



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1998

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I : Quelques résultats préliminaires

A

1. (a) Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, le polynôme $P(X+1)$ a un degré au plus égal à n , donc φ est bien définie. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\alpha P + \beta Q)(X) = \alpha P(X+1) + \beta Q(X+1) = \alpha \varphi(P)(X) + \beta \varphi(Q)(X).$$

L'application est donc linéaire. Définissons $\psi(P)(X) = P(X-1)$, qui est également linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. Les substitutions successives donnent $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = \text{Id}$.

Ainsi φ est un automorphisme, d'inverse ψ . Cela vaut aussi pour $n = 0$, où les deux applications sont l'identité sur les polynômes constants.

- (b) La colonne d'indice $j+1$ de M , pour $0 \leq j \leq n$, contient les coordonnées de $\varphi(X^j)$. Par la formule du binôme,

$$\varphi(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i.$$

Par conséquent, en indexant les lignes et les colonnes de la matrice à partir de 1,

$$M_{i+1,j+1} = \begin{cases} \binom{j}{i} & \text{si } 0 \leq i \leq j \leq n, \\ 0 & \text{si } 0 \leq j < i \leq n. \end{cases}$$

La matrice est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux valent 1. Pour $n = 0$, on obtient la matrice (1).

(c) La matrice de l'inverse de φ dans la même base est M^{-1} . Or

$$\varphi^{-1}(X^j) = (X - 1)^j = \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \binom{j}{i} X^i.$$

Ainsi,

$$(M^{-1})_{i+1,j+1} = \begin{cases} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} & \text{si } 0 \leq i \leq j \leq n, \\ 0 & \text{si } 0 \leq j < i \leq n. \end{cases}$$

L'inversibilité est justifiée par a), et aucun calcul de déterminant n'est nécessaire.

2. (a) Posons $a = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$. Le coefficient de la colonne d'indice $p + 1$ de aM vaut

$$(aM)_{p+1} = \sum_{k=0}^n a_k M_{k+1,p+1} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a_k = b_p.$$

Donc $b = aM$, et, puisque M est inversible, $a = bM^{-1}$.

(b) Méthode 1 — Utilisation de la matrice inverse

La colonne d'indice $k + 1$ de M^{-1} a été déterminée en 1.(c). L'égalité $a = bM^{-1}$ donne donc, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$a_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} b_j.$$

Pour $k = 0$, cette expression est $a_0 = b_0$, en accord avec l'hypothèse.

Méthode 2 — Annulation des sommes binomiales

Substituons l'expression des b_j dans la somme proposée. Les sommes étant finies, on peut les réordonner :

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} b_j = \sum_{r=0}^k a_r \sum_{j=r}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{j}{r}.$$

L'identité $\binom{k}{j} \binom{j}{r} = \binom{k}{r} \binom{k-r}{j-r}$ se vérifie en écrivant les factorielles. En posant $\ell = j - r$, la somme intérieure devient

$$\binom{k}{r} \sum_{\ell=0}^{k-r} (-1)^{k-r-\ell} \binom{k-r}{\ell}.$$

Si $r < k$, la formule du binôme donne la valeur $(1 - 1)^{k-r} = 0$ pour la dernière somme. Si $r = k$, la somme contient un seul terme, égal à 1. Seul le terme a_k subsiste. On retrouve donc exactement

$$a_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} b_j.$$

La première méthode suit la consigne et réutilise l'automorphisme de translation ; la seconde explique directement les annulations qui rendent l'inversion possible.

B

On utilise la positivité et la décroissance de g sur $[c, +\infty[$. Même si « positive » est compris au sens large, g est strictement positive sur cet intervalle : si $g(t_0) = 0$ pour un $t_0 \geq c$, alors la décroissance et la positivité imposeraient $g(t) = 0$ pour $t \geq t_0$, rendant l'intégrale impropre convergente. Cela contredirait l'hypothèse. Les divisions par $g(n)$ effectuées pour $n \geq c$ sont donc justifiées.

1. (a) Pour $n \geq q \geq c$ et $t \in [n, n+1]$, la décroissance donne $g(n+1) \leq g(t) \leq g(n)$. La fonction est continue sur ce segment; en intégrant ces inégalités sur un intervalle de longueur 1, on obtient

$$g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t) dt \leq g(n).$$

- (b) En sommant les inégalités de droite de a) pour $n = q, \dots, N-1$, la relation de Chasles donne

$$\int_q^N g(t) dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n).$$

Les inégalités de gauche donnent

$$\sum_{n=q}^{N-1} g(n+1) \leq \int_q^N g(t) dt.$$

Or

$$\sum_{n=q}^{N-1} g(n) = g(q) + \sum_{n=q}^{N-1} g(n+1) - g(N) \leq g(q) + \int_q^N g(t) dt,$$

puisque $g(N) \geq 0$. Les deux bornes demandées sont établies.

2. (a) L'équivalence donnée signifie que $\frac{w_{n+1} - w_n}{g(n)} \rightarrow 1$. Pour $\varepsilon \in]0, 1[$ fixé, il existe donc un entier $q \geq c$ tel que, pour tout $n \geq q$,

$$1 - \varepsilon \leq \frac{w_{n+1} - w_n}{g(n)} \leq 1 + \varepsilon.$$

En multipliant par $g(n) > 0$, on obtient $(1 - \varepsilon)g(n) \leq w_{n+1} - w_n \leq (1 + \varepsilon)g(n)$.

- (b) Sommons les inégalités précédentes pour $n = q, \dots, N-1$, où $N > q$. La somme des

différences de w_n est télescopique :

$$(1 - \varepsilon) \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq w_N - w_q \leq (1 + \varepsilon) \sum_{n=q}^{N-1} g(n).$$

Les coefficients $1 - \varepsilon$ et $1 + \varepsilon$ sont positifs. Les bornes de 1.(b) donnent donc

$$(1 - \varepsilon) \int_q^N g(t) dt + w_q \leq w_N \leq (1 + \varepsilon) \int_q^N g(t) dt + (1 + \varepsilon)g(q) + w_q.$$

Dans la borne inférieure, écrivons $\int_q^N g = \int_1^N g - \int_1^q g$. Dans la borne supérieure,

utilisons $\int_q^N g \leq \int_1^N g$, car $g \geq 0$. On obtient exactement

$$(1 - \varepsilon) \int_1^N g(t) dt - (1 - \varepsilon) \int_1^q g(t) dt + w_q \leq w_N \leq (1 + \varepsilon) \int_1^N g(t) dt + (1 + \varepsilon)g(q) + w_q.$$

3. Posons $F(x) = \int_1^x g(t) dt$ pour $x \geq 1$. La positivité de g rend F croissante. Comme l'intégrale impropre diverge, $F(x)$ tend vers $+\infty$.

Fixons $\varepsilon \in]0, 1[$ et choisissons q comme en 2. Pour N assez grand, $F(N) > 0$ et la division de l'encadrement de 2.(b) donne

$$1 - \varepsilon + \frac{w_q - (1 - \varepsilon)F(q)}{F(N)} \leq \frac{w_N}{F(N)} \leq 1 + \varepsilon + \frac{(1 + \varepsilon)g(q) + w_q}{F(N)}.$$

Une fois ε et q fixés, les deux numérateurs des fractions sont constants ; ces fractions tendent donc vers zéro. Pour démontrer explicitement la convergence vers 1, fixons une

précision $\eta > 0$, prenons $0 < \varepsilon < \min(1, \eta/2)$, puis N assez grand pour que les valeurs absolues des deux fractions soient inférieures à $\eta/2$. Alors $1 - \eta \leq \frac{w_N}{F(N)} \leq 1 + \eta$.

Ainsi $\frac{w_N}{F(N)} \rightarrow 1$, c'est-à-dire

$$w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^n g(t) dt.$$

4. Posons

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Méthode 1 — Application du résultat précédent

Choisissons $w_n = H_n$ et $g(t) = 1/t$ sur $[1, +\infty[$. Cette fonction est positive, continue et décroissante. Son intégrale vaut $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$, qui tend vers $+\infty$.

De plus $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1}$ et $\frac{1/(n+1)}{g(n)} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$. Toutes les hypothèses de 3. sont vérifiées, donc $H_n \sim \ln n$.

Méthode 2 — Encadrement direct de la somme harmonique

La décroissance de $1/t$ donne, en sommant sur les segments $[k, k+1]$ pour $1 \leq k \leq n$,

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n.$$

Pour $k \geq 2$, on a aussi $1/k \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$. En sommant pour $2 \leq k \leq n$ et en ajoutant le premier terme,

$$H_n \leq 1 + \ln n.$$

Pour $n \geq 2$, divisons par $\ln n > 0$. Le rapport $\ln(n+1)/\ln n$ tend vers 1, car $\ln(n+1) = \ln n + \ln(1+1/n)$ et le terme supplémentaire tend vers zéro. La borne supérieure donne $(1 + \ln n)/\ln n \rightarrow 1$. Par encadrement, $H_n/\ln n \rightarrow 1$.

La première méthode applique le lemme demandé ; la seconde donne en plus des bornes explicites pour chaque n .

Partie II : Étude d'un algorithme

Préambule — Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python : le tableau devient une liste dont les indices commencent à zéro, la procédure devient une fonction renvoyant le maximum et la variable est nommée `maximum`. Le nombre d'affectations de cette variable conserve sa signification, initialisation comprise.

Python

```
def Recherche(n, t):
    maximum = t[0]
    for i in range(1, n):
        if t[i] > maximum:
            maximum = t[i]
    return maximum
```

Ce code ne nécessite aucun import. L'appel suppose $n \geq 1$ et une liste contenant au moins n éléments. `range(1, n)` parcourt les indices $1, \dots, n-1$, donc exactement les éléments suivant celui qui a servi à l'initialisation. L'instruction `return` ne constitue pas une nouvelle affectation de `maximum`.

1. À l'initialisation, `maximum` vaut `t[0]`. Après le traitement de l'indice `i`, cette variable vaut le maximum des éléments `t[0], ..., t[i]` : si le nouvel élément dépasse le maximum précédent, il le remplace ; sinon la valeur reste correcte.

Cette propriété est vraie au départ et se conserve à chaque passage dans la boucle. À la fin de `Recherche(10, t)`, on a donc

$\text{maximum} = \max(t[0], \dots, t[9]).$

Les éventuels éléments d'indices supérieurs ou égaux à 10 ne sont pas examinés. Pour un appel général Recherche(n , t), la valeur finale est le maximum des n premiers éléments, y compris lorsque $n = 1$ et que la boucle est vide.

Le code donné dans le sujet et ci-dessus a été exécuté. Les contrôles suivants illustrent la différence entre le maximum des dix premiers éléments et celui de toute la liste :

Python

```
t = [4, -2, 9, 1, 7, 3, 8, 0, 6, 5, 100]
assert Recherche(10, t) == 9
assert Recherche(11, t) == 100
assert Recherche(1, [-7]) == -7
```

Ces exemples vérifient l'exécution ; la propriété de boucle précédente démontre la validité de l'algorithme.

2. (a) Les n entiers étant distincts, on dispose de n choix pour la première case, puis de $n - 1$ pour la deuxième, et ainsi de suite jusqu'à un seul choix pour la dernière. Le nombre de rangements vaut donc $n!$.

Résultat admis dans cette version adaptée : $V(i; n)$ ne dépend pas des valeurs des n entiers, dès lors qu'ils sont distincts. Cette indépendance, déjà admise dans le sujet original, permet de raisonner sur les rangs $1, \dots, n$ plutôt que sur des valeurs particulières. Le remplacement des entiers par leurs rangs conserve effectivement toutes les comparaisons de l'algorithme.

(b) Question adaptée au programme actuel : l'appel fixé à 10 dans le PDF est remplacé par l'appel sur n éléments, conformément au cadre de cette question.

L'initialisation effectue toujours une affectation. Chacune des $n - 1$ autres cases examinées peut en provoquer au plus une. Le nombre total est donc un entier compris entre 1 et $1 + (n - 1) = n$; il appartient bien à I_n .

Les conventions $V(0; n) = 0$ et $V(k; n) = 0$ pour $k > n$ traduisent l'impossibilité d'obtenir ces nombres d'affectations.

- (c) Question adaptée au programme actuel : l'appel est effectué sur n éléments, et les positions de la liste sont indexées à partir de zéro.

La liste commence par n et se poursuit par $n - 1, \dots, 1$. L'initialisation donne `maximum = n`. Aucun élément suivant n'est plus grand, donc aucune affectation dans la boucle n'a lieu. Le nombre total d'affectations est 1, y compris si $n = 1$.

- (d) Pour qu'il n'y ait qu'une affectation, le premier entier doit être le plus grand. Cette condition est nécessaire : sinon, la lecture ultérieure du plus grand entier provoque une nouvelle affectation. Elle est suffisante, puisque tous les éléments suivants sont alors plus petits.

Une fois le plus grand placé en première position, les $n - 1$ autres entiers peuvent être rangés librement. Ainsi $V(1; n) = (n - 1)!$.

Pour obtenir n affectations, chacune des $n - 1$ comparaisons de la boucle doit conduire à un nouveau maximum. La liste doit donc être strictement croissante. Il existe un seul rangement de ce type, d'où $V(n; n) = 1$.

Pour $n = 1$, les deux conclusions coïncident : $V(1; 1) = 0! = 1$.

- (e) Méthode 1 — Distinction selon la dernière case, comme indiqué

Premier point — Cas $2 \leq i \leq n$

On peut travailler sur les entiers $1, \dots, n + 1$ grâce à l'indépendance admise en a). Si le plus grand, $n + 1$, est en dernière position, les n premiers éléments donnent un rangement des n autres entiers. La dernière lecture ajoute exactement une affectation. Il y a donc $V(i - 1; n)$ rangements de ce type donnant i affectations.

Si le plus grand n'est pas en dernière position, notons $r \in \{1, \dots, n\}$ l'entier placé dans cette dernière case. Sa lecture ne provoque aucune affectation, puisque le plus grand a déjà été lu. Les n premiers éléments doivent donc donner exactement i affectations.

Pour chaque r , ces n éléments sont les entiers $\{1, \dots, n + 1\} \setminus \{r\}$; il y a $V(i; n)$ façons de les ranger avec i affectations. En les complétant par r à la fin, on obtient exactement tous les rangements de cette seconde classe. Les n choix de r sont disjoints, donc leur nombre est $nV(i; n)$.

Les deux classes forment une partition des rangements considérés. Par conséquent,

$$V(i; n+1) = V(i-1; n) + nV(i; n).$$

Deuxième point — Valeurs extrêmes de i

Pour $i = 1$, les conventions et d) donnent

$$V(0; n) + nV(1; n) = 0 + n(n-1)! = n! = V(1; n+1).$$

Pour $i = n+1$, on a $V(n; n) + nV(n+1; n) = 1 + 0 = 1 = V(n+1; n+1)$.

La relation s'étend donc aux deux extrémités de l'intervalle des nombres possibles d'affectations.

Troisième point — Cas $n = 1$

Les rangements des deux entiers sont soit décroissant, avec une affectation, soit croissant, avec deux affectations. Ainsi $V(1; 2) = V(2; 2) = 1$. La formule donne respectivement $V(0; 1) + V(1; 1) = 0 + 1 = 1$ et $V(1; 1) + V(2; 1) = 1 + 0 = 1$. Elle est donc encore vraie pour $n = 1$ et $1 \leq i \leq 2$.

Méthode 2 — Insertion du plus petit entier

Partons d'un rangement des n entiers les plus grands, puis insérons le plus petit des $n+1$ entiers. S'il est inséré au début, il provoque l'affectation initiale, puis le premier élément du rangement antérieur provoque une nouvelle affectation. Les autres records sont inchangés : le nombre d'affectations augmente de 1. Il faut donc partir d'un rangement comptant $i-1$ affectations, ce qui donne $V(i-1; n)$ possibilités.

S'il est inséré à l'une des n autres positions, il n'est jamais plus grand que le maximum déjà rencontré. Il ne crée aucun record et ne modifie pas les comparaisons entre les autres éléments. On peut partir de chacun des $V(i; n)$ rangements et choisir l'une des n positions, donnant $nV(i; n)$ possibilités.

L'insertion et la suppression du plus petit sont des opérations inverses. Le dénombrement est donc exact et donne de nouveau $V(i; n+1) = V(i-1; n) + nV(i; n)$, avec les conventions qui couvrent les extrémités.

La première méthode suit l'indication du sujet ; la seconde explique le facteur n par des positions d'insertion sans modification des records.

(f) Premier point — Relation entre les polynômes

Le coefficient constant de P_{n+1} est nul. En utilisant e), puis les conventions sur les indices hors de l'intervalle,

$$P_{n+1}(X) = \sum_{i=1}^{n+1} (V(i-1; n) + nV(i; n))X^i.$$

La première somme est

$$X \sum_{r=0}^n V(r; n)X^r = XP_n(X);$$

la seconde est

$$n \sum_{i=0}^n V(i; n)X^i = nP_n(X).$$

Donc

$$P_{n+1}(X) = (n + X)P_n(X).$$

Second point — Expression du polynôme

Pour $n = 1$, on a $P_1(X) = X$. En appliquant successivement la relation précédente, ou par récurrence sur n ,

$$P_n(X) = X(X+1)\cdots(X+n-1) = \prod_{r=0}^{n-1} (X+r).$$

Le produit ne contient que le facteur X lorsque $n = 1$.

3. (a) D'après l'expression de P_n ,

$$P_n(1) = 1 \cdot 2 \cdots n = n!.$$

Comme $n! > 0$, on obtient $G_n(1) = P_n(1)/n! = 1$.

(b) La relation de 2.(f) donne

$$G_{n+1}(X) = \frac{P_{n+1}(X)}{(n+1)!} = \frac{n+X}{n+1} \frac{P_n(X)}{n!} = \frac{n+X}{n+1} G_n(X).$$

(c) Méthode 1 — Dérivation de la relation de récurrence

Les G_n sont des polynômes, donc dérivables sur $\mathbb{R}$. En dérivant la relation de b) puis en évaluant en 1,

$$G'_{n+1}(1) = \frac{1}{n+1} G_n(1) + \frac{n+1}{n+1} G'_n(1) = \frac{1}{n+1} + G'_n(1).$$

Puisque $G_1(X) = X$, on a $G'_1(1) = 1$. Par récurrence,

$$G'_n(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n.$$

Méthode 2 — Dérivation du produit fini

On a

$$G_n(X) = \frac{1}{n!} \prod_{r=0}^{n-1} (X+r).$$

La formule de dérivation d'un produit fini donne

$$G'_n(1) = \frac{1}{n!} \sum_{r=0}^{n-1} \prod_{\substack{0 \leq \ell \leq n-1 \\ \ell \neq r}} (1 + \ell).$$

Chaque facteur $1 + r$ est non nul. Le produit dans le terme d'indice r vaut $n!/(r+1)$, donc

$$G'_n(1) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{r+1} = H_n.$$

Pour $n = 1$, le produit omettant l'unique facteur est le produit vide, égal à 1, ce qui donne encore le bon résultat.

La première méthode convient à une fonction définie par récurrence ; la seconde utilise sa factorisation explicite. Dans les deux cas, $G'_n(1)$ est exactement la somme harmonique, et non seulement un équivalent.

4. (a) Question adaptée au programme actuel : la définition de X_n utilise Recherche(n , t) au lieu de l'appel fixé à dix éléments dans le PDF.

L'univers comporte $n!$ rangements équiprobables. Exactement $V(i; n)$ d'entre eux donnent i affectations. Ainsi, pour $i \in I_n$,

$$P(X_n = i) = \frac{V(i; n)}{n!}.$$

En particulier, $P(X_n = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Les probabilités sont nulles pour $i = 0$ ou $i > n$ puisque $X_n \in I_n$.

- (b) La variable X_n est bornée entre 1 et n , donc son espérance existe.

Méthode 1 — Coefficients du polynôme G_n

Par définition de l'espérance et par a),

$$E(X_n) = \sum_{i=1}^n i \frac{V(i; n)}{n!}.$$

Or la dérivation du polynôme

$$G_n(X) = \sum_{i=0}^n \frac{V(i; n)}{n!} X^i$$

donne

$$G'_n(1) = \sum_{i=1}^n i \frac{V(i; n)}{n!}.$$

D'après 3.(c),

$$E(X_n) = G'_n(1) = H_n.$$

Méthode 2 — Somme des indicatrices de records

Pour $1 \leq j \leq n$, définissons R_j égal à 1 si l'élément en position j est le plus grand des j premiers éléments, et égal à 0 sinon. En particulier $R_1 = 1$. Une affectation a lieu exactement à chaque record, initialisation comprise, donc

$$X_n = \sum_{j=1}^n R_j.$$

Conditionnellement au choix des j entiers placés dans les j premières positions, leurs $j!$ ordres sont équiprobables : chacun laisse le même nombre $(n - j)!$ de rangements des entiers restants. Leur plus grand élément est donc également susceptible d'occuper chacune des j positions. En particulier, $P(R_j = 1) = 1/j$, quelle que soit la collection choisie ; en sommant sur ces collections, la même probabilité vaut sans conditionnement.

Chaque R_j est une variable de Bernoulli, donc $E(R_j) = 1/j$. La linéarité de l'espérance pour une somme finie donne

$$E(X_n) = \sum_{j=1}^n E(R_j) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = H_n.$$

Aucune indépendance entre ces indicatrices n'est nécessaire pour cette égalité. La première méthode réutilise les polynômes du problème ; la seconde décompose le coût de l'algorithme en contributions de chaque position.

(c) Pour $n \geq 2$, le coefficient de X^2 dans

$$P_n(X) = X \prod_{r=1}^{n-1} (X + r)$$

est le coefficient de X dans le produit des $n - 1$ derniers facteurs. Pour obtenir un terme de degré 1, on prend X dans un seul facteur et le terme constant dans tous les autres.

Ainsi,

$$V(2; n) = \sum_{r=1}^{n-1} \prod_{\substack{1 \leq \ell \leq n-1 \\ \ell \neq r}} \ell = (n-1)! \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r}.$$

Lorsque $n = 2$, le produit vide dans l'unique terme vaut 1, ce qui donne $V(2; 2) = 1$.

Pour tout $n \geq 2$, la division par $n!$ donne

$$P(X_n = 2) = \frac{1}{n} H_{n-1} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right).$$

D'après I.B.4, $H_{n-1} \sim \ln(n-1)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. De plus $\ln(n-1)/\ln n \rightarrow 1$, car $\ln(n-1) = \ln n + \ln(1-1/n)$ pour $n \geq 2$. On conclut

$$P(X_n = 2) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

5. (a) Pour $i \in I_n$, les probabilités déterminées en 4.(a) donnent

$$(n+1)P(X_{n+1} = i) = \frac{V(i; n+1)}{n!}, \quad nP(X_n = i) = \frac{nV(i; n)}{n!}.$$

En soustrayant et en utilisant la relation de 2.(e),

$$(n+1)P(X_{n+1} = i) - nP(X_n = i) = \frac{V(i-1; n)}{n!} = P(X_n = i-1).$$

Pour $i = 1$, le dernier membre est nul, en accord avec la convention et avec $P(X_n = 1) = 1/n$.

(b) L'entier i est fixé; il ne varie pas avec n . Nous procédons par récurrence sur cet entier.

Initialisation : pour $i = 1$, 4.(a) donne exactement $P(X_n = 1) = 1/n$, ce qui est la formule annoncée, puisque $(i-1)! = 0! = 1$ et $(\ln n)^0 = 1$ pour $n > 1$.

Hérédité : fixons $i \geq 2$ et supposons que $P(X_n = i-1) \sim \frac{(\ln n)^{i-2}}{(i-2)!n}$. Posons $w_n = nP(X_n = i)$ pour $n \geq 1$. Pour $n \geq i$, la question a) donne

$$w_{n+1} - w_n = P(X_n = i-1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^{i-2}}{(i-2)!n}.$$

On applique I.B.3 à $g(t) = \frac{(\ln t)^{i-2}}{(i-2)!t}$ sur $[1, +\infty[$. Lorsque $i = 2$, on entend simplement $g(t) = 1/t$; cela évite toute ambiguïté à $t = 1$.

La fonction est continue et positive ou nulle sur cet intervalle, et strictement positive pour $t > 1$. Si $i = 2$, elle est décroissante dès 1. Si $i \geq 3$, posons $r = i - 2 \geq 1$. Pour $t > 1$,

$$g'(t) = \frac{(\ln t)^{r-1}}{r!t^2}(r - \ln t).$$

Elle est donc décroissante sur $[e^r, +\infty[$. Enfin, en vérifiant la dérivée de la primitive,

$$\int_1^x g(t) dt = \frac{(\ln x)^{i-1}}{(i-1)!} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Toutes les hypothèses de I.B.3 sont satisfaites; une relation sur les différences valable à partir de $n \geq i$ suffit à l'équivalence asymptotique requise. Il en résulte

$$w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

En divisant par $n > 0$, on obtient $P(X_n = i) \sim \frac{(\ln n)^{i-1}}{(i-1)! n}$. La récurrence est achevée pour chaque entier $i \geq 1$ fixé.

Partie III : Calcul de l'inverse d'une certaine matrice

Les conventions $V(0; 0) = 1$ et $V(i; 0) = 0$ pour $i \in I_n$ décrivent la première colonne de A .

1. D'après II.2.(f), $P_n(-X) = (-X)(-X+1) \cdots (-X+n-1)$. En extrayant le facteur -1 de chacun des n termes,

$$P_n(-X) = (-1)^n X(X-1) \cdots (X-n+1).$$

D'autre part,

$$P_n(-X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k V(k; n) X^k.$$

En multipliant par $(-1)^n$, on obtient

$$X(X-1) \cdots (X-n+1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} V(k; n) X^k.$$

Les entiers $n+k$ et $n-k$ ont la même parité, puisqu'ils diffèrent de $2k$. Les signes sont donc égaux et l'identité demandée est établie.

2. (a) Pour chaque $j \in \{0, \dots, n\}$, le polynôme N_j est de degré j et de coefficient dominant 1. Il appartient à $\mathbb{R}_n[X]$.

Supposons

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j N_j = 0.$$

Si au moins un coefficient est non nul, choisissons le plus grand indice r tel que $\alpha_r \neq 0$. Le coefficient de X^r dans la somme est α_r , car tous les autres termes non nuls ont un degré strictement inférieur à r . Il ne peut donc pas être nul, ce qui contredit l'égalité au polynôme nul.

Tous les α_j sont donc nuls : la famille est libre. Elle comporte $n + 1$ éléments dans l'espace $\mathbb{R}_n[X]$, de dimension $n + 1$, donc c'est une base.

(b) On utilise la convention selon laquelle la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{N} = (N_0, \dots, N_n)$ a pour colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{B}$.

Pour $j \geq 1$, la question 1. appliquée avec l'entier j donne

$$N_j(X) = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} V(k; j) X^k.$$

Pour $j = 0$, $N_0 = 1$ et la même description est assurée par $V(0; 0) = 1$. Le coefficient de X^{i-1} dans N_{j-1} est donc $(-1)^{j-i} V(i-1; j-1) = a_{ij}$. Pour $i > j$, il vaut zéro par la convention $V(i-1; j-1) = 0$.

La matrice de passage demandée est donc A . Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, les colonnes de coordonnées vérifient précisément

$$[P]_{\mathcal{B}} = A[P]_{\mathcal{N}}.$$

3. (a) Méthode 1 — Matrice de passage entre deux bases

La question 2. montre que A est la matrice de passage entre deux bases d'un même espace vectoriel. Le changement de coordonnées est bijectif : un polynôme possède une

unique colonne de coordonnées dans chacune des deux bases. Sa matrice A est donc inversible.

Méthode 2 — Système triangulaire avec diagonale égale à un

Si $i > j$, le coefficient a_{ij} est nul ; A est triangulaire supérieure. Sur la diagonale, $a_{11} = V(0; 0) = 1$, et pour $j \geq 2$, $a_{jj} = V(j-1; j-1) = 1$ par II.2.(d).

Pour une colonne quelconque $y \in \mathbb{R}^{n+1}$, le système $Az = y$ se résout de la dernière ligne à la première : $z_{n+1} = y_{n+1}$, puis

$$z_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n+1} a_{ij} z_j \quad (i = n, n-1, \dots, 1).$$

Chaque étape détermine une unique coordonnée sans division par zéro. Il existe donc une unique solution pour toute colonne y , ce qui prouve encore que A est inversible.

La première méthode interprète l'inverse comme un changement de base ; la seconde fournit une procédure concrète de résolution utilisant la structure triangulaire.

(b) L'égalité de coordonnées de 2.(b) donne $[P]_{\mathcal{N}} = A^{-1}[P]_{\mathcal{B}}$. Pour $P = X^n$, la colonne $[P]_{\mathcal{B}}$ a tous ses coefficients nuls sauf le dernier, égal à 1.

Les coordonnées de X^n dans $\mathcal{N}$ forment donc la dernière colonne de A^{-1} . Par définition de ω , ce sont $\omega(0; n), \dots, \omega(n; n)$. Ainsi,

$$X^n = \sum_{k=0}^n \omega(k; n) N_k(X).$$

4. (a) Évaluons l'identité de 3.(b) en un entier $p \in \{0, \dots, n\}$. Pour $k > p$, le produit $N_k(p) = p(p-1) \cdots (p-k+1)$ contient le facteur $p-p=0$. Pour $0 \leq k \leq p$, on a

$$N_k(p) = \frac{p!}{(p-k)!} = k! \binom{p}{k},$$

y compris pour $k = 0$, où $N_0(p) = 1$. Par conséquent,

$$p^n = \sum_{k=0}^p k! \omega(k; n) \binom{p}{k}.$$

Lorsque $p = 0$, le membre gauche vaut 0 puisque $n \geq 1$, et l'égalité donne $\omega(0; n) = 0$.

(b) Pour $0 \leq k \leq n$, posons $a_k = k! \omega(k; n)$, et pour $0 \leq p \leq n$, posons $b_p = p^n$. La relation de a) est exactement

$$b_p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a_k.$$

La formule d'inversion établie en I.A.2.(b) donne

$$k! \omega(k; n) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

Comme $k! > 0$, on peut diviser et obtenir

$$\omega(k; n) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \quad (0 \leq k \leq n).$$

Pour $k = 0$, le seul terme est $0^n = 0$, donc $\omega(0; n) = 0$. Pour $k = 1$, la formule donne $\omega(1; n) = 1$. Aucun terme 0^0 ne se présente puisque n est non nul.

Partie IV : Interprétation des nombres $\omega(k; n)$

1. La seule partition de $I_1 = \{1\}$ en un bloc est $\{\{1\}\}$; ainsi $s(1; 1) = 1$.

Une partition de I_n en n blocs non vides doit avoir exactement un élément dans chaque bloc. Elle est donc nécessairement $\{\{1\}, \dots, \{n\}\}$ et $s(n; n) = 1$.

La seule partition en un bloc est $\{I_n\}$, donc $s(1; n) = 1$. Enfin, k blocs disjoints non vides contiennent au moins k éléments; si $k > n$, une telle partition est impossible et $s(k; n) = 0$.

La convention $s(0; n) = 0$ est cohérente avec $n \geq 1$: aucun ensemble vide de blocs ne peut recouvrir I_n .

2. (a) Une n -liste est un élément de I_p^n . Chacune de ses n positions admet p choix indépendants au sens du dénombrement, sans condition de distinction. Le nombre de listes est donc p^n .

(b) Associons à une liste $(u_1, \dots, u_n)$ contenant chacun des symboles $1, \dots, k$ les ensembles

$$A_j = \{r \in I_n : u_r = j\} \quad (1 \leq j \leq k).$$

Chaque A_j est non vide, les ensembles sont deux à deux disjoints et leur réunion est I_n . En oubliant leurs étiquettes, ils constituent une k -partition.

Réciproquement, à partir d'une k -partition de I_n , on attribue bijectivement les étiquettes $1, \dots, k$ à ses k blocs, puis on place en position r l'étiquette du bloc contenant r . Cela fournit une liste où chaque symbole apparaît. Il y a exactement $k!$ façons d'étiqueter les blocs, et elles donnent des listes distinctes.

Ces constructions sont réciproques; le nombre de listes recherché est donc $k! s(k; n)$. Si $k > n$, ce nombre est nul, en accord avec 1.

(c) Classons toutes les p^n listes selon le nombre k de symboles distincts qu'elles utilisent. Pour une valeur $k \in \{1, \dots, p\}$, on choisit les symboles utilisés de $\binom{p}{k}$ façons. Pour chaque ensemble choisi, on peut renommer ses éléments $1, \dots, k$; le nombre de listes utilisant chacun d'entre eux vaut alors $k! s(k; n)$ par b).

Les différentes classes sont disjointes et recouvrent toutes les listes. En ajoutant le terme nul pour $k = 0$, puisque $s(0; n) = 0$, on obtient

$$p^n = \sum_{k=0}^p k! s(k; n) \binom{p}{k}.$$

Les termes d'indices $k > n$ sont nuls ; la formule reste donc valable lorsque $p > n$.

3. Méthode 1 — Unicité fournie par l'inversion binomiale

Pour $p = 1, \dots, n$, la question 2.(c) donne

$$p^n = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} k! s(k; n).$$

Pour $p = 0$, la même égalité vaut : les deux membres sont nuls puisque $n \geq 1$ et $s(0; n) = 0$.

On peut appliquer I.A.2.(b) avec $a_k = k! s(k; n)$ et $b_p = p^n$. Il vient

$$s(k; n) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \quad (0 \leq k \leq n).$$

Cette expression est exactement celle de $\omega(k; n)$ obtenue en III.4.(b). Ainsi $s(k; n) = \omega(k; n)$ pour tous les indices demandés.

Méthode 2 — Identification dans la base des polynômes N_k

Pour tout entier $p \geq 1$, la question 2.(c), les égalités $s(k; n) = 0$ pour $k > n$ et $N_k(p) = k! \binom{p}{k}$ pour $k \leq p$ donnent

$$p^n = \sum_{k=0}^n s(k; n) N_k(p).$$

Pour $k > p$, les termes ajoutés dans cette dernière somme sont nuls parce que $N_k(p) = 0$.

Le polynôme

$$Q(X) = X^n - \sum_{k=0}^n s(k; n) N_k(X)$$

s'annule donc en chaque entier positif. Un polynôme réel non nul de degré au plus n possède au plus n racines distinctes ; comme Q en possède une infinité, il est nul.

On a donc

$$X^n = \sum_{k=0}^n s(k; n) N_k(X).$$

La question III.3.(b) donne déjà

$$X^n = \sum_{k=0}^n \omega(k; n) N_k(X).$$

La famille $(N_0, \dots, N_n)$ est une base, donc les coordonnées sont uniques :

$s(k; n) = \omega(k; n)$ pour $0 \leq k \leq n$.

La première méthode identifie les coefficients par une inversion finie ; la seconde transforme l'identité de dénombrement en une identité polynomiale et utilise l'unicité des coordonnées. Les coefficients de A^{-1} sont ainsi les nombres de partitions décrits dans cette partie.

Relevé des adaptations

- Préambule de II et questions II.1 à II.4 : Code adapté en Python. La procédure devient Recherche(n , t), qui renvoie le maximum des n premiers éléments d'une liste ; les indices commencent à zéro. L'initialisation reste comptée parmi les affectations, comme dans l'algorithme original.

- II.2.(b), II.2.(c) et définition de X_n en II.4 : remplacement des appels incohérents à dix éléments par des appels sur n éléments. L'appel à dix éléments de II.1 est conservé.