



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1997

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Préliminaire

La variable X_n représente le nombre de bactéries de type A parmi les N bactéries constituant l'éprouvette après le prélèvement de la n -ième expérience. Initialement, $X_0 = k_0$. La variable $F_n = X_n/N$ représente la proportion de bactéries de type A dans cette éprouvette.

Après reproduction, si l'éprouvette contient une proportion k/N de bactéries de type A, le modèle assimile le prélèvement à N essais indépendants, chacun donnant une bactérie de type A avec probabilité k/N . Le nombre de succès suit alors une loi binomiale $\mathcal{B}(N, k/N)$.

L'indépendance des essais est une approximation du prélèvement dans une très grande population : un prélèvement réellement effectué sans remise dans une population finie n'est pas exactement constitué d'essais indépendants. Le modèle binomial suppose que la taille de la population reproduite est suffisamment grande pour que les proportions ne changent pas sensiblement pendant le prélèvement.

L'hypothèse (H) signifie que, lorsque l'on connaît le nombre présent X_n , connaître en plus les résultats des expériences précédentes ne change pas la loi de X_{n+1} . La transition dépend uniquement de la composition actuelle. Cette propriété n'implique pas que les variables X_n soient indépendantes.

Rectifications du préambule : le paramètre initial est $p = k_0/N$, et le support commun des X_n est $\{0, \dots, N\}$. Le PDF imprime respectivement k/N , sans définir ce k , et $\{0, \dots, n\}$, incompatible avec $X_0 = k_0$ lorsque $k_0 > 0$.

Partie 1

1. Les états 0 et 3 sont absorbants. Si $X_n = 0$, la loi conditionnelle de X_{n+1} est $\mathcal{B}(3, 0)$, donc $X_{n+1} = 0$ avec probabilité 1. Si $X_n = 3$, elle est $\mathcal{B}(3, 1)$, donc $X_{n+1} = 3$ avec probabilité 1.

Si $k_0 = 0$, $X_1 = 0$ presque sûrement et, par récurrence, $X_n = 0$ presque sûrement pour chaque n . Si $k_0 = 3$, le même argument donne $X_n = 3$ presque sûrement pour chaque n .

Ces égalités valent simultanément pour tous les indices sur un événement de probabilité

1 : l'union dénombrable des événements exceptionnels, chacun de probabilité nulle, reste négligeable. Les suites sont donc constantes presque sûrement dans les deux cas.

Dans la suite de cette partie, $k_0 = 1$ et $p = 1/3$.

2. Pour $n \geq 1$, on utilise le système complet d'événements $([X_n = k])_{0 \leq k \leq 3}$. La formule des probabilités totales donne, en omettant les événements de probabilité nulle :

$$P(X_{n+1} = i) = \sum_{k=0}^3 P(X_n = k)P(X_{n+1} = i \mid X_n = k).$$

Lorsqu'un événement conditionnant a une probabilité nulle, sa contribution est définie comme nulle, sans utiliser une probabilité conditionnelle non définie.

Pour $k = 0$ ou $k = 3$, les transitions sont certaines vers 0 ou 3. Pour $k = 1$, la loi $\mathcal{B}(3, 1/3)$ donne, dans l'ordre $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\left(\frac{8}{27}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{27} \right).$$

Pour $k = 2$, la loi $\mathcal{B}(3, 2/3)$ donne :

$$\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27} \right).$$

Ces quatre lois constituent les colonnes de A . L'écriture matricielle des probabilités totales est donc $U_{n+1} = AU_n$ pour $n \geq 1$.

Pour $n = 0$, on a $U_0 = {}^t(0, 1, 0, 0)$. La deuxième colonne de A est précisément la loi de $X_1 \sim \mathcal{B}(3, 1/3)$. Donc $U_1 = AU_0$ également. Ainsi $U_{n+1} = AU_n$ pour tout $n \geq 0$ et, par récurrence, $U_n = A^n U_0$.

3. (a) On multiplie le vecteur ligne $V = (0, 1, 2, 3)$ par les colonnes de A . La première composante est 0 et la dernière est 3. Les deux composantes intermédiaires sont :

$$\frac{4}{9} + 2\frac{2}{9} + 3\frac{1}{27} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1,$$

$$\frac{2}{9} + 2\frac{4}{9} + 3\frac{8}{27} = \frac{2}{9} + \frac{8}{9} + \frac{8}{9} = 2.$$

Donc $VA = (0, 1, 2, 3) = V$.

3. (b) Chaque X_n prend un nombre fini de valeurs, donc son espérance existe. Par définition :

$$E(X_n) = \sum_{i=0}^3 iP(X_n = i) = VU_n.$$

D'après 2 et 3(a) :

$$E(X_{n+1}) = VU_{n+1} = VAU_n = VU_n = E(X_n).$$

L'espérance reste donc égale à sa valeur initiale. Comme $X_0 = 1$, on obtient $E(X_n) = 1$ pour tout $n \geq 0$.

4. (a) Le second vecteur imprimé sous le nom Y est noté Y_3 dans le sujet rectifié, afin de correspondre à la demande portant sur AY_3 .

Pour $Y_2 = {}^t(1, -3, 3, -1)$, le produit ligne par ligne donne :

$$AY_2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{24}{27} + \frac{3}{27} \\ -\frac{12}{9} + \frac{6}{9} \\ -\frac{6}{9} + \frac{12}{9} \\ -\frac{3}{27} + \frac{24}{27} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} \end{pmatrix} = \frac{2}{9}Y_2.$$

Pour $Y_3 = {}^t(1, -1, -1, 1)$:

$$AY_3 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{8}{27} - \frac{1}{27} \\ -\frac{4}{9} - \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} - \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{27} - \frac{8}{27} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}Y_3.$$

Les vecteurs Y_2, Y_3 sont non nuls : ce sont des vecteurs propres de valeurs propres respectives $2/9$ et $2/3$.

4. (b) Posons $E_0 = {}^t(1, 0, 0, 0)$ et $E_3 = {}^t(0, 0, 0, 1)$. Les première et dernière colonnes de A donnent $AE_0 = E_0$ et $AE_3 = E_3$. Ces deux vecteurs sont libres et appartiennent à l'espace propre associé à 1.

Les espaces propres associés aux valeurs propres distinctes 1, $2/9$, $2/3$ sont en somme directe. Par conséquent, la famille (E_0, E_3, Y_2, Y_3) est libre : une relation entre ces quatre vecteurs se décompose en trois relations dans les espaces propres, et chaque coefficient est nul.

Cette famille a quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^4$. C'est donc une base de vecteurs propres, ce qui prouve que A est diagonalisable. Ses seules valeurs propres sont 1, $2/9$, $2/3$, puisque sa matrice dans cette base est :

$$D = \text{diag} \left(1, 1, \frac{2}{9}, \frac{2}{3} \right).$$

Aucun déterminant ni polynôme caractéristique n'est nécessaire.

4. (c) Méthode 1 — Décomposer les vecteurs de la base canonique

Posons $r_n = (2/9)^n$ et $t_n = (2/3)^n$. Si $E_1 = {}^t(0, 1, 0, 0)$ et $E_2 = {}^t(0, 0, 1, 0)$, on vérifie coefficient par coefficient :

$$E_1 = \frac{2}{3}E_0 + \frac{1}{3}E_3 - \frac{1}{6}Y_2 - \frac{1}{2}Y_3,$$

$$E_2 = \frac{1}{3}E_0 + \frac{2}{3}E_3 + \frac{1}{6}Y_2 - \frac{1}{2}Y_3.$$

Par exemple, pour la première identité, les coordonnées valent respectivement $2/3 - 1/6 - 1/2 = 0$, $1/2 + 1/2 = 1$, $-1/2 + 1/2 = 0$, et $1/3 + 1/6 - 1/2 = 0$. La seconde se vérifie de la même façon.

Comme $A^n E_0 = E_0$, $A^n E_3 = E_3$, $A^n Y_2 = r_n Y_2$ et $A^n Y_3 = t_n Y_3$, on obtient :

$$A^n E_1 = \frac{2}{3}E_0 + \frac{1}{3}E_3 - \frac{r_n}{6}Y_2 - \frac{t_n}{2}Y_3,$$

$$A^n E_2 = \frac{1}{3}E_0 + \frac{2}{3}E_3 + \frac{r_n}{6}Y_2 - \frac{t_n}{2}Y_3.$$

Ces images forment les colonnes de A^n . Ainsi, pour tout $n \geq 0$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} - \frac{t_n}{2} - \frac{r_n}{6} & \frac{1}{3} - \frac{t_n}{2} + \frac{r_n}{6} & 0 \\ 0 & \frac{t_n + r_n}{2} & \frac{t_n - r_n}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t_n - r_n}{2} & \frac{t_n + r_n}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} - \frac{t_n}{2} + \frac{r_n}{6} & \frac{2}{3} - \frac{t_n}{2} - \frac{r_n}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 0$, $r_0 = t_0 = 1$ et cette formule donne bien I_4 .

Méthode 2 — Utiliser la matrice de passage

La matrice de la base propre trouvée en 4(b) est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est inversible parce que ses colonnes forment une base. Pour trouver ses coordonnées inverses, résolvons $z = aE_0 + bE_3 + cY_2 + dY_3$, où $z = {}^t(z_0, z_1, z_2, z_3)$. Les coordonnées intermédiaires donnent $z_1 = -3c - d$ et $z_2 = 3c - d$, d'où :

$$c = \frac{z_2 - z_1}{6}, \quad d = -\frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Les première et dernière coordonnées donnent alors :

$$a = z_0 + \frac{2}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2, \quad b = z_3 + \frac{1}{3}z_1 + \frac{2}{3}z_2.$$

Ainsi :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

L'égalité $AP = PD$ donne $A = PDP^{-1}$, puis $A^n = PD^nP^{-1}$. Ici $D^n = \text{diag}(1, 1, r_n, t_n)$.

Le produit s'écrit explicitement :

$$\begin{aligned} A^n &= E_0(1, 2/3, 1/3, 0) + E_3(0, 1/3, 2/3, 1) + r_n Y_2(0, -1/6, 1/6, 0) \\ &+ t_n Y_3(0, -1/2, -1/2, 0). \end{aligned}$$

Chaque terme est un produit d'un vecteur colonne par un vecteur ligne. Cette formule donne les colonnes $E_0, 2E_0/3 + E_3/3 - r_n Y_2/6 - t_n Y_3/2, E_0/3 + 2E_3/3 + r_n Y_2/6 - t_n Y_3/2$, et E_3 . Elle redonne donc exactement la matrice explicite obtenue par la première méthode.

5. (a) D'après 2, $U_n = A^n U_0$, avec $U_0 = E_1$. On lit donc la deuxième colonne de la matrice de 4(c) :

$$P(X_n = 0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{6} \left(\frac{2}{9}\right)^n,$$

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n \right),$$

$$P(X_n = 2) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - \left(\frac{2}{9} \right)^n \right),$$

$$P(X_n = 3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^n + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{9} \right)^n.$$

Pour $n = 0$, ces valeurs sont 0, 1, 0, 0, ce qui respecte l'état initial. Pour tout n , leur somme vaut 1. Elles sont positives ou nulles parce qu'elles proviennent des probabilités définies par la récurrence $U_n = A^n U_0$; on n'a donc pas à reconstruire une loi à partir de formules isolées.

5. (b) Puisque $0 < 2/9 < 1$ et $0 < 2/3 < 1$, leurs puissances tendent vers 0. Ainsi :

$$P(X_n = 0) \rightarrow \frac{2}{3}, \quad P(X_n = 1) \rightarrow 0, \quad P(X_n = 2) \rightarrow 0, \quad P(X_n = 3) \rightarrow \frac{1}{3}.$$

La variable $F_n = X_n/3$ prend ses valeurs dans $\{0, 1/3, 2/3, 1\}$. Pour $x < 0$, sa fonction de répartition vaut 0. Pour $0 \leq x < 1$, elle est une somme de certaines des probabilités des états 0, 1, 2, et tend donc vers $2/3$. Pour $x \geq 1$, elle vaut 1.

La fonction limite est celle d'une variable F telle que $P(F = 0) = 2/3$ et $P(F = 1) = 1/3$. La convergence a lieu notamment en tous ses points de continuité, c'est-à-dire tous les réels autres que 0 et 1. Donc :

$$F_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{B}(1, 1/3).$$

La proportion limite ne se concentre pas autour de $1/3$: elle prend uniquement les valeurs 0 et 1, avec les probabilités ci-dessus.

6. (a) Posons $A_k = [X_1 = 1, \dots, X_k = 1]$. Pour $k = 1$, $y_1 = P(X_1 = 1) = 4/9 > 0$. Sur une histoire finissant en 1, l'hypothèse (H) permet d'utiliser la transition binomiale

$\mathcal{B}(3, 1/3)$, indépendamment des valeurs antérieures déjà précisées dans le conditionnement.

La formule des probabilités composées donne :

$$x_{k+1} = P(A_k)P(X_{k+1} = 0 \mid A_k) = \frac{8}{27}y_k,$$

$$y_{k+1} = P(A_k)P(X_{k+1} = 1 \mid A_k) = \frac{4}{9}y_k.$$

Par récurrence, $y_k = (4/9)^k > 0$, donc chaque probabilité conditionnelle utilisée est bien définie. Puis :

$$x_n = \frac{8}{27} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}, \quad y_n = \left(\frac{4}{9}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

La formule de x_n vaut aussi à $n = 1$, car $x_1 = P(X_1 = 0) = 8/27$.

6. (b) Sur B_n , toutes les valeurs $X_1, \dots, X_n$ sont 0 ou 1. Soit aucune valeur n'est nulle, et l'on est dans A_n ; soit le premier zéro apparaît à un indice $k \in \{1, \dots, n\}$.

L'état 0 est absorbant avec probabilité 1. Plus précisément, pour chaque j , $P(X_j = 0, X_{j+1} \neq 0) = 0$; la réunion de ces événements sur les indices est encore négligeable. Ainsi, à un événement négligeable près, une histoire dont le premier zéro apparaît en k reste à zéro jusqu'à n et appartient à B_n .

Les événements correspondant aux premiers zéros distincts sont disjoints, et leur probabilité est x_k . Le cas sans zéro a probabilité y_n . Donc :

$$P(B_n) = \sum_{k=1}^n x_k + y_n.$$

En utilisant 6(a) et la somme géométrique :

$$\sum_{k=1}^n x_k = \frac{8}{27} \frac{1 - (4/9)^n}{1 - 4/9} = \frac{8}{15} \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n \right).$$

Finalement :

$$P(B_n) = \frac{8}{15} + \frac{7}{15} \left(\frac{4}{9} \right)^n \rightarrow \frac{8}{15}.$$

6. (c) Comme $F_n = X_n/3$, l'inégalité $F_n > 0,5$ équivaut à $X_n \geq 2$. L'état initial vaut $X_0 = 1$, donc il ne réalise pas cet événement.

L'événement « il existe $n \geq 1$ tel que $X_n \geq 2$ » est le complément de $\bigcap_{n \geq 1} B_n$. Les B_n sont décroissants ; par continuité décroissante des probabilités et 6(b) :

$$P \left(\bigcup_{n \geq 1} [F_n > 0,5] \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}.$$

Partie 2

A. Loi de X_n

1. Fixons $n \geq 1$ et $i \in \{0, \dots, N\}$. Les événements $[X_n = k]$, pour $0 \leq k \leq N$, forment un système complet. Les probabilités totales et la loi conditionnelle donnée dans le préambule donnent :

$$P(X_{n+1} = i) = \sum_{k=0}^N P(X_n = k) \binom{N}{i} \left(\frac{k}{N} \right)^i \left(1 - \frac{k}{N} \right)^{N-i}.$$

Pour un k dont la probabilité est nulle, le terme de cette somme est nul ; aucune probabilité conditionnelle sur cet événement n'est nécessaire. Les cas $k = 0, N$ sont couverts par les conventions binomiales et $0^0 = 1$.

Pour $n = 0$, $X_0 = k_0$ est certaine : la somme ne conserve que le terme $k = k_0$ et donne la loi $\mathcal{B}(N, k_0/N)$ de X_1 . La formule est donc valable pour tout $n \geq 0$.

2. Toutes les variables concernées prennent leurs valeurs dans un ensemble fini, donc leurs espérances existent. En multipliant la formule de A.1 par i , puis en sommant sur i , on échange seulement deux sommes finies :

$$E(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^N P(X_n = k) \sum_{i=0}^N i \binom{N}{i} \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i}.$$

La somme intérieure est l'espérance d'une variable binomiale de paramètres $N, k/N$, donc vaut $N(k/N) = k$, y compris aux extrémités. Ainsi :

$$E(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^N k P(X_n = k) = E(X_n).$$

Par récurrence et puisque $X_0 = k_0$, $E(X_n) = k_0 = Np$ pour tout $n \geq 0$.

3. (a) Soit Z de loi $\mathcal{B}(N, r)$, avec $r \in [0, 1]$. On a $E(Z) = Nr$, $V(Z) = Nr(1 - r)$ et, par la formule de Huygens :

$$E(Z^2) = Nr(1 - r) + N^2r^2.$$

Donc :

$$E(Z(N - Z)) = NE(Z) - E(Z^2) = N^2r - Nr(1 - r) - N^2r^2 = N(N - 1)r(1 - r).$$

Pour $r = k/N$, cela devient $(N - 1)k(N - k)/N$. En multipliant A.1 par $i(N - i)$ et en sommant sur i , l'échange de sommes finies donne :

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}(N - X_{n+1})) &= \sum_{k=0}^N P(X_n = k) \frac{N-1}{N} k(N-k) \\ &= \frac{N-1}{N} E(X_n(N - X_n)). \end{aligned}$$

Tous les moments employés existent, car les variables sont bornées.

3. (b) La récurrence de A.3(a) est géométrique. Sa valeur initiale vaut

$$E(X_0(N - X_0)) = k_0(N - k_0). \text{ Par conséquent :}$$

$$E(X_n(N - X_n)) = k_0(N - k_0) \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = N^2 pq \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

4. Les états 0 et N sont absorbants : les transitions correspondantes ont pour lois $\mathcal{B}(N, 0)$ et $\mathcal{B}(N, 1)$. La formule de A.1 donne :

$$P(X_{n+1} = 0) \geq P(X_n = 0), \quad P(X_{n+1} = N) \geq P(X_n = N).$$

On conserve pour chaque inégalité la contribution de l'état absorbant et l'on supprime les autres contributions, toutes positives ou nulles. Ainsi $u_{n+1} \geq u_n$.

Les événements $[X_n = 0]$ et $[X_n = N]$ sont disjoints, donc $0 \leq u_n \leq 1$. La suite croissante et majorée (u_n) converge par le théorème de la limite monotone.

5. (a) La variable X est positive et à valeurs finies, donc son espérance existe. L'inégalité ponctuelle :

$$X \geq a \mathbf{1}_{[X \geq a]}$$

donne, par croissance et linéarité de l'espérance, $E(X) \geq aP(X \geq a)$. Comme $a > 0$, on peut diviser et obtenir :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

C'est l'inégalité de Markov dans le cadre fini demandé.

5. (b) Si $N = 2$, l'intervalle $[1, N - 1]$ est le singleton $\{1\}$ et $f(1) = 1 = N - 1 = N^2/4$.

Si $N > 2$, la fonction polynomiale $f(x) = x(N - x)$ est dérivable et $f'(x) = N - 2x$. Elle est strictement croissante de 1 à $N/2$, puis strictement décroissante de $N/2$ à $N - 1$.

x	1		$N/2$		$N - 1$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$N - 1$	↗	$N^2/4$	↘	$N - 1$

Pour tout $N \geq 2$, on obtient donc :

$$\forall x \in [1, N - 1], \quad N - 1 \leq x(N - x) \leq \frac{N^2}{4}.$$

La borne inférieure se vérifie également par

$x(N - x) - (N - 1) = (x - 1)(N - 1 - x) \geq 0$ sur cet intervalle.

5. (c) Rectification de l'énoncé : la borne imprimée $v_n \leq pq(1 - 1/N)^n$ est fausse. En effet, $X_0 = k_0 \in \{1, \dots, N - 1\}$, donc $v_0 = 1$, tandis que $pq \leq 1/4$. La borne correcte utilisée dans le sujet rectifié comporte le facteur $N^2/(N - 1)$.

Posons $Z_n = X_n(N - X_n)$. Cette variable est positive ou nulle. Elle vaut 0 si

$X_n \in \{0, N\}$, et elle est supérieure ou égale à $N - 1$ si $1 \leq X_n \leq N - 1$, d'après A.5(b).

Comme $N - 1 > 0$:

$$[Z_n \geq N - 1] = [1 \leq X_n \leq N - 1].$$

La probabilité de cet événement vaut v_n . Markov et A.3(b) donnent :

$$0 \leq v_n \leq \frac{E(Z_n)}{N - 1} = \frac{N^2}{N - 1} pq \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

La même majoration peut se lire directement dans l'inégalité $Z_n \geq (N - 1)\mathbf{1}_{[1 \leq X_n \leq N - 1]}$ en prenant les espérances.

6. (a) Comme $N \geq 2$, le nombre $\rho = 1 - 1/N$ appartient à $]0, 1[$. Le majorant de A.5(c) est une constante finie multipliée par ρ^n , donc tend vers 0. Par encadrement, $v_n \rightarrow 0$. En conséquence, $u_n = 1 - v_n \rightarrow 1$.

6. (b) Pour $k \in \{1, \dots, N - 1\}$, l'événement $[X_n = k]$ est inclus dans $[1 \leq X_n \leq N - 1]$. Ainsi :

$$0 \leq P(X_n = k) \leq v_n \rightarrow 0.$$

Chaque état intermédiaire a donc une probabilité tendant vers 0.

6. (c) Par A.2, $E(X_n) = k_0$. En isolant la contribution de l'état N :

$$k_0 = NP(X_n = N) + \sum_{k=1}^{N-1} kP(X_n = k).$$

La somme restante est positive ou nulle et majorée par $(N - 1)v_n$, donc tend vers 0. Il en résulte :

$$P(X_n = N) \rightarrow \frac{k_0}{N} = p.$$

Puisque les probabilités de tous les états somment à 1 :

$$P(X_n = 0) = 1 - v_n - P(X_n = N) \rightarrow 1 - p = q.$$

6. (d) Soit F une variable de loi de Bernoulli de paramètre p . Sa fonction de répartition vaut 0 pour $x < 0$, q pour $0 \leq x < 1$, et 1 pour $x \geq 1$.

Comme $F_n = X_n/N \in [0, 1]$, sa fonction de répartition vaut exactement 0 pour $x < 0$ et 1 pour $x \geq 1$. Si $0 \leq x < 1$, l'événement $[F_n \leq x]$ comprend l'état $X_n = 0$ et éventuellement certains états intermédiaires, mais pas l'état N . Ainsi :

$$P(X_n = 0) \leq P(F_n \leq x) \leq P(X_n = 0) + v_n.$$

Les deux bornes tendent vers q par A.6(a)-(c). On obtient donc la convergence des fonctions de répartition en tous les points de continuité de celle de F . Ainsi :

$$F_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{B}(1, p).$$

B. Temps d'arrêt

1. Justification de l'absorption sur les trajectoires

Pour chaque $j \geq 0$, les transitions aux extrémités donnent :

$$P(X_j = 0, X_{j+1} \neq 0) = 0, \quad P(X_j = N, X_{j+1} \neq N) = 0.$$

Si la probabilité de l'état conditionnant est nulle, ces égalités suivent de l'inclusion ; sinon elles suivent de la loi conditionnelle certaine. Elles sont valables aussi à $j = 0$, puisque X_0 est intérieur.

En retirant la réunion dénombrable de tous ces événements négligeables, on obtient un événement Ω_* de probabilité 1 sur lequel, après toute entrée en 0 ou N , la trajectoire reste définitivement dans cet état.

Probabilité de ne jamais être absorbé

Posons $D_n = \bigcap_{j=0}^n [1 \leq X_j \leq N-1]$. Les événements D_n décroissent. Sur Ω_* , être intérieur au temps n équivaut à n'avoir jamais atteint une extrémité jusque-là. Donc $P(D_n) = P(1 \leq X_n \leq N-1) = v_n$.

Comme X_0 est intérieur, $[T = 0]$ désigne exactement l'absence d'absorption à tout instant. Ainsi $[T = 0] = \bigcap_{n \geq 0} D_n$. La continuité décroissante et A.6(a) donnent :

$$P(T = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

L'absorption se produit donc presque sûrement à un temps entier strictement positif.

Loi du temps d'absorption

Pour $n \geq 1$, le premier instant d'absorption est n si et seulement si la trajectoire appartient à D_{n-1} mais pas à D_n . Par conséquent :

$$P(T = n) = P(D_{n-1}) - P(D_n) = v_{n-1} - v_n.$$

Ces nombres sont positifs ou nuls, puisque $v_n = 1 - u_n$ est décroissante. Leur somme de $n = 1$ à m vaut $v_0 - v_m = 1 - v_m$, qui tend vers 1 : cela vérifie la normalisation de la loi.

2. (a) Pour tout $n \geq 1$, la formule de B.1 donne :

$$\sum_{k=1}^n kP(T = k) = \sum_{k=1}^n k(v_{k-1} - v_k).$$

Dans la première somme, le changement d'indice $j = k - 1$ conduit à

$$\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)v_j.$$

Dans la seconde somme, on sépare le dernier terme nv_n . Ainsi :

$$\sum_{k=1}^n kP(T = k) = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)v_j - \sum_{j=1}^{n-1} jv_j - nv_n = \sum_{j=0}^{n-1} v_j - nv_n.$$

L'identité est donc établie par manipulation de sommes finies.

2. (b) Rectification de l'énoncé : la borne imprimée $E(T) \leq pq$ est impossible, puisque $T \geq 1$ presque sûrement alors que $pq \leq 1/4$. Le sujet rectifié demande la borne $N^3 pq / (N - 1)$, qui découle directement de A.5(c).

Posons $c = N^2 pq / (N - 1)$ et $\rho = 1 - 1/N \in]0, 1[$. La question A.5(c) donne $0 \leq v_k \leq c\rho^k$. La série

$$\sum_{k \geq 0} v_k$$

converge par comparaison à une série géométrique, et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k \leq c \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k = \frac{c}{1 - \rho} = Nc = \frac{N^3}{N - 1} pq.$$

De plus, $0 \leq nv_n \leq cn\rho^n \rightarrow 0$ par croissance comparée entre une puissance et une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1.

Dans B.2(a), le membre de droite tend donc vers

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k,$$

une valeur finie. Comme les termes $kP(T = k)$ sont positifs, cette limite prouve la convergence de la série définissant l'espérance. Le terme correspondant à $T = 0$ est nul. Ainsi :

$$E(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \leq \frac{N^3}{N-1}pq.$$

L'espérance du temps d'absorption existe. Aucune valeur exacte de cette espérance n'est calculée.

C. Retour aux bactéries

Dans l'exemple, $N = 10$, $k_0 = 4$, $p = 4/10 = 0,4$ et $q = 0,6$. D'après B.1, le modèle atteint presque sûrement, après un nombre fini d'expériences, une éprouvette composée exclusivement de bactéries d'un même type. Une fois cet état atteint, il persiste à toutes les expériences suivantes.

Pour identifier les probabilités finales, les événements $[X_n = N]$ sont croissants à un événement négligeable près, car l'état N est absorbant. Leur réunion est l'événement d'absorption finale en N . Par continuité croissante et A.6(c), sa probabilité est $p = 0,4$. De même, l'absorption finale en 0 a probabilité $q = 0,6$.

Ainsi, avec probabilité 40 %, seules les bactéries de type A subsistent ; avec probabilité 60 %, seules celles de type B subsistent. Dans ce modèle, la coexistence ne se maintient pas indéfiniment, même si l'espérance de la proportion de type A reste égale à 0,4 à chaque instant.

Le temps moyen d'absorption est fini. La borne établie dans le sujet rectifié donne ici :

$$E(T) \leq \frac{10^3}{9} \times 0,4 \times 0,6 = \frac{80}{3} \approx 26,7.$$

Cette borne est une majoration de la moyenne, et non un nombre maximal d'expériences pour toutes les trajectoires. La conclusion concerne le modèle de prélèvements binomiaux retenu dans le problème.

Relevé des adaptations

Préambule. Le paramètre initial $p = k/N$, dont le numérateur n'est pas défini, est remplacé par $p = k_0/N$ conformément à l'état initial. Le support $\{0, \dots, n\}$ est remplacé par $\{0, \dots, N\}$, comme l'imposent le modèle et toutes les lois conditionnelles.

Partie 1, 4(a). Le second vecteur, noté Y dans sa définition puis Y_3 dans la question, est uniformément nommé Y_3 .

Partie 2, A.5(c). La majoration imprimée $v_n \leq pq(1 - 1/N)^n$, fausse notamment à $n = 0$, est remplacée par $v_n \leq N^2 pq(1 - 1/N)^n / (N - 1)$. Cette borne découle de Markov et du minimum $N - 1$ de $x(N - x)$ sur les états intérieurs.

Partie 2, B.2(b). La majoration imprimée $E(T) \leq pq$, incompatible avec $T \geq 1$ presque sûrement, est remplacée par $E(T) \leq N^3 pq / (N - 1)$, obtenue en sommant la majoration géométrique corrigée.