



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1997

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite concave si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Dans la partie I, on établit quelques propriétés classiques des fonctions concaves utilisées dans la suite du problème. Les parties II et III sont consacrées à un modèle traitant de problèmes financiers.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Pour un entier $n \geq 1$ et une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que f présente un maximum en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \leq f(x_0)$.

Partie I

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave. En s'appuyant sur un dessin, donner une interprétation graphique de sa concavité. Que peut-on dire de la fonction $-f : x \mapsto -f(x)$?
2. On considère une fonction $f \in \mathcal{E}$. Le but de cette question est de prouver que f est concave si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 2. (a) On suppose que $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Établir que f est concave.
 2. (b) Réciproquement, on suppose que f est concave. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la valeur de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$. En déduire que $f''(x) \leq 0$.
3. Soient $f \in \mathcal{E}$ une fonction concave et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) = 0$. Montrer que f présente un maximum en x_0 .
4. Soit $g \in \mathcal{E}$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) \leq -\alpha$. Prouver que g présente un maximum sur $\mathbb{R}$. Est-il unique en général?

5. Exemple.

5. (a) Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{E}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -x^2 e^{-x}$. On pourra intégrer par parties.

5. (b) Parmi les fonctions de 5 (a), déterminer toutes celles présentant un maximum sur $\mathbb{R}$.

6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave et $p \geq 1$ un entier. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels positifs ou nuls tels que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1,$$

et $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$. Établir

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i).$$

Partie II. Étude d'un modèle financier simplifié

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ l'ensemble fini des résultats possibles susceptibles de se produire à la Bourse. Un investisseur S se donne un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de Ω , et une fonction concave $u \in \mathcal{E}$, dite fonction d'utilité. Entre deux variables aléatoires réelles, ou revenus aléatoires, W_1 et W_2 définies sur Ω , S préfère W_1 à W_2 si $E(u(W_1)) \geq E(u(W_2))$.

1. Soit $W : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. Établir une inégalité entre $E(u(W))$ et $u(E(W))$. En déduire le choix de l'investisseur entre W et la variable aléatoire égale à la constante $E(W)$.

On considère maintenant un réel $R_0 \geq 0$ et une variable aléatoire réelle R_1 sur Ω . Pour chaque réel x , on définit le revenu aléatoire

$$W(x) = (1 - x)R_0 + xR_1.$$

L'investisseur S se place en tant qu'acheteur ou vendeur de titres de deux natures, engageant globalement une somme unité. La décision x consiste à négocier pour $1 - x$ des titres à revenu fixe R_0 , et pour x des titres à revenu aléatoire R_1 . Le réel x est quelconque : les sommes x et $1 - x$ correspondent à un achat si elles sont positives, à une vente si elles sont négatives. La variable aléatoire $W(x)$ représente le revenu associé à la décision x .

Dans cette partie II seulement, R_1 prend les deux valeurs $R_0 + a$ et $R_0 - b$, chacune avec probabilité $1/2$, où a et b sont deux réels strictement positifs fixés.

2. Donner, pour chaque réel x , une expression simple de $f(x) = E(u(W(x)))$. La fonction ainsi définie est-elle concave ?
3. On suppose que u' possède en $+\infty$ et en $-\infty$ des limites finies strictement positives, notées respectivement k_1 et k_2 . Vérifier que $k_1 \leq k_2$.
3. (a) On suppose $\frac{k_1}{k_2} < \frac{a}{b} < \frac{k_2}{k_1}$. Montrer que f présente un maximum sur $\mathbb{R}$.
3. (b) On suppose que f présente un maximum sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\frac{k_1}{k_2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{k_2}{k_1}$.

Partie III

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i,$$

pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$. Une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est dite concave si, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$ et tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

1. Prouver que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est concave si et seulement si, pour tous $x, h \in \mathbb{R}^3$, la fonction $\phi_{x,h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi_{x,h}(t) = f(x + th)$ est concave.
2. On reprend les notations de la question précédente et on suppose $f \in \mathcal{F}$. Les dérivées partielles du premier ordre sont notées $\partial f / \partial x_i$, et celles du second ordre $\partial^2 f / (\partial x_i \partial x_j)$, pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$.
 2. (a) Soient $x, h \in \mathbb{R}^3$. Exprimer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi'_{x,h}(t)$ et $\phi''_{x,h}(t)$ en fonction des dérivées partielles de f .
 2. (b) Pour $x \in \mathbb{R}^3$, on note $A_x = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq 3}$. Par abus d'écriture, A_x désigne aussi l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de cette matrice dans la base canonique. Montrer que, si ses valeurs propres sont négatives ou nulles, alors $\langle A_x(h), h \rangle \leq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^3$. La réciproque est-elle vraie ou fausse?
 2. (c) Montrer que f est concave si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, les valeurs propres de A_x sont négatives ou nulles.
 2. (d) Déterminer les réels λ tels que la fonction

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2\lambda x_1 x_3 - x_2^2 + 2\lambda x_2 x_3 - x_3^2$$

soit concave.

3. Soient $f \in \mathcal{F}$ une fonction concave et $y_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\frac{\partial f}{\partial x_j}(y_0) = 0$ pour $j \in \{1, 2, 3\}$.
Prouver que f présente un maximum en y_0 .
4. On considère une fonction concave $f \in \mathcal{F}$ et un réel c .

4. (a) Montrer que, si

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 1, c) \leq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 1, c) \geq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(0, 1, c) = 0,$$

alors $(0, 1, c)$ maximise f sur $\Lambda = [0, +\infty[\times]-\infty, 1] \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$f(x_1, x_2, x_3) \leq f(0, 1, c)$ pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda$.

Pour chaque point de Λ , on pourra considérer la fonction

$$t \mapsto f(tx_1, 1 + t(x_2 - 1), c + t(x_3 - c)).$$

4. (b) On suppose au contraire qu'au moins l'une des trois conditions de 4 (a) n'est pas vérifiée. Établir que $(0, 1, c)$ ne maximise pas f sur Λ .

5. Étude d'un autre modèle financier simplifié.

Un investisseur S , travaillant dans un univers boursier comme dans la partie II, se donne une fonction d'utilité concave $u \in \mathcal{E}$ et un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. On considère un réel $R_0 \geq 0$ et trois variables aléatoires réelles R_1, R_2, R_3 sur Ω .

Pour $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, on définit

$$W(y) = R_0 + \sum_{k=1}^3 (R_k - R_0)y_k.$$

L'investisseur se place en tant qu'acheteur ou vendeur de titres de quatre natures, engageant globalement une somme unité. La décision y consiste à négocier pour $1 - y_1 - y_2 - y_3$ des titres à revenu fixe R_0 , et pour y_k , avec $k \in \{1, 2, 3\}$, des titres à revenu aléatoire R_k . La variable aléatoire $W(y)$ représente le revenu associé à cette décision. Les sommes y_1, y_2, y_3 et $1 - y_1 - y_2 - y_3$ correspondent à un achat si elles sont positives et à une vente si elles sont négatives.

5. (a) Exprimer $f(y) = E(u(W(y)))$ en fonction des valeurs de R_1, R_2, R_3 sur Ω . Établir que f est concave. Est-ce que $f \in \mathcal{F}$?
5. (b) On suppose que S adopte les contraintes $y_1 \geq 0$ et $y_2 \leq 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel c pour que $(0, 1, c)$ maximise f sur l'ensemble Λ défini en 4 (a).