



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 1998

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Cadre probabiliste

Question adaptée au programme actuel — préambule. La covariance est définie pour toutes les variables considérées admettant un moment d'ordre 2, qu'elles soient discrètes ou à densité. Cela permet notamment d'appliquer les propriétés rappelées aux variables géométriques de la partie 3. Il n'est pas nécessaire que le produit de deux variables possède une densité.

L'existence des produits utilisés est justifiée par $|UV| \leq \frac{1}{2}(U^2 + V^2)$: si U et V ont un moment d'ordre 2, alors $E(|UV|) < +\infty$.

De même, pour des coefficients réels $a_1, \dots, a_n$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ donne :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i R_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n R_i^2 \right).$$

Toute combinaison linéaire finie des rendements possède donc un moment d'ordre 2. Ses espérance, variance et covariances sont bien définies. Les propriétés de covariance rappelées dans le sujet peuvent être utilisées sans démonstration.

Préliminaire

1. Calcul de la variance en Python

Code adapté en Python. Les indices des tableaux Python commencent à 0 : le coefficient $Q[i]$ représente x_{i+1} et $A[i, j]$ représente $\text{Cov}(R_{i+1}, R_{j+1})$.

Méthode 1 — La formule diagonale et les couples d'indices

On additionne d'abord les contributions $x_i^2 V(R_i)$, puis deux fois les contributions $x_i x_j \text{Cov}(R_i, R_j)$ avec $i < j$.

Python

```
import numpy as np

n = 5

A = np.zeros((n, n))

# Renseigner A avec les covariances avant d'utiliser V.

def V(Q):
    variance = 0.0
    for i in range(n):
        variance = variance + Q[i] ** 2 * A[i, i]
        for j in range(i + 1, n):
            variance = variance + 2 * Q[i] * Q[j] * A[i, j]
    return variance
```

La boucle `range(n)` parcourt les indices de 0 à $n - 1$. La boucle `range(i + 1, n)` parcourt exactement les indices $j > i$ et ne compte donc aucun couple deux fois. Sur la diagonale, $A[i, i] = V(R_{i+1})$.

La valeur renvoyée est exactement la variance demandée.

Méthode 2 — La somme sur tous les couples

La symétrie de la covariance permet de réécrire la formule sous la forme :

$$V(R) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \text{Cov}(R_i, R_j).$$

Les termes de la diagonale sont les contributions de variance ; chaque terme avec $i < j$ est associé à un terme égal avec $j < i$.

Python

```
import numpy as np

n = 5

A = np.zeros((n, n))

# Renseigner A avec les covariances avant d'utiliser V.

def V(Q):
    variance = 0.0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            variance = variance + Q[i] * A[i, j] * Q[j]
    return variance
```

Cette version renvoie la même variance. Les deux codes ont été exécutés sur des exemples de matrices de covariance, et leurs résultats ont été comparés au calcul direct des sommes.

2. Existence d'un portefeuille optimal

L'ensemble H est non vide : $(1, 0, \dots, 0) \in H$.

Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in H$, les coordonnées sont positives ou nulles et leur somme vaut

1. Ainsi, pour chaque i :

$$0 \leq x_i \leq \sum_{j=1}^n x_j = 1.$$

Donc $H \subset [0, 1]^n$ et H est borné. Il est fermé par l'hypothèse de l'énoncé.

La fonction F est polynomiale en ses n variables, donc continue sur $\mathbb{R}^n$ et sur H . Une fonction continue sur une partie non vide, fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ atteint son minimum.

Il existe donc un portefeuille $Q_* \in H$ tel que $F(Q_*) \leq F(Q)$ pour tout $Q \in H$. Le rendement de ce portefeuille possède une variance minimale.

Partie 1

1. Encadrement de la covariance

Méthode 1 — L'inégalité de covariance

Les moments d'ordre 2 existent. On applique donc la propriété rappelée dans l'énoncé :

$$|c| = |\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)} = \sqrt{12 \times 3} = 6.$$

Ainsi $c \in [-6, 6]$.

Méthode 2 — La positivité de deux variances

Les variables $X + 2Y$ et $X - 2Y$ possèdent un moment d'ordre 2. On a :

$$V(X + 2Y) = 12 + 4 \times 3 + 4c = 24 + 4c \geq 0,$$

$$V(X - 2Y) = 12 + 4 \times 3 - 4c = 24 - 4c \geq 0.$$

La première inégalité donne $c \geq -6$, la seconde $c \leq 6$. On retrouve $|c| \leq 6$.

2. (a) Expression de la variance

On utilise la variance d'une combinaison linéaire de deux variables :

$$V(R) = a^2V(X) + (1-a)^2V(Y) + 2a(1-a)\text{Cov}(X, Y).$$

En remplaçant les données puis en développant :

$$V(R) = 12a^2 + 3(1-2a+a^2) + 2ca - 2ca^2,$$

$$V(R) = (15-2c)a^2 + 2(c-3)a + 3.$$

C'est l'expression demandée, valable pour tout $a \in [0, 1]$.

2. (b) Variations et unique portefeuille optimal

Méthode 1 — La dérivée et sa racine

D'après la question 1, $15-2c \geq 3 > 0$. Posons :

$$\alpha = \frac{3-c}{15-2c}.$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$h'(x) = 2(15-2c)x + 2(c-3) = 2(15-2c)(x-\alpha).$$

Si $-6 \leq c < 3$, on a $\alpha > 0$. De plus :

$$1-\alpha = \frac{12-c}{15-2c} > 0,$$

puisque $c \leq 6 < 12$. Ainsi $0 < \alpha < 1$. Le signe de h' montre que h est strictement décroissante sur $[0, \alpha]$, puis strictement croissante sur $[\alpha, 1]$. Son minimum est atteint uniquement en α .

Si $3 \leq c \leq 6$, alors $\alpha \leq 0$. Pour tout $x \in]0, 1]$, $h'(x) > 0$; à $x = 0$, la dérivée est positive si $c > 3$ et nulle si $c = 3$. La fonction reste strictement croissante sur $[0, 1]$ et son minimum est atteint uniquement en 0.

L'unique portefeuille optimal est donc :

$$\left(\frac{3-c}{15-2c}, \frac{12-c}{15-2c} \right) \quad \text{si } -6 \leq c < 3,$$

$$(0, 1) \quad \text{si } 3 \leq c \leq 6.$$

Méthode 2 — La forme canonique et la distance au sommet

Complétons le carré, en utilisant $15 - 2c > 0$:

$$h(x) = (15 - 2c)(x - \alpha)^2 + 3 - \frac{(c - 3)^2}{15 - 2c}.$$

Le minimum sur $[0, 1]$ correspond au point de cet intervalle le plus proche de α . Si $c < 3$, le point α appartient à $]0, 1[$, donc il est l'unique minimiseur. Si $c \geq 3$, $\alpha \leq 0$, et le point de $[0, 1]$ le plus proche de α est uniquement 0.

Cette représentation montre également les variations : le carré de la distance à α diminue jusqu'à α puis augmente ; si $\alpha \leq 0$, il augmente sur $[0, 1]$.

Dans le premier cas, la variance minimale vaut :

$$3 - \frac{(c - 3)^2}{15 - 2c} = \frac{36 - c^2}{15 - 2c}.$$

Dans le second cas, elle vaut $h(0) = 3$. Les deux valeurs coïncident pour $c = 3$; le portefeuille optimal y est bien $(0, 1)$.

3. (a) Le cas de covariance -6

Rectification de l'énoncé : la question porte sur la variable aléatoire R , et non sur une « variance aléatoire R ».

Puisque $c = -6 < 3$, la question précédente donne :

$$a = \frac{3 + 6}{15 + 12} = \frac{1}{3}, \quad 1 - a = \frac{2}{3}.$$

L'unique portefeuille optimal est $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ et sa variance est :

$$V(R) = \frac{36 - (-6)^2}{15 - 2(-6)} = 0.$$

On peut vérifier ce résultat directement :

$$V(R) = 27a^2 - 18a + 3 = 3(3a - 1)^2.$$

Pour préciser la loi du rendement, notons $m = E(R) = \frac{1}{3}E(X) + \frac{2}{3}E(Y)$. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour chaque entier $k \geq 1$:

$$P\left(|R - m| \geq \frac{1}{k}\right) \leq k^2 V(R) = 0.$$

Les événements $\{|R - m| \geq 1/k\}$ sont croissants en k et leur réunion est $\{|R - m| > 0\}$.

La continuité monotone des probabilités donne $P(R \neq m) = 0$.

Le rendement est donc presque sûrement constant, égal à m . Les données ne permettent pas de chiffrer cette constante.

3. (b) Le cas de rendements indépendants

Méthode 1 — La formule générale

L'indépendance de X et Y , qui possèdent des moments d'ordre 2, implique $c = 0$.

Comme $0 < 3$, la question 2. (b) donne :

$$a = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}, \quad 1 - a = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

Le portefeuille $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ est donc l'unique portefeuille optimal.

Méthode 2 — L'absence de terme de covariance

L'indépendance donne directement :

$$V(R) = 12a^2 + 3(1-a)^2 = 15 \left(a - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{12}{5}.$$

Le carré est nul uniquement pour $a = 1/5$, qui appartient à $[0, 1]$. Le portefeuille optimal est bien $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ et sa variance vaut $12/5$.

4. Rendements gaussiens

Les transformations affines de variables normales restent normales. Les variables $X/5$ et $4Y/5$ sont indépendantes car X et Y le sont. Leur somme est donc normale.

Sa moyenne et sa variance sont :

$$E(R) = \frac{1}{5} \times 6 + \frac{4}{5} \times 3 = \frac{18}{5},$$

$$V(R) = \frac{1}{25} \times 12 + \frac{16}{25} \times 3 = \frac{12}{5}.$$

Ainsi R suit la loi normale de moyenne $18/5$ et de variance $12/5$, notée $\mathcal{N}(18/5, 12/5)$ avec cette convention pour le second paramètre.

La variable $G = \frac{R - 18/5}{\sqrt{12/5}}$ suit $\mathcal{N}(0, 1)$. Le seuil standardisé vaut :

$$\frac{4 - 18/5}{\sqrt{12/5}} = \frac{2/5}{\sqrt{60/5}} = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Comme la loi normale ne possède pas d'atome :

$$P(R \geq 4) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) \simeq 1 - 0,60 = 0,40.$$

La probabilité demandée est donc d'environ 40 %. La valeur 0,60 donnée dans le PDF est une valeur arrondie, et non une égalité exacte.

5. (a) Moments des rendements uniformes

Méthode 1 — Les moments des lois uniformes

Une variable uniforme sur un intervalle $[u, v]$, avec $u < v$, possède tous ses moments, car elle est bornée. Son espérance vaut $(u + v)/2$ et sa variance $(v - u)^2/12$.

Par conséquent :

$$E(X) = 6, \quad V(X) = \frac{12^2}{12} = 12,$$

$$E(Y) = 3, \quad V(Y) = \frac{6^2}{12} = 3.$$

Méthode 2 — Le transfert et les intégrales

Les densités de X et de Y sont respectivement $1/12$ sur $[0, 12]$ et $1/6$ sur $[0, 6]$, et nulles ailleurs. Les intégrales sont sur des segments, donc convergent.

$$E(X) = \frac{1}{12} \int_0^{12} t \, dt = \frac{1}{12} \times \frac{12^2}{2} = 6,$$

$$E(X^2) = \frac{1}{12} \int_0^{12} t^2 \, dt = \frac{1}{12} \times \frac{12^3}{3} = 48.$$

$$\text{Ainsi } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 48 - 36 = 12.$$

De même :

$$E(Y) = \frac{1}{6} \int_0^6 t \, dt = 3, \quad E(Y^2) = \frac{1}{6} \int_0^6 t^2 \, dt = 12,$$

$$\text{et } V(Y) = 12 - 9 = 3.$$

5. (b) Loi de $4Y$ et densité de $X + 4Y$

Posons $W = 4Y$ et $S = X + W$. Par transformation affine d'une loi uniforme, W suit la loi uniforme sur $[0, 24]$.

On peut le vérifier par sa fonction de répartition : pour $0 \leq w \leq 24$,

$P(W \leq w) = P(Y \leq w/4) = w/24$. Cette probabilité vaut 0 pour $w < 0$ et 1 pour $w \geq 24$.

Une densité de W est donc $1/24$ sur $[0, 24]$ et nulle ailleurs.

Le lemme des coalitions assure que X et $W = 4Y$ sont indépendantes. Leurs densités sont bornées, nulles hors de segments et continues sauf en un nombre fini de points. On peut appliquer la formule de convolution.

Pour tout réel s , une densité de S est :

$$g(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_W(s-t) dt.$$

L'intégrande vaut $1/288$ lorsque $0 \leq t \leq 12$ et $0 \leq s-t \leq 24$, c'est-à-dire lorsque :

$$\max(0, s-24) \leq t \leq \min(12, s).$$

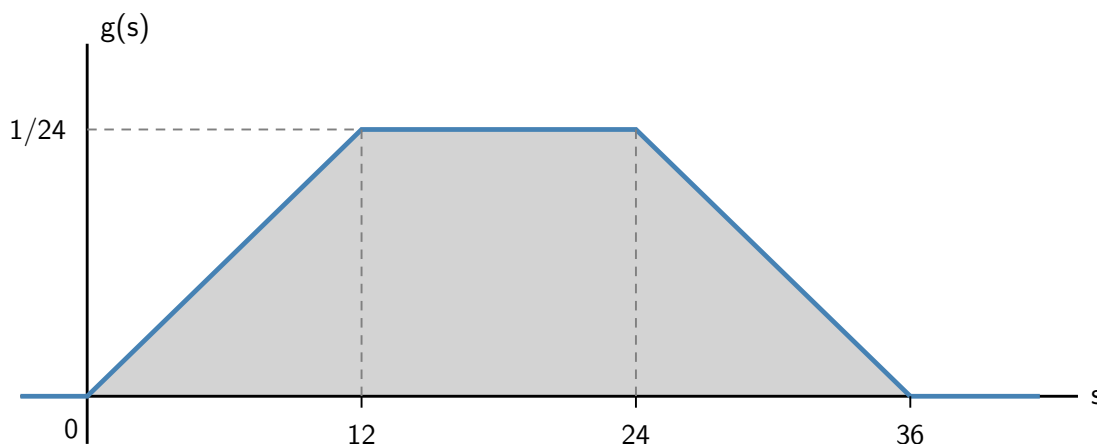
L'intégrale est la longueur de cet intervalle, si cette longueur est positive, divisée par 288. On obtient :

$$g(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0, \\ \frac{s}{288} & \text{si } 0 \leq s \leq 12, \\ \frac{1}{24} & \text{si } 12 \leq s \leq 24, \\ \frac{36-s}{288} & \text{si } 24 \leq s \leq 36, \\ 0 & \text{si } s > 36. \end{cases}$$

Les expressions coïncident aux points 0, 12, 24, 36. La fonction est continue et positive ou nulle. Son intégrale vaut :

$$\int_{\mathbb{R}} g(s) ds = \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{1}{24} + 12 \times \frac{1}{24} + \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{1}{24} = 1.$$

Le graphe est un trapèze : il monte linéairement de $(0, 0)$ à $(12, 1/24)$, reste horizontal jusqu'à $(24, 1/24)$, puis descend jusqu'à $(36, 0)$. La densité est nulle ailleurs.



5. (c) Probabilité d'un rendement supérieur à 4

On a $R = S/5$. Ainsi $R > 4$ équivaut à $S > 20$.

Méthode 1 — L'intégration de la densité

Le seuil 20 appartient au plateau de la densité. On sépare donc l'intégrale en 24 :

$$P(R > 4) = \int_{20}^{24} \frac{1}{24} ds + \int_{24}^{36} \frac{36-s}{288} ds.$$

La première intégrale vaut $4/24 = 1/6$. Pour la seconde :

$$\int_{24}^{36} \frac{36-s}{288} ds = \frac{1}{288} \left[36s - \frac{s^2}{2} \right]_{24}^{36} = \frac{72}{288} = \frac{1}{4}.$$

On conclut :

$$P(R > 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

Méthode 2 — La symétrie des deux lois uniformes

La variable $12 - X$ suit la même loi que X , et $24 - W$ la même loi que W . Ces deux variables sont indépendantes, par le lemme des coalitions. Leur somme $36 - S$ suit donc la même loi que S .

Ainsi $P(S > 20) = P(36 - S > 20) = P(S < 16)$. Comme S possède une densité, une probabilité ponctuelle est nulle et :

$$P(S < 16) = \int_0^{12} \frac{s}{288} ds + \int_{12}^{16} \frac{1}{24} ds = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}.$$

On retrouve la même valeur exacte.

Partie 2

1. Réduction à une fonction de deux variables et représentation de K

Les contraintes du portefeuille sont $x, y, z \geq 0$ et $x + y + z = 1$. Elles équivalent à $(x, y) \in K$ et $z = 1 - x - y$. Chaque point de K correspond donc à un et un seul portefeuille.

La formule de variance donne, avec les signes des covariances indiqués :

$$V(R) = 2x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 2xy + 4xz + 2yz.$$

Remplaçons z par $1 - x - y$:

$$V(R) = 2x^2 + 6y^2 + 6(1 - x - y)^2 - 2xy + 4x(1 - x - y) + 2y(1 - x - y).$$

En développant les différents termes :

$$6(1 - x - y)^2 = 6 + 6x^2 + 6y^2 - 12x - 12y + 12xy,$$

$$4x(1 - x - y) = 4x - 4x^2 - 4xy,$$

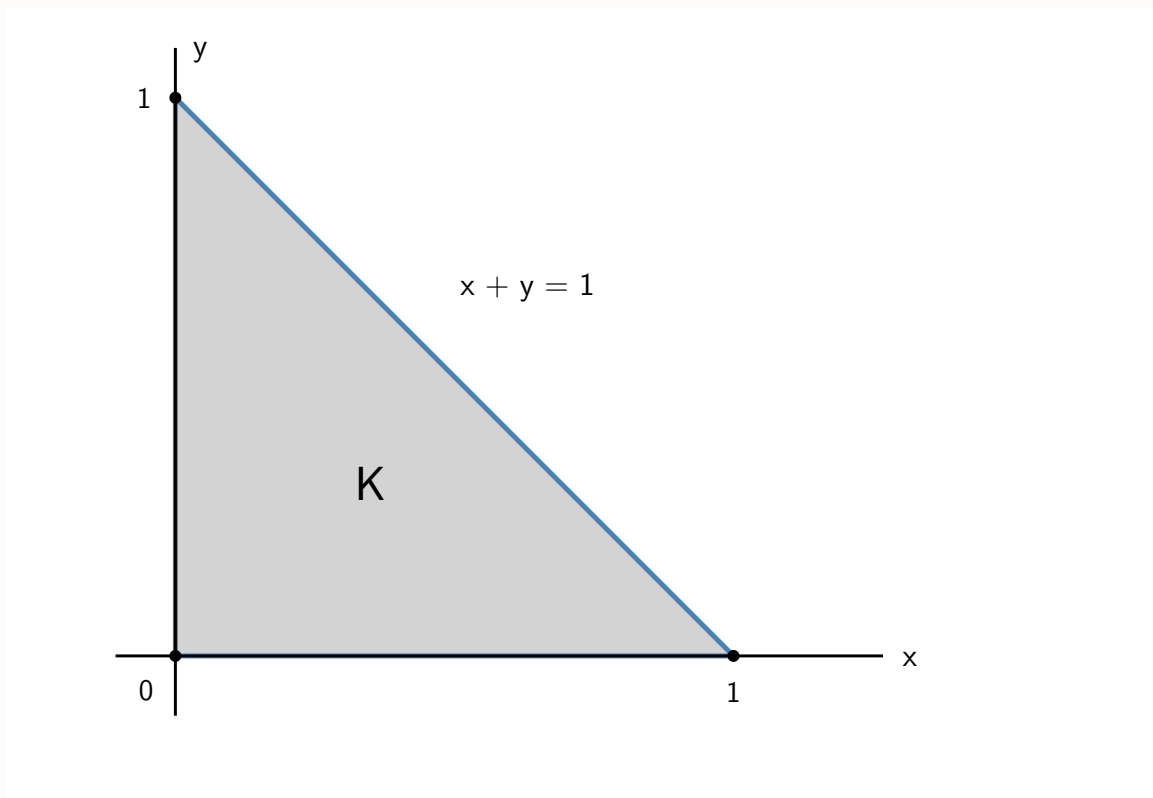
$$2y(1 - x - y) = 2y - 2xy - 2y^2.$$

Le regroupement donne :

$$V(R) = 4x^2 + 10y^2 + 4xy - 8x - 10y + 6 = f(x, y).$$

Le problème du gestionnaire est donc exactement la minimisation de f sur K .

Le domaine K est le triangle fermé de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$, situé dans le premier quadrant et sous la droite $x + y = 1$. Les trois côtés et les sommets appartiennent à K .



2. (a) Minimum local sur $\mathbb{R}^2$

Méthode 1 — Le gradient et la hessienne

La fonction f est polynomiale, donc de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Son gradient est :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 8x + 4y - 8 \\ 4x + 20y - 10 \end{pmatrix}.$$

Un point critique doit vérifier :

$$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ 2x + 10y = 5. \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, $9y = 3$, donc $y = 1/3$. La première équation donne $x = 5/6$. Il existe un seul point critique :

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{3}\right).$$

La hessienne, constante, est :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Étudions directement sa forme quadratique. Pour $(u, v) \neq (0, 0)$:

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \nabla^2 f \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 8u^2 + 8uv + 20v^2 = 8 \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + 18v^2 > 0.$$

En effet, si $v \neq 0$, le second terme est strictement positif ; si $v = 0$, alors $u \neq 0$ et le premier terme est strictement positif. La hessienne est donc définie positive. Si $H_f T = \lambda T$ avec $T \neq 0$, alors ${}^t T H_f T = \lambda {}^t T T > 0$, ce qui montre que toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Le critère de la hessienne donne un minimum local strict en $(5/6, 1/3)$.

Méthode 2 — Une identité exacte de différence

On vérifie $f(5/6, 1/3) = 1$. Posons $u = x - 5/6$ et $v = y - 1/3$. En développant et en utilisant l'annulation des termes linéaires au point critique :

$$f(x, y) = 1 + 4u^2 + 4uv + 10v^2 = 1 + 4\left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + 9v^2.$$

Les deux carrés sont positifs ou nuls. Ils sont simultanément nuls uniquement pour $v = 0$ et $u = 0$.

Ainsi $f(x, y) \geq 1$, avec égalité uniquement en $(5/6, 1/3)$. Ce point est même l'unique minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$, et donc un minimum local strict.

2. (b) Absence de minimum sur K_0

L'ensemble K_0 est ouvert et f y est de classe C^1 . Si f atteignait un minimum sur K_0 en un point (a, b) , ce point serait un minimum local sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La condition nécessaire du premier ordre donnerait $\nabla f(a, b) = 0$.

Or le seul point critique est $(5/6, 1/3)$ et :

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{3} = \frac{7}{6} > 1.$$

Ce point n'appartient pas à K_0 . Aucun minimum ne peut donc être atteint sur K_0 .

Cela ne signifie pas que f n'y est pas minorée : son infimum existe, mais n'est pas atteint.

3. (a) Minimum sur chacun des trois côtés

Sur K_1 , $x = 0$ et $y \in [0, 1]$. On a :

$$f(0, y) = 10y^2 - 10y + 6 = 10\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}.$$

Le point $y = 1/2$ appartient à l'intervalle. Le minimum sur K_1 est $7/2$, atteint uniquement en $(0, 1/2)$.

Sur K_2 , $y = 0$ et $x \in [0, 1]$. On a :

$$f(x, 0) = 4x^2 - 8x + 6 = 4(x - 1)^2 + 2.$$

Le minimum sur K_2 est 2, atteint uniquement en $(1, 0)$, même si ce point est une extrémité du segment.

Sur K_3 , $y = 1 - x$ et $x \in [0, 1]$. On développe :

$$f(x, 1 - x) = 4x^2 + 10(1 - 2x + x^2) + 4x - 4x^2 - 8x - 10 + 10x + 6,$$

$$f(x, 1 - x) = 10x^2 - 14x + 6 = 10 \left(x - \frac{7}{10} \right)^2 + \frac{11}{10}.$$

Le point $x = 7/10$ appartient à $[0, 1]$. Le minimum sur K_3 est donc $11/10$, atteint uniquement en $(7/10, 3/10)$.

Les trois minimums sont respectivement $7/2$, 2 et $11/10$.

3. (b) Unique portefeuille optimal

Par le préliminaire et la correspondance établie à la question 1, f atteint un minimum sur K .

Un point de K situé hors de $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ vérifie $x > 0$, $y > 0$ et $x + y < 1$: il appartient donc à K_0 . La question 2. (b) exclut qu'un minimiseur appartienne à K_0 . Tout minimiseur est donc situé sur l'un des trois côtés.

On compare leurs minimums :

$$\frac{11}{10} < 2 < \frac{7}{2}.$$

Le minimum global sur K est $11/10$, et il est atteint uniquement en $(x, y) = (7/10, 3/10)$.

La troisième proportion est $z = 1 - x - y = 0$.

L'unique portefeuille de variance minimale est donc :

$$\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}, 0\right), \quad V(R_{\text{opt}}) = \frac{11}{10}.$$

Partie 3

1. (a) Variance de la somme et encadrement de c

Les trois variances valent 1 et les trois covariances valent c . La formule de variance d'une somme donne :

$$V(X + Y + Z) = 1 + 1 + 1 + 2(c + c + c) = 3 + 6c.$$

Cette variance est positive ou nulle, donc $3 + 6c \geq 0$, soit $c \geq -1/2$.

Par ailleurs, l'inégalité de covariance donne $|c| \leq \sqrt{1 \times 1} = 1$, donc notamment $c \leq 1$.

On obtient bien $c \in [-1/2, 1]$.

1. (b) Portefeuille optimal lorsque $c \neq 1$

Méthode 1 — La décomposition en carrés centrés

Les contraintes sont $x, y, z \geq 0$ et $x + y + z = 1$. On a :

$$V(R) = x^2 + y^2 + z^2 + 2c(xy + xz + yz).$$

En développant $(x + y + z)^2 = 1$:

$$2(xy + xz + yz) = 1 - (x^2 + y^2 + z^2).$$

Il vient :

$$V(R) = (1 - c)(x^2 + y^2 + z^2) + c.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{3}(x + y + z) + \frac{1}{3} = x^2 + y^2 + z^2 \\ &\quad - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Donc :

$$V(R) = (1 - c) \left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 \right] + \frac{1 + 2c}{3}.$$

Puisque $c \leq 1$ et $c \neq 1$, on a $1 - c > 0$. La somme des carrés est minimale, égale à 0, uniquement lorsque $x = y = z = 1/3$. Ce triplet est un portefeuille admissible.

L'unique portefeuille optimal est $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et sa variance minimale vaut $(1 + 2c)/3$.

Méthode 2 — Cauchy-Schwarz et le cas d'égalité

À partir de l'expression $V(R) = (1 - c)(x^2 + y^2 + z^2) + c$, utilisons Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$ sur les vecteurs (x, y, z) et $(1, 1, 1)$:

$$1 = (x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

Ainsi $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1/3$. L'égalité est obtenue si et seulement si (x, y, z) est proportionnel à $(1, 1, 1)$. La contrainte de somme impose alors $x = y = z = 1/3$.

Comme $1 - c > 0$, on obtient :

$$V(R) \geq \frac{1-c}{3} + c = \frac{1+2c}{3},$$

avec égalité uniquement au portefeuille équipondéré.

Au cas limite $c = -1/2$, cette variance minimale est nulle. Si l'on considère aussi le cas exclu $c = 1$, la formule donne $V(R) = 1$ pour tous les portefeuilles : l'optimalité n'est alors plus unique.

2. (a) Moments et covariances des rendements

Pour une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p , l'espérance vaut $1/p$ et la variance $(1-p)/p^2$. Les moments d'ordre 2 existent. Avec $p = 1/2$:

$$E(A) = E(B) = E(C) = 2, \quad V(A) = V(B) = V(C) = 2.$$

La linéarité de l'espérance donne :

$$E(X) = E(B) + E(C) = 4,$$

$$E(Y) = E(A) + E(C) + 1 = 5,$$

$$E(Z) = E(A) + E(B) + 2 = 6.$$

Les variables A, B, C sont mutuellement indépendantes ; leurs covariances deux à deux sont donc nulles. L'ajout d'une constante ne modifie ni une variance ni une covariance.

Ainsi :

$$V(X) = V(B) + V(C) = 4,$$

$$V(Y) = V(A) + V(C) = 4, \quad V(Z) = V(A) + V(B) = 4.$$

Par bilinéarité :

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(B + C, A + C) = \text{Cov}(B, A) + \text{Cov}(B, C) + \text{Cov}(C, A) + V(C) = 2,$$

$$\text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}(B + C, A + B) = \text{Cov}(B, A) + V(B) + \text{Cov}(C, A) + \text{Cov}(C, B) = 2,$$

$$\text{Cov}(Y, Z) = \text{Cov}(A + C, A + B) = V(A) + \text{Cov}(A, B) + \text{Cov}(C, A) + \text{Cov}(C, B) = 2.$$

Les espérances sont donc 4, 5, 6, les trois variances 4 et les trois covariances 2.

2. (b) Portefeuille de variance minimale

Méthode 1 — La réduction à la question 1

On ne peut appliquer directement la question 1 aux variables X, Y, Z , car leurs variances valent 4 et non 1. Considérons $\tilde{X} = X/2$, $\tilde{Y} = Y/2$ et $\tilde{Z} = Z/2$.

Leurs variances valent 1 et leurs covariances valent $2/4 = 1/2$. Elles vérifient donc les hypothèses de la question 1 avec $c = 1/2 < 1$.

Pour un portefeuille (x, y, z) , $R = 2(x\tilde{X} + y\tilde{Y} + z\tilde{Z})$, donc sa variance est quatre fois celle de la combinaison normalisée. La multiplication par $4 > 0$ ne change pas les minimiseurs.

L'unique portefeuille optimal est donc $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et sa variance vaut :

$$4 \times \frac{1 + 2 \times (1/2)}{3} = \frac{8}{3}.$$

Méthode 2 — L'expression directe avec A, B, C

En utilisant $x + y + z = 1$, le rendement est :

$$R = x(B + C) + y(A + C + 1) + z(A + B + 2),$$

$$R = (1 - x)A + (1 - y)B + (1 - z)C + y + 2z.$$

L'indépendance de A, B, C et leurs variances égales à 2 donnent :

$$V(R) = 2[(1 - x)^2 + (1 - y)^2 + (1 - z)^2] = 2(1 + x^2 + y^2 + z^2).$$

Puisque

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1/3 + \sum_{u \in \{x, y, z\}} (u - 1/3)^2,$$

on a :

$$V(R) = \frac{8}{3} + 2 \left[\left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(z - \frac{1}{3} \right)^2 \right].$$

Le minimum est atteint uniquement lorsque les trois carrés sont nuls, donc uniquement au portefeuille équilibré. Sa variance minimale est $8/3$.

2. (c) Loi de $A + B + C$ et probabilité du rendement

Posons $S = A + B + C$. Puisque $A, B, C \geq 1$, S prend ses valeurs dans $\{3, 4, 5, \dots\}$.

Méthode 1 — Le dénombrement des triplets

Pour $k \geq 3$, l'événement $\{S = k\}$ est la réunion disjointe des événements $\{A = a, B = b, C = c\}$ tels que $a, b, c \geq 1$ et $a + b + c = k$.

Par indépendance mutuelle, chacun de ces événements a pour probabilité :

$$P(A = a, B = b, C = c) = 2^{-a}2^{-b}2^{-c} = 2^{-k}.$$

Pour chaque $a \in \{1, \dots, k-2\}$, le nombre de couples positifs (b, c) de somme $k - a$ est $k - a - 1$: on choisit $b \in \{1, \dots, k - a - 1\}$ et c est alors imposé.

Le nombre de triplets est donc :

$$\sum_{a=1}^{k-2} (k - a - 1) = 1 + 2 + \dots + (k - 2) = \frac{(k - 1)(k - 2)}{2}.$$

Par conséquent :

$$P(S = k) = \begin{cases} \frac{(k-1)(k-2)}{2^{k+1}} & \text{si } k \in \mathbb{N}, k \geq 3, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Méthode 2 — Deux convolutions discrètes successives

Posons $D = A + B$. Pour $m \geq 2$, l'indépendance de A, B donne :

$$P(D = m) = \sum_{a=1}^{m-1} P(A = a)P(B = m - a) = \sum_{a=1}^{m-1} 2^{-m} = (m-1)2^{-m}.$$

Le lemme des coalitions, appliqué à la famille mutuellement indépendante A, B, C , assure que D et C sont indépendantes. Pour $k \geq 3$:

$$P(S = k) = \sum_{m=2}^{k-1} P(D = m)P(C = k - m) = 2^{-k} \sum_{m=2}^{k-1} (m-1).$$

La somme vaut $(k-2)(k-1)/2$. On retrouve la même loi. Tous les calculs de probabilités ponctuelles portent ici sur des sommes finies.

Pour le portefeuille équipondéré :

$$R = \frac{X + Y + Z}{3} = \frac{2(A + B + C) + 3}{3} = \frac{2}{3}S + 1.$$

Ainsi $R \geq 5$ équivaut à $S \geq 6$. On calcule la probabilité complémentaire :

$$P(S = 3) = \frac{1}{8}, \quad P(S = 4) = \frac{3}{16}, \quad P(S = 5) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}.$$

Donc :

$$P(R \geq 5) = 1 - P(S = 3) - P(S = 4) - P(S = 5) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{16} - \frac{3}{16} = \frac{1}{2}.$$

Partie 4

1. Expression matricielle de la variance

Les coefficients x_i sont ici des réels quelconques ; il n'est pas nécessaire qu'ils constituent un portefeuille. Le rendement

$$T = \sum_{i=1}^n x_i R_i$$

possède un moment d'ordre 2, comme établi dans le cadre probabiliste.

Par le produit matriciel :

$${}^tUMU = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \operatorname{Cov}(R_i, R_j) x_j.$$

Sur la diagonale, $\operatorname{Cov}(R_i, R_i) = V(R_i)$. Hors de la diagonale, la symétrie de la covariance permet de regrouper les termes (i, j) et (j, i) . Il vient :

$${}^tUMU = \sum_{i=1}^n x_i^2 V(R_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \operatorname{Cov}(R_i, R_j) = V(T).$$

L'identité $V(T) = {}^tUMU$ est donc valable pour tout $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2. (a) Diagonalisabilité de M

Pour tous i, j , $M_{ij} = \operatorname{Cov}(R_i, R_j) = \operatorname{Cov}(R_j, R_i) = M_{ji}$. La matrice M est donc réelle et symétrique.

Le théorème spectral réel s'applique : il existe une base orthonormale de vecteurs propres et une matrice de passage P telle que ${}^tPP = I_n$ et :

$$M = PD{}^tP,$$

où D est diagonale réelle. En particulier, M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2. (b) Signe des valeurs propres

Soit λ une valeur propre de M et $U \neq 0$ un vecteur propre associé, de sorte que $MU = \lambda U$.

La question 1 donne, pour

$$T = \sum_i x_i R_i :$$

$$0 \leq V(T) = {}^tUMU = \lambda {}^tUU.$$

Or

$${}^tUU = \sum_i x_i^2 > 0$$

puisque $U \neq 0$. En divisant par cette quantité strictement positive, on obtient $\lambda \geq 0$.

Toutes les valeurs propres de M sont donc positives ou nulles.

3. (a) Annulation de la forme quadratique

Méthode 1 — La décomposition dans une base orthonormale propre

Comme M est inversible, 0 n'est pas valeur propre : un vecteur propre de valeur propre 0 serait un élément non nul de son noyau. D'après la question 2. (b), toutes les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont donc strictement positives.

Écrivons $M = PD {}^tP$ comme à la question 2. (a), avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, et posons $Y = {}^tPU$.

Alors :

$${}^tUMU = {}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

Si cette somme est nulle, tous les termes positifs ou nuls sont nuls. Puisque $\lambda_i > 0$, chaque y_i est nul, donc $Y = 0$. Comme P est inversible et $U = PY$, on conclut $U = 0$.

Méthode 2 — L'inégalité de covariance

Supposons ${}^tUMU = 0$ et posons

$$T = \sum_i x_i R_i.$$

D'après la question 1, $V(T) = 0$.

Pour chaque j , l'inégalité de covariance donne :

$$|\text{Cov}(R_j, T)| \leq \sqrt{V(R_j)V(T)} = 0.$$

Par linéarité de la covariance dans sa seconde variable, obtenue par symétrie puis linéarité dans la première :

$$\text{Cov}(R_j, T) = \sum_{i=1}^n x_i \text{Cov}(R_j, R_i) = (MU)_j.$$

Ainsi toutes les coordonnées de MU sont nulles. Comme M est inversible, $MU = 0$ entraîne $U = 0$.

3. (b) Produit scalaire

Rectification de l'énoncé : les deux arguments de φ sont notés U et W de manière cohérente.

L'application $\varphi(U, W) = {}^tUMW$ est bilinéaire. Par exemple, pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $U_1, U_2, W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\varphi(aU_1 + bU_2, W) = a\varphi(U_1, W) + b\varphi(U_2, W).$$

La linéarité dans le second argument se vérifie de la même façon par la distributivité du produit matriciel.

Elle est symétrique, puisque M est symétrique :

$$\varphi(W, U) = {}^tWMU = {}^t({}^tWMU) = {}^tU{}^tMW = {}^tUMW = \varphi(U, W).$$

La transposée d'une matrice à un seul coefficient ne change pas ce coefficient, ce qui justifie la deuxième égalité.

Enfin, la question 1 donne $\varphi(U, U) \geq 0$ pour tout U , et la question 3. (a) montre que $\varphi(U, U) = 0$ implique $U = 0$. Réciproquement, $U = 0$ donne $\varphi(U, U) = 0$.

L'application φ est donc bilinéaire, symétrique et définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Sa norme associée est :

$$N(U) = \sqrt{\varphi(U, U)} = \sqrt{UMU}.$$

3. (c) Identité sur les normes

Rectification de l'énoncé : le terme $N(V)^2$ du PDF est remplacé par $N(W)^2$, puisque l'identité porte sur U et W .

La bilinéarité et la symétrie donnent :

$$N\left(\frac{U+W}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\varphi(U+W, U+W) = \frac{1}{4}[N(U)^2 + 2\varphi(U, W) + N(W)^2],$$

$$N\left(\frac{U-W}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\varphi(U-W, U-W) = \frac{1}{4}[N(U)^2 - 2\varphi(U, W) + N(W)^2].$$

En additionnant les deux égalités, les termes mixtes s'annulent :

$$N\left(\frac{U+W}{2}\right)^2 + N\left(\frac{U-W}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}[N(U)^2 + N(W)^2].$$

On isole le premier terme pour obtenir exactement :

$$\left[N\left(\frac{U+W}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}[(N(U))^2 + (N(W))^2] - \left[N\left(\frac{U-W}{2}\right)\right]^2.$$

3. (d) Unicité du portefeuille optimal

Le préliminaire garantit l'existence d'un portefeuille de variance minimale. Notons m cette variance minimale.

Supposons que deux portefeuilles distincts, représentés par les colonnes U et W , réalisent ce minimum. D'après la question 1 :

$$N(U)^2 = N(W)^2 = m.$$

La colonne $(U + W)/2$ représente aussi un portefeuille : ses coordonnées sont positives ou nulles et leur somme vaut $(1 + 1)/2 = 1$.

L'identité de la question précédente donne pour sa variance :

$$N\left(\frac{U + W}{2}\right)^2 = m - N\left(\frac{U - W}{2}\right)^2.$$

Comme $U \neq W$, $(U - W)/2 \neq 0$. La norme issue d'un produit scalaire est strictement positive sur un vecteur non nul. Par conséquent :

$$N\left(\frac{U + W}{2}\right)^2 < m.$$

Cela contredit la définition de m comme variance minimale parmi les portefeuilles admissibles. Deux portefeuilles distincts ne peuvent donc pas atteindre le minimum.

Lorsque M est inversible, il existe un unique portefeuille de rendement de variance minimale.

Relevé des adaptations

- Préambule : définition et propriétés de la covariance formulées pour toutes les variables admettant un moment d'ordre 2, y compris les variables discrètes de la partie 3. L'hypothèse que le produit possède lui-même une densité est remplacée par l'existence de son espérance, qui suffit et découle des moments d'ordre 2.
- Préliminaire, 1 : code adapté en Python ; les tableaux sont indexés de 0 à $n - 1$ et les consignes explicitent leur correspondance avec les indices mathématiques.

- Partie 1, 3. (a) : correction de la coquille « variance aléatoire R » en « variable aléatoire R ».
- Partie 1, 4 : la valeur numérique de la fonction de répartition normale est indiquée comme une approximation, conformément à sa précision de deux décimales.
- Partie 4, 3 : correction de la discordance entre les arguments U, V et U, W dans la définition de φ .
- Partie 4, 3. (c) : remplacement de $N(V)^2$ par $N(W)^2$ dans l'identité, pour la rendre cohérente et correcte.