



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1998

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Notations

Pour tout entier naturel n non nul, on note $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites numériques, la notation $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ signifie que u_n est équivalent à v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie I : Quelques résultats préliminaires

Les sous-parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre ; leurs résultats seront utilisés dans la suite du problème.

A

Dans cette sous-partie, n désigne un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus n .

1. (a) Vérifier rapidement que l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même, définie par $\varphi(P)(X) = P(X + 1)$, est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.
- (b) Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (c) Déterminer M^{-1} .

2. On suppose que $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ appartiennent à $\mathbb{R}^{n+1}$ et vérifient

$$\forall p \in \{0, \dots, n\}, \quad b_p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a_k.$$

- (a) Trouver un lien entre les deux matrices lignes $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ et M .
- (b) En déduire, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, l'expression de a_k en fonction des nombres $b_0, \dots, b_k$.

B

Dans cette sous-partie, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite numérique réelle et g une fonction positive, continue sur $[1, +\infty[$, décroissante sur un intervalle $[c, +\infty[\subset [1, +\infty[$, telles que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ soit divergente et que $w_{n+1} - w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} g(n)$.

1. On suppose que q et N sont deux entiers naturels tels que $c \leq q < N$.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq q$,

$$g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t) dt \leq g(n).$$

(b) En déduire

$$\int_q^N g(t) dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq \int_q^N g(t) dt + g(q).$$

2. On considère un réel ε tel que $0 < \varepsilon < 1$.

(a) Montrer qu'il existe un entier naturel $q \geq c$ tel que

$$(1 - \varepsilon)g(n) \leq w_{n+1} - w_n \leq (1 + \varepsilon)g(n) \text{ dès que } n \geq q.$$

(b) En déduire que, pour tout entier $N > q$,

$$(1 - \varepsilon) \int_1^N g(t) dt - (1 - \varepsilon) \int_1^q g(t) dt + w_q \leq w_N \leq (1 + \varepsilon) \int_1^N g(t) dt + (1 + \varepsilon)g(q) + w_q.$$

3. Montrer que $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^n g(t) dt$.

4. En utilisant ce qui vient d'être prouvé, montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n.$$

Partie II : Étude d'un algorithme

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On représente le tableau d'entiers par une liste Python t contenant au moins n éléments. Les indices commencent à zéro. On considère la fonction suivante ; $\text{Recherche}(n, t)$ renvoie la valeur finale de la variable `maximum`.

Python

```
def Recherche(n, t):
    maximum = t[0]
    for i in range(1, n):
        if t[i] > maximum:
            maximum = t[i]
    return maximum
```

1. Quel sera le contenu de la variable `maximum` à la fin de l'appel $\text{Recherche}(10, t)$, lorsque t contient au moins dix éléments ?
2. On considère n entiers distincts deux à deux et on suppose qu'ils sont affectés aux n premières cases de t , à raison d'un entier par case.

(a) Quel est le nombre de rangements possibles de ces n entiers dans les n cases mémoire $t[0], \dots, t[n-1]$?

Pour tout $i \in I_n$, on note $V(i; n)$ le nombre de rangements des n entiers dans ces cases tels que l'appel $\text{Recherche}(n, t)$ provoque i affectations de la variable `maximum` au cours de son exécution. L'affectation initiale `maximum = t[0]` est comptée.

On admet que $V(i; n)$ est indépendant des n entiers initiaux, pourvu qu'ils soient distincts.

(b) Vérifier que le nombre d'affectations de la variable `maximum` au cours de l'exécution de $\text{Recherche}(n, t)$ appartient à I_n .

Par convention, on pose $V(0; n) = 0$ et $V(k; n) = 0$ lorsque $k > n$.

(c) Quel est le nombre d'affectations de la variable `maximum` au cours de l'exécution de `Recherche(n, t)` si, pour tout $i \in I_n$, $t[i-1]$ est égal à $n + 1 - i$?

(d) Montrer que $V(1; n) = (n - 1)!$ et déterminer $V(n; n)$.

(e) On suppose dans le premier point ci-dessous que $2 \leq i \leq n$.

- Montrer que $V(i; n + 1) = V(i - 1; n) + nV(i; n)$.

On pourra distinguer les rangements de $n + 1$ entiers distincts dans $t[0], \dots, t[n]$ suivant que $t[n]$ contient ou non le plus grand de ces $n + 1$ entiers.

- Montrer que la formule précédente s'étend aux cas $i = 1$ et $i = n + 1$.
- Montrer qu'elle est encore vraie si $n = 1$ et $1 \leq i \leq 2$.

(f) On définit le polynôme P_n par

$$P_n(X) = \sum_{i=0}^n V(i; n) X^i.$$

- Montrer que $P_{n+1}(X) = (n + X)P_n(X)$.
- En déduire l'expression de $P_n(X)$.

3. On pose $G_n(X) = \frac{1}{n!} P_n(X)$.

(a) Calculer $G_n(1)$.

(b) Exprimer $G_{n+1}(X)$ à l'aide de $G_n(X)$.

(c) Comparer $G'_n(1)$ et $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

4. Étant donné n entiers distincts deux à deux, on les range aléatoirement dans les n premières cases $t[0], \dots, t[n-1]$.

Tous les rangements possibles constituent les événements élémentaires d'un espace probabilisé muni de la probabilité P , ces rangements étant de probabilités égales.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'affectations de la variable maximum au cours de l'exécution de Recherche(n, t).

(a) Déterminer $P(X_n = 1)$ et, de façon générale, exprimer $P(X_n = i)$ à l'aide de $V(i; n)$ et de n lorsque $i \in I_n$.

(b) Déterminer l'espérance de X_n .

(c) Montrer que, si $n \geq 2$, alors

$$P(X_n = 2) = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right).$$

Donner un équivalent simple de $P(X_n = 2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. (a) Si $i \in I_n$, montrer que

$$(n+1)P(X_{n+1} = i) - nP(X_n = i) = P(X_n = i-1).$$

(b) En utilisant les résultats de la partie I.B, montrer par récurrence sur i que, pour tout entier $i \geq 1$ fixé,

$$P(X_n = i) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^{i-1}}{(i-1)! n}.$$

Partie III : Calcul de l'inverse d'une certaine matrice

On désigne toujours par n un entier naturel non nul, et $V(i; n)$ conserve la signification qui lui a été attribuée dans la partie II. On convient que $V(0; 0) = 1$ et que $V(i; 0) = 0$ pour tout $i \in I_n$.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$a_{ij} = (-1)^{j-i} V(i-1; j-1) \quad (1 \leq i, j \leq n+1).$$

Cette partie utilise certains résultats des parties I et II.

1. Montrer que

$$X(X-1)\cdots(X-n+1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} V(k; n) X^k.$$

2. On définit les polynômes $N_0(X) = 1$ et, pour tout $j \in I_n$,

$$N_j(X) = X(X-1)\cdots(X-j+1); \text{ en particulier, } N_1(X) = X.$$

(a) Montrer que $(N_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Quelle est la matrice de passage de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ à $(N_i)_{0 \leq i \leq n}$?

3. (a) Montrer que A est inversible.

Pour tout $(i, j) \in I_{n+1}^2$, l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de A^{-1} est noté $\omega(i-1; j-1)$.

(b) Montrer que

$$X^n = \sum_{k=0}^n \omega(k; n) N_k(X).$$

4. (a) Pour tout $p \in \{0, 1, \dots, n\}$, comparer p^n et

$$\sum_{k=0}^p k! \omega(k; n) \binom{p}{k}.$$

(b) En utilisant les résultats de la partie I.A, donner une expression de $\omega(k; n)$.

Partie IV : Interprétation des nombres $\omega(k; n)$

Dans cette partie, n désigne encore un entier naturel non nul.

Soit k un entier naturel non nul. On appelle k -partition de I_n tout ensemble $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ dont les éléments A_i sont des parties non vides de I_n , deux à deux disjointes et dont la réunion est I_n . Les blocs de cette partition ne sont pas ordonnés.

On note $s(k; n)$ le nombre de k -partitions de I_n et on convient que $s(0; n) = 0$.

1. Déterminer $s(1; 1)$, $s(n; n)$, $s(1; n)$ et $s(k; n)$ lorsque $k > n$.

2. Soit p un entier naturel non nul.

(a) Déterminer le nombre de n -listes dont les éléments appartiennent à I_p . On rappelle que, dans une telle liste, les éléments ne sont pas forcément distincts.

(b) Soit $k \in I_p$. Déterminer le nombre de n -listes dont les éléments appartiennent à $\{1, \dots, k\}$, chacun des nombres $1, \dots, k$ apparaissant au moins une fois dans la liste.

(c) Montrer que

$$p^n = \sum_{k=0}^p k! s(k; n) \binom{p}{k}.$$

3. Comparer $s(k; n)$ et $\omega(k; n)$ lorsque $k \in \{0, \dots, n\}$.