aléatoires considérées dans chaque partie sont définies sur un même espace probabilisé. Pour une variable aléatoire X admettant des moments d'ordre 1 et 2, $E(X)$ désigne son espérance et $V(X)$ sa variance.

Pour deux variables aléatoires X et Y admettant un moment d'ordre 2, le produit XY admet une espérance et l'on définit :

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

On admet les propriétés suivantes, pour des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 et pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $\text{Cov}(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha \text{Cov}(X, Z) + \beta \text{Cov}(Y, Z).$
2. $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X).$
3. $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}.$
4. Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0.$

Ces propriétés ne doivent pas être démontrées.

Un gestionnaire investit un capital parmi n actifs, notés $A_1, A_2, \dots, A_n$, par exemple des actions, disponibles sur le marché boursier. Leurs rendements à un an, exprimés en pourcentage, sont des variables aléatoires $R_1, R_2, \dots, R_n$ admettant des moments d'ordre 1 et 2. Par exemple, si l'actif A_1 a rapporté 6 %, R_1 prend la valeur 6.

Le gestionnaire constitue un portefeuille, c'est-à-dire un n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \geq 0$, et tel que :

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Chaque coefficient x_i représente la proportion du capital investie dans l'actif A_i . Par exemple, pour $n = 3$, si le gestionnaire investit un quart du capital dans A_1 , la moitié dans A_2 et un quart dans A_3 , son portefeuille est $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Le rendement du portefeuille $(x_1, \dots, x_n)$ est la variable aléatoire :

$$R = \sum_{i=1}^n x_i R_i.$$

Le gestionnaire prudent désire minimiser les risques et recherche les portefeuilles dont le rendement est de variance minimale, sous certaines hypothèses.

Préliminaire

On considère le portefeuille $Q = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et son rendement

$$R = \sum_{i=1}^n x_i R_i.$$

On rappelle que :

$$V(R) = \sum_{i=1}^n x_i^2 V(R_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \text{Cov}(R_i, R_j).$$

1. On suppose avoir défini en Python :

Python

```
import numpy as np

n = 5
A = np.zeros((n, n))
```

Les coefficients de A sont ensuite renseignés de sorte que $A[i, j]$ représente $\text{Cov}(R_{i+1}, R_{j+1})$, pour $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$. Le portefeuille Q est un tableau NumPy de longueur n dont $Q[i]$ représente x_{i+1} .

Écrire une fonction Python $V(Q)$ qui renvoie la variance du rendement de ce portefeuille. Le tableau A est disponible dans l'environnement de la fonction.

2. On considère l'ensemble :

$$H = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

On admet que H est fermé. On définit sur $\mathbb{R}^n$ la fonction :

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 V(R_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \text{Cov}(R_i, R_j).$$

Montrer que F admet un minimum sur H .

La suite du problème consiste à déterminer ce minimum et les points de H où il est atteint, pour répondre à la demande du gestionnaire.

Partie 1

Dans cette partie, $n = 2$ et les rendements des actifs A_1 et A_2 sont notés respectivement X et Y . On suppose :

$$V(X) = 12, \quad V(Y) = 3, \quad \text{Cov}(X, Y) = c,$$

où c est un réel donné. Pour $a \in [0, 1]$, on considère le portefeuille $(a, 1 - a)$, dont le rendement est :

$$R = aX + (1 - a)Y.$$

1. Montrer que $|c| \leq 6$.

2. (a) Montrer que :

$$V(R) = (15 - 2c)a^2 + 2(c - 3)a + 3.$$

2. (b) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction h par :

$$h(x) = (15 - 2c)x^2 + 2(c - 3)x + 3.$$

Étudier les variations de h sur $[0, 1]$, en distinguant les deux cas $c \in [-6, 3[$ et $c \in [3, 6]$.
Montrer qu'il existe un unique portefeuille dont le rendement est de variance minimale.
Déterminer ce portefeuille en fonction de c .

3. (a) On suppose $c = -6$. Déterminer le portefeuille dont le rendement R est de variance minimale et cette variance minimale. Que peut-on dire de la variable aléatoire R dans ce cas ?

3. (b) On suppose que X et Y sont indépendantes. Montrer que $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ est le portefeuille de rendement de variance minimale.

4. On suppose dans cette question que X et Y sont des variables gaussiennes indépendantes, X de moyenne 6 et de variance 12, Y de moyenne 3 et de variance 3.

Soit R le rendement du portefeuille $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Quelle est la loi de R ? Calculer la probabilité que R soit supérieur ou égal à 4.

On donne $\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) \simeq 0,60$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

5. On suppose dans cette question que X et Y sont des variables à densité indépendantes, que X suit la loi uniforme sur $[0, 12]$ et que Y suit la loi uniforme sur

$[0, 6]$.

5. (a) Donner leurs espérances et vérifier que $V(X) = 12$ et $V(Y) = 3$.
5. (b) Déterminer la loi de $4Y$, puis une densité de $X + 4Y$. Tracer le graphe de cette densité.
5. (c) Soit R le rendement du portefeuille $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Calculer la probabilité que R soit supérieur à 4.

Partie 2

Dans cette partie, $n = 3$ et les rendements des actifs A_1, A_2, A_3 sont notés respectivement X, Y, Z . On suppose :

$$V(X) = 2, \quad V(Y) = V(Z) = 6,$$

$$\text{Cov}(X, Y) = -1, \quad \text{Cov}(X, Z) = 2, \quad \text{Cov}(Y, Z) = 1.$$

On considère le portefeuille (x, y, z) , dont le rendement est $R = xX + yY + zZ$. On définit :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 4x^2 + 10y^2 + 4xy - 8x - 10y + 6,$$

$$K = \{(x, y) \in [0, +\infty[^2 : x + y \leq 1\},$$

$$K_0 = \{(x, y) \in]0, +\infty[^2 : x + y < 1\}.$$

On admet que K_0 est ouvert.

1. Montrer que le problème du gestionnaire revient à déterminer le minimum de f sur K . Dessiner le domaine K .
2. (a) Montrer que f admet un minimum local sur $\mathbb{R}^2$ atteint en un point (x_0, y_0) que l'on déterminera.
2. (b) En déduire que f n'admet pas de minimum sur K_0 .
3. (a) On pose :

$$K_1 = \{(0, y) : y \in [0, 1]\}, \quad K_2 = \{(x, 0) : x \in [0, 1]\},$$

$$K_3 = \{(x, 1 - x) : x \in [0, 1]\}.$$

Déterminer les minimums de f respectivement sur K_1, K_2, K_3 .

3. (b) En déduire l'unique portefeuille dont le rendement est de variance minimale.

Partie 3

Dans cette partie, $n = 3$ et les rendements des actifs A_1, A_2, A_3 sont notés respectivement X, Y, Z .

1. On suppose :

$$V(X) = V(Y) = V(Z) = 1, \quad \text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}(Y, Z) = c,$$

où c est un réel donné.

1. (a) Calculer $V(X + Y + Z)$. Montrer que $c \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.
1. (b) On suppose $c \neq 1$. On considère un portefeuille (x, y, z) de rendement R .
Montrer que :

$$V(R) = (1 - c) \left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 \right] + \frac{1 + 2c}{3}.$$

Déterminer le portefeuille dont le rendement est de variance minimale.

2. Soient A, B, C trois variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, suivant toutes la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(A = k) = P(B = k) = P(C = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

On suppose :

$$X = B + C, \quad Y = A + C + 1, \quad Z = A + B + 2.$$

2. (a) Déterminer les espérances, variances et covariances de X, Y, Z .
2. (b) Montrer que le portefeuille de rendement de variance minimale est $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
2. (c) Déterminer la loi de $A + B + C$. En déduire la probabilité que le rendement R du portefeuille précédent soit supérieur ou égal à 5.

Partie 4

Dans cette partie, $n \geq 2$. On note M la matrice de covariance de $R_1, \dots, R_n$, matrice carrée d'ordre n dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $\text{Cov}(R_i, R_j)$.

On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles ayant n lignes et une colonne.

1. On considère

$$U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

et la variable aléatoire

$$T = \sum_{i=1}^n x_i R_i.$$

Vérifier que $V(T) = {}^t U M U$, où ${}^t U$ désigne la transposée de U .

2. (a) Montrer que M est diagonalisable.

2. (b) À l'aide de la question 1, montrer que les valeurs propres de M sont positives ou nulles.

3. On suppose que M est inversible. Pour $U, W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\varphi(U, W) = {}^t U M W.$$

3. (a) Montrer que, si ${}^tUMU = 0$, alors $U = 0$.
3. (b) Montrer que φ est un produit scalaire. On note N la norme associée à ce produit scalaire.
3. (c) Montrer que, pour tous $U, W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\left[N\left(\frac{U+W}{2}\right) \right]^2 = \frac{1}{2} [(N(U))^2 + (N(W))^2] - \left[N\left(\frac{U-W}{2}\right) \right]^2.$$

3. (d) En déduire l'unicité du portefeuille dont le rendement est de variance minimale, l'existence ayant été montrée dans le préliminaire.