



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**HEC / ESCP**

**Mathématiques 2**

**1997**

*Sujet de mathématiques approfondies*

---

**Mathématiques approfondies — Prépa ECG**

Annales de concours · Sujet

## Modèle de reproduction des bactéries

Une éprouvette contient dix bactéries, quatre de type A et six de type B. On les laisse se reproduire en milliers d'exemplaires, en conservant la proportion de chaque type. On prélève ensuite au hasard dix bactéries, que l'on place dans une autre éprouvette. On les laisse se reproduire dans les mêmes conditions, puis on recommence l'expérience.

Que se passe-t-il après un grand nombre d'expériences ? Le modèle probabiliste suivant permet d'étudier cette question.

### Définitions

Pour une variable aléatoire  $X$ , on note  $E(X)$  son espérance lorsqu'elle existe.

On fixe un entier  $N \geq 2$  et un entier  $k_0 \in \{0, \dots, N\}$ . On pose  $p = \frac{k_0}{N}$  et  $q = 1 - p$ .

Les variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 0}$  sont définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et prennent leurs valeurs dans  $\{0, \dots, N\}$ .

La variable  $X_0$  est certaine, égale à  $k_0$ . La variable  $X_1$  suit la loi binomiale de paramètres  $N$  et  $p$ . Par convention, la loi binomiale de paramètres  $N$  et 0 est la loi certaine de valeur 0, et celle de paramètres  $N$  et 1 est la loi certaine de valeur  $N$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout  $k \in \{0, \dots, N\}$  tel que  $P(X_n = k) > 0$ , la loi conditionnelle de  $X_{n+1}$  sachant  $[X_n = k]$  est binomiale de paramètres  $N$  et  $k/N$ . Ainsi, pour  $i \in \{0, \dots, N\}$  :

$$P(X_{n+1} = i \mid X_n = k) = \binom{N}{i} \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i},$$

avec la convention  $0^0 = 1$ .

On suppose aussi l'hypothèse (H) : pour  $n \geq 1$ , toute suite  $(k_1, \dots, k_n) \in \{0, \dots, N\}^n$  dont l'événement  $[X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n]$  a une probabilité strictement positive, et tout  $i \in \{0, \dots, N\}$  :

$$P(X_{n+1} = i \mid X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) = P(X_{n+1} = i \mid X_n = k_n).$$

L'hypothèse (H) n'est nécessaire que pour la question 6 de la partie 1.

On définit  $F_n = \frac{X_n}{N}$  pour tout  $n \geq 0$ .

Préliminaire

Dans l'exemple,  $N$  est le nombre de bactéries prélevées à chaque expérience,  $k_0$  le nombre de bactéries de type A initialement présentes et  $n$  le numéro de l'expérience. Interpréter  $X_n$  et justifier l'utilisation de la loi binomiale par des arguments du cours. Comment interpréter l'hypothèse (H) ?

## Partie 1

---

Dans cette partie,  $N = 3$ .

1. Que dire de  $(X_n)_{n \geq 0}$  si  $k_0 = 0$  ? Si  $k_0 = 3$  ?

On suppose désormais, jusqu'à la fin de cette partie, que  $k_0 = 1$ .

2. Pour  $n \geq 0$ , on pose :

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $U_{n+1} = AU_n$ , où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Soit le vecteur ligne  $V = (0, 1, 2, 3)$ . Calculer  $VA$ .

3. (b) Montrer que  $E(X_n) = VU_n$  pour tout  $n \geq 0$ . En déduire  $E(X_n)$ .

4. (a) On pose  $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $AY_2$  et  $AY_3$  en fonction de  $Y_2$  et  $Y_3$ .

4. (b) Montrer que  $A$  est diagonalisable. Donner ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.

4. (c) Calculer  $A^n$  pour tout entier  $n \geq 0$ .

5. (a) Montrer que, pour tout  $n \geq 0$  :

$$P(X_n = 0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{6} \left(\frac{2}{9}\right)^n,$$

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{2} \left( \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n \right),$$

$$P(X_n = 2) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{2}{3} \right)^n - \left( \frac{2}{9} \right)^n \right),$$

$$P(X_n = 3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} \right)^n + \frac{1}{6} \left( \frac{2}{9} \right)^n.$$

5. (b) Montrer que  $(F_n)_{n \geq 0}$  converge en loi. Quelle est la loi limite ?

6. Pour  $n \geq 1$ , on définit  $B_n = \bigcap_{k=1}^n [X_k \leq 1]$ .

On pose  $x_1 = P(X_1 = 0)$ , et, pour  $k \geq 2$  :

$$x_k = P(X_1 = 1, \dots, X_{k-1} = 1, X_k = 0).$$

Pour  $k \geq 1$ , on pose  $y_k = P(X_1 = 1, \dots, X_k = 1)$ .

6. (a) Exprimer  $x_{k+1}$  et  $y_{k+1}$  en fonction de  $y_k$ . En déduire  $x_n$  et  $y_n$  pour tout  $n \geq 1$ .

6. (b) Montrer que

$$P(B_n) = \sum_{k=1}^n x_k + y_n.$$

En déduire  $P(B_n)$  et sa limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

6. (c) En déduire la probabilité qu'il existe un entier  $n \geq 0$  tel que  $F_n > 0,5$ .

## Partie 2

Dans cette partie,  $N \geq 2$  et  $k_0 \in \{1, \dots, N-1\}$ .

Pour  $n \geq 0$ , on pose  $u_n = P(X_n = 0) + P(X_n = N)$  et  $v_n = 1 - u_n$ .

### A. Loi de $X_n$

1. Pour tout  $n \geq 0$  et tout  $i \in \{0, \dots, N\}$ , montrer que :

$$P(X_{n+1} = i) = \sum_{k=0}^N P(X_n = k) \binom{N}{i} \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i}.$$

2. Montrer que  $E(X_{n+1}) = E(X_n)$  pour tout  $n \geq 0$ .

3. (a) Montrer que, pour tout  $n \geq 0$  :

$$E(X_{n+1}(N - X_{n+1})) = \frac{N-1}{N} E(X_n(N - X_n)).$$

3. (b) En déduire  $E(X_n(N - X_n))$  en fonction de  $n, N, k_0$ .

4. Montrer que  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante et convergente.

5. (a) Soit  $X$  une variable aléatoire positive ou nulle prenant un nombre fini de valeurs. Montrer que, pour tout  $a > 0$  :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

5. (b) Étudier la fonction  $f(x) = x(N - x)$  sur  $[1, N - 1]$ .

5. (c) En utilisant  $E(X_n(N - X_n))$ , montrer que, pour tout  $n \geq 0$  :

$$0 \leq v_n \leq \frac{N^2}{N-1}pq \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

6. (a) Quelle est la limite de  $(v_n)_{n \geq 0}$  ?
6. (b) En déduire que  $P(X_n = k) \rightarrow 0$  pour chaque  $k \in \{1, \dots, N-1\}$ .
6. (c) À l'aide de A.2, montrer que  $P(X_n = N) \rightarrow p$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 0)$ .
6. (d) Montrer que  $(F_n)_{n \geq 0}$  converge en loi. Quelle est la loi limite ?

## B. Temps d'arrêt

On définit la variable aléatoire  $T$  comme suit : si  $X_n \notin \{0, N\}$  pour tout  $n \geq 0$ , alors  $T = 0$ . Sinon,  $T$  est le premier indice  $n \geq 0$  tel que  $X_n \in \{0, N\}$ .

1. Que vaut  $P(T = 0)$  ? Montrer que, pour  $n \geq 1$ ,  $P(T = n) = v_{n-1} - v_n$ .
2. (a) Montrer que, pour  $n \geq 1$  :

$$\sum_{k=1}^n kP(T = k) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - nv_n.$$

2. (b) En déduire que  $T$  admet une espérance et que :

$$E(T) \leq \frac{N^3}{N-1}pq.$$

On ne cherchera pas à calculer exactement  $E(T)$ .

### C. Retour aux bactéries

Répondre à la question posée au début du problème : que se passe-t-il après un grand nombre d'expériences ?