



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1997

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

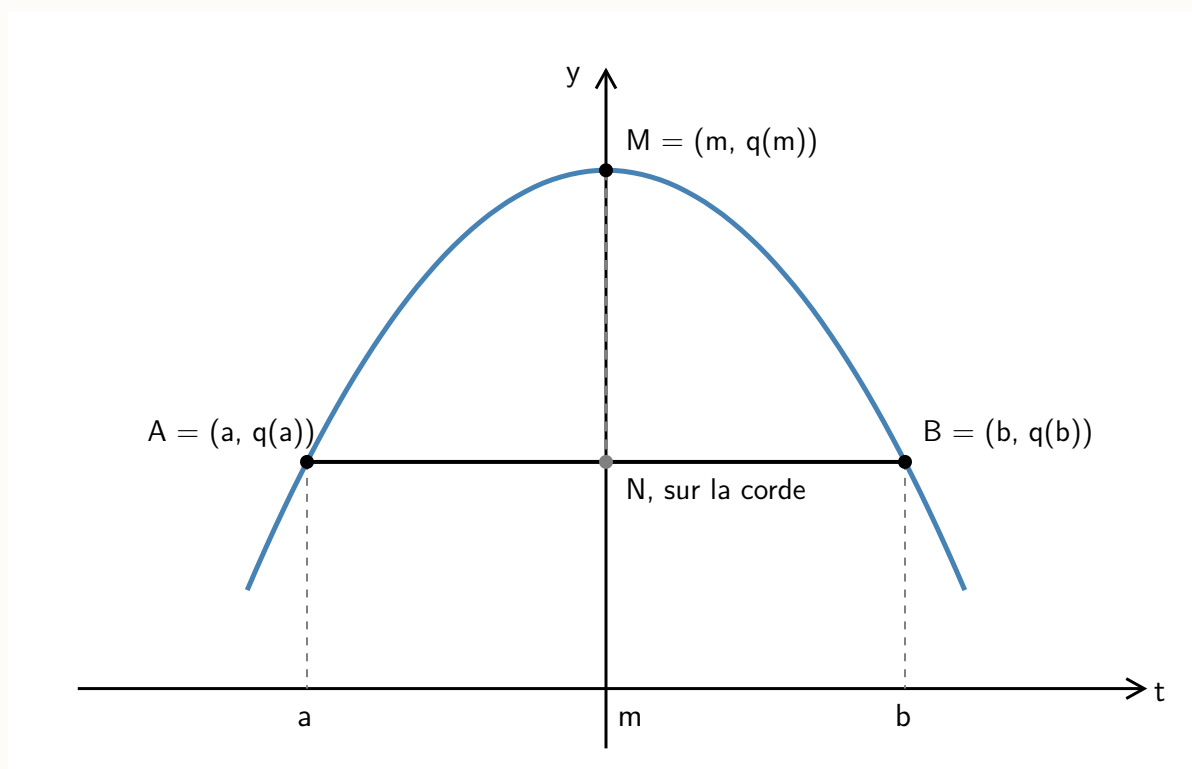
Partie I

1. Interprétation graphique de la concavité.

Soient $a < b$ et $\lambda \in [0, 1]$. Le point du segment reliant $A = (a, f(a))$ à $B = (b, f(b))$ obtenu avec ces coefficients a pour coordonnées $(\lambda a + (1 - \lambda)b, \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b))$. La définition de la concavité signifie que, à cette même abscisse, la courbe de f est au-dessus de ce segment ou sur ce segment.

Autrement dit, sur chaque intervalle $[a, b]$, le graphe d'une fonction concave est au-dessus de la corde reliant les deux points de son graphe aux extrémités. Il ne faut pas confondre cette propriété avec une stricte inégalité : une portion affine peut coïncider avec sa corde.

Le dessin suivant illustre cette propriété pour $q(t) = 4 - t^2$, avec $a = -3/2$, $b = 3/2$ et $m = (a + b)/2 = 0$. Le point N de la corde a pour ordonnée $(q(a) + q(b))/2 = 7/4$, tandis que le point M du graphe a pour ordonnée $q(m) = 4$.



En multipliant l'inégalité définissant la concavité par -1 , on obtient

$$(-f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda(-f)(x) + (1 - \lambda)(-f)(y).$$

Ainsi la fonction $-f$ est convexe.

2. (a) Du signe de la dérivée seconde à la concavité.

La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Si $f'' \leq 0$, sa dérivée f' est décroissante au sens large. On démontre l'inégalité de concavité sans utiliser comme résultat acquis le critère que l'on cherche à établir.

Méthode 1 — Comparer les pentes des cordes.

Prenons $x < y$ et $\lambda \in]0, 1[$, et posons $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, de sorte que $x < z < y$. Les hypothèses des accroissements finis sont satisfaites sur $[x, z]$ et $[z, y]$. Il existe $\xi_1 \in]x, z[$ et $\xi_2 \in]z, y[$ tels que

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(\xi_2).$$

Comme $\xi_1 < \xi_2$ et que f' est décroissante, la première pente est supérieure ou égale à la seconde. Les dénominateurs étant positifs, on peut multiplier et réorganiser :

$$(y - z)(f(z) - f(x)) \geq (z - x)(f(y) - f(z)),$$

$$(y - x)f(z) \geq (y - z)f(x) + (z - x)f(y).$$

Or $y - z = \lambda(y - x)$ et $z - x = (1 - \lambda)(y - x)$. En divisant par $y - x > 0$, on obtient $f(z) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Si $x = y$ ou si $\lambda \in \{0, 1\}$, l'inégalité est une égalité. Si $x > y$, on échange x et y ainsi que λ et $1 - \lambda$ pour se ramener au cas traité. Donc f est concave.

Méthode 2 — Majorer par les tangentes.

On établit d'abord, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) \leq f(s) + f'(s)(t - s).$$

Si $t > s$, les accroissements finis donnent $f(t) - f(s) = f'(\xi)(t - s)$ avec $s < \xi < t$. La décroissance de f' donne $f'(\xi) \leq f'(s)$, d'où l'inégalité. Si $t < s$, le même théorème fournit $t < \xi < s$, donc $f'(\xi) \geq f'(s)$; comme $t - s < 0$, le produit vérifie encore la même majoration. Si $t = s$, on a égalité.

Pour $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, on applique cette majoration avec $s = z$, puis avec $t = x$ et $t = y$. On multiplie les deux inégalités par $\lambda \geq 0$ et $1 - \lambda \geq 0$, puis on additionne :

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq f(z) + f'(z)(\lambda x + (1 - \lambda)y - z) = f(z).$$

Ainsi f est concave, pour tous x, y et $\lambda \in [0, 1]$.

La première méthode compare les pentes de deux cordes successives. La seconde établit en plus la majoration globale par une tangente, utile pour les maxima et les problèmes sous contraintes de la suite.

2. (b) De la concavité au signe de la dérivée seconde.

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Comme f est de classe C^2 , la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au point x donne, lorsque $h \rightarrow 0$,

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2),$$

$$f(x - h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2).$$

Les termes du premier ordre s'annulent dans la somme, donc

$$f(x + h) + f(x - h) - 2f(x) = h^2 f''(x) + o(h^2).$$

Pour $h \neq 0$, on peut diviser par h^2 et obtenir la limite demandée :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

La concavité appliquée aux points $x + h$ et $x - h$, avec les poids $1/2$ et $1/2$, impose $f(x) \geq (f(x + h) + f(x - h))/2$. Le numérateur du quotient est donc négatif ou nul. Comme $h^2 > 0$, le quotient est négatif ou nul pour tout $h \neq 0$. Par passage à la limite, $f''(x) \leq 0$.

Le point x était quelconque : on a bien $f'' \leq 0$ sur $\mathbb{R}$. Avec 2 (a), cela achève l'équivalence demandée.

3. Un point stationnaire d'une fonction concave donne un maximum global.

La question 2 (b) donne $f'' \leq 0$, donc f' est décroissante. Comme $f'(x_0) = 0$, on a $f'(x) \geq 0$ pour $x < x_0$ et $f'(x) \leq 0$ pour $x > x_0$. La fonction f est donc croissante au sens large jusqu'à x_0 , puis décroissante au sens large. Ainsi $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: le maximum est global.

La majoration par les tangentes démontrée en 2 (a) exprime directement la même conclusion : $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0)$. L'unicité n'est pas assurée par ces seules hypothèses, par exemple pour une fonction constante.

4. Existence et unicité sous la borne $g'' \leq -\alpha$.

Méthode 1 — Trouver l'unique zéro de g' .

Pour $x < y$, la continuité de g'' et le théorème fondamental de l'intégration donnent

$$g'(y) - g'(x) = \int_x^y g''(t) dt \leq -\alpha(y - x) < 0.$$

Ainsi g' est strictement décroissante. Pour $x \geq 0$, la même intégration donne $g'(x) \leq g'(0) - \alpha x$, donc $g'(x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Pour $x \leq 0$, on intègre de x à 0 : $g'(0) - g'(x) \leq -\alpha(0 - x)$, d'où $g'(x) \geq g'(0) - \alpha x \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$.

La fonction g' est continue. Elle prend donc la valeur 0 par le théorème des valeurs intermédiaires, et la stricte décroissance rend ce zéro unique. Notons-le x_* . Alors $g' > 0$ sur $] -\infty, x_*[$ et $g' < 0$ sur $]x_*, +\infty[$. La fonction g croît strictement jusqu'à x_* puis décroît strictement : elle possède un maximum global, atteint uniquement en x_* .

Méthode 2 — Obtenir une majoration quadratique.

Posons $h(x) = g(x) + \alpha x^2/2$. Cette fonction est de classe C^2 et $h''(x) = g''(x) + \alpha \leq 0$, donc elle est concave par 2 (a). Sa majoration par la tangente en 0 donne

$$g(x) + \frac{\alpha}{2}x^2 = h(x) \leq h(0) + h'(0)x = g(0) + g'(0)x.$$

Donc $g(x) \leq g(0) + g'(0)x - \alpha x^2/2$. Le membre de droite tend vers $-\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ comme lorsque $x \rightarrow -\infty$, puisque $\alpha > 0$. Il en résulte $g(x) \rightarrow -\infty$ aux deux extrémités.

Il existe donc $B > 0$ tel que $g(x) < g(0)$ lorsque $|x| > B$. La fonction g , continue sur le segment $[-B, B]$, y atteint un maximum. Ce maximum est au moins $g(0)$ et majore aussi les valeurs prises hors du segment; il est donc un maximum global sur $\mathbb{R}$.

Pour l'unicité, la concavité de h donne, avec $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$,

$$g(z) \geq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) + \frac{\alpha}{2}(\lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 - z^2).$$

Le développement du carré de z donne $\lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 - z^2 = \lambda(1 - \lambda)(x - y)^2$. Si deux points distincts x, y atteignaient le même maximum, en prenant $\lambda = 1/2$ on obtiendrait au milieu une valeur strictement supérieure à ce maximum, contradiction. Le point maximisant est donc unique.

La première preuve localise le maximum par la dérivée. La seconde démontre qu'une borne négative uniforme de la dérivée seconde force les valeurs à descendre aux deux extrémités et fournit une concavité stricte quantitative. Sous les hypothèses de la question, le maximum est toujours unique.

5. (a) Deux intégrations de $-x^2 e^{-x}$.

On cherche d'abord une primitive de la dérivée seconde, puis une primitive de la dérivée obtenue. Les intégrations par parties peuvent s'effectuer sur tout segment de $\mathbb{R}$, puisque les fonctions utilisées sont de classe C^1 .

Une première intégration par parties donne $\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx$, et

une seconde donne $\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}$. Ainsi une primitive de $-x^2 e^{-x}$ est $(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

Toutes les dérivées possibles sont donc $f'(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$, où $C \in \mathbb{R}$. En intégrant les trois termes du polynôme multiplié par e^{-x} , on obtient

$$f(x) = -(x^2 + 4x + 6)e^{-x} + Cx + D, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

Pour contrôler le calcul, la dérivée de $-(x^2 + 4x + 6)e^{-x}$ est $(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$, et la dérivée de ce dernier terme est $-x^2 e^{-x}$. Les fonctions écrites sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et satisfont l'équation.

Réciproquement, la différence entre une solution quelconque et la solution particulière $-(x^2 + 4x + 6)e^{-x}$ a une dérivée seconde nulle sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est constante, puis la différence est affine. L'expression avec les deux constantes C, D décrit donc toutes les solutions.

5. (b) Solutions présentant un maximum.

Méthode 1 — Étudier la dérivée.

Posons $v(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x} = ((x + 1)^2 + 1)e^{-x} > 0$. On a $v'(x) = -x^2 e^{-x} \leq 0$. La décroissance est en fait stricte : pour $x < y$, $v(y) - v(x) = -\int_x^y t^2 e^{-t} dt < 0$, car l'intégrande est positive en au moins un point intérieur puis, par continuité, sur un sous-segment de longueur positive.

Par croissance comparée, $v(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Lorsque $x \rightarrow -\infty$, le facteur $((x + 1)^2 + 1)$ est au moins 1 et $e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc $v(x) \rightarrow +\infty$.

Si $C < 0$, la fonction continue strictement décroissante v prend une seule fois la valeur $-C > 0$. En notant x_* cet unique point, $f' = v + C$ est strictement positive avant x_* et strictement négative après. Donc f admet un maximum global unique en x_* .

Si $C \geq 0$, $f'(x) = v(x) + C > 0$ pour tout x . Pour chaque réel x , tout réel $y > x$ satisfait $f(y) > f(x)$. Aucun maximum n'est donc atteint. En particulier, si $C = 0$, $f(x) \rightarrow D$ en

$+\infty$, mais cette borne supérieure n'est jamais atteinte puisque $(x^2 + 4x + 6)e^{-x} > 0$.

Les solutions demandées sont exactement $f(x) = -(x^2 + 4x + 6)e^{-x} + Cx + D$ avec $C < 0$ et $D \in \mathbb{R}$.

Méthode 2 — Utiliser les limites aux extrémités et la concavité.

Toutes les solutions sont concaves, car $f'' = -x^2 e^{-x} \leq 0$. Si elles présentent un maximum en un point fini x_* , la condition nécessaire pour un extremum d'une fonction dérivable sur l'ouvert $\mathbb{R}$ donne $0 = f'(x_*) = v(x_*) + C$. Comme $v(x_*) > 0$, on a nécessairement $C < 0$.

Réciproquement, supposons $C < 0$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $(x^2 + 4x + 6)e^{-x} \rightarrow 0$, tandis que $Cx + D \rightarrow -\infty$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$. Lorsque $x \rightarrow -\infty$, le terme négatif $-(x^2 + 4x + 6)e^{-x}$ domine le terme affine en valeur absolue : en posant $t = -x \rightarrow +\infty$, $(t^2 - 4t + 6)e^t/t \rightarrow +\infty$ par croissance comparée. Ainsi $f(x) \rightarrow -\infty$ aussi à gauche.

Comme en 4, on peut choisir un segment hors duquel $f(x) < f(0)$; la continuité assure un maximum sur ce segment, qui est alors global. La première méthode a montré que v est strictement décroissante : il ne peut y avoir deux points critiques, donc ce maximum est unique.

Les deux méthodes donnent la même condition $C < 0$. La première détermine les variations et caractérise le point maximisant par $v(x_*) = -C$; la seconde sépare une condition nécessaire locale et une preuve d'existence par les limites aux extrémités.

6. Inégalité de concavité pour un nombre fini de points.

On raisonne par récurrence sur p , sans supposer f dérivable. Pour $p = 1$, le poids vaut 1 et l'inégalité est une égalité. Supposons le résultat vrai pour $p - 1 \geq 1$ et considérons p points avec les poids de l'énoncé.

Si $\lambda_p = 1$, les autres poids sont nuls et l'inégalité est encore une égalité. Sinon, $q = 1 - \lambda_p > 0$. Pour $1 \leq i \leq p - 1$, posons $\mu_i = \lambda_i/q$. Ces nombres sont positifs ou nuls

et vérifient

$$\sum_{i=1}^{p-1} \mu_i = 1.$$

Posons

$$z = \sum_{i=1}^{p-1} \mu_i x_i.$$

La concavité pour les deux points z, x_p donne

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) = f(qz + \lambda_p x_p) \geq qf(z) + \lambda_p f(x_p).$$

L'hypothèse de récurrence, appliquée aux $p - 1$ premiers points avec les poids μ_i , donne

$$f(z) \geq \sum_{i=1}^{p-1} \mu_i f(x_i).$$

En multipliant par $q > 0$ et en substituant,

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i f(x_i) + \lambda_p f(x_p) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i).$$

La récurrence est achevée. Les poids nuls sont inclus, et aucune division par un poids potentiellement nul n'a été effectuée.

Partie II. Étude d'un modèle financier simplifié

1. Revenu aléatoire et revenu certain de même espérance.

Notons $p_i = P(\{\omega_i\})$ et $w_i = W(\omega_i)$, pour $1 \leq i \leq n$. Les nombres p_i sont positifs ou nuls et leur somme vaut 1. Comme l'univers est fini, les variables W et $u(W)$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs réelles : leurs espérances existent et sont des sommes finies.

La question I.6, appliquée à la fonction concave u , donne

$$E(u(W)) = \sum_{i=1}^n p_i u(w_i) \leq u\left(\sum_{i=1}^n p_i w_i\right) = u(E(W)).$$

La variable constante $V = E(W)$ vérifie $E(u(V)) = u(E(W))$. Selon le critère de l'énoncé, l'investisseur préfère donc le revenu certain égal à $E(W)$ au revenu aléatoire W , au sens d'une préférence pouvant être une égalité.

On ne peut pas affirmer une préférence stricte en général. Par exemple, si u est affine, les deux espérances d'utilité sont égales. Aucun argument d'indépendance n'est requis.

2. Espérance d'utilité et concavité de f .

Le revenu $W(x)$ vaut $R_0 + ax$ lorsque $R_1 = R_0 + a$, et $R_0 - bx$ lorsque $R_1 = R_0 - b$. Chacune de ces situations a une probabilité $1/2$. Ainsi,

$$f(x) = \frac{1}{2}u(R_0 + ax) + \frac{1}{2}u(R_0 - bx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Méthode 1 — Utiliser la définition de la concavité.

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0, 1]$ et $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, on a

$R_0 + az = \lambda(R_0 + ax) + (1 - \lambda)(R_0 + ay)$. La concavité de u donne donc

$$u(R_0 + az) \geq \lambda u(R_0 + ax) + (1 - \lambda)u(R_0 + ay).$$

De même, $R_0 - bz = \lambda(R_0 - bx) + (1 - \lambda)(R_0 - by)$ donne la même inégalité pour les deux arguments correspondants. On additionne ces inégalités avec les coefficients $1/2$, ce qui donne $f(z) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. La fonction f est donc concave.

Méthode 2 — Calculer la dérivée seconde.

Comme u est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que les deux arguments sont affines, $f \in \mathcal{E}$. La dérivation composée donne

$$f'(x) = \frac{1}{2}(au'(R_0 + ax) - bu'(R_0 - bx)),$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}(a^2u''(R_0 + ax) + b^2u''(R_0 - bx)).$$

La concavité de u et I.2 (b) donnent $u'' \leq 0$. Les coefficients a^2 et b^2 sont positifs, donc $f'' \leq 0$. La question I.2 (a) assure alors que f est concave.

La preuve par définition reste valable sans dérivabilité. Le calcul de f' et de f'' exploite la régularité disponible et prépare la question suivante.

3. Ordre des deux limites de u' .

La fonction u est concave et de classe C^2 , donc $u'' \leq 0$ et u' est décroissante au sens large. Pour tout réel t , le passage à la limite à droite puis à gauche dans cette monotonie donne

$$k_1 \leq u'(t) \leq k_2.$$

En particulier $0 < k_1 \leq k_2$. Les quotients k_1/k_2 et k_2/k_1 de la suite sont donc bien définis.

Les deux arguments de u' dans l'expression de f' tendent vers des extrémités opposées, puisque $a, b > 0$. On en déduit les limites qui seront utilisées :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \frac{1}{2}(ak_2 - bk_1), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \frac{1}{2}(ak_1 - bk_2).$$

3. (a) Condition suffisante pour l'existence d'un maximum.

Les hypothèses strictes et la positivité de b, k_1, k_2 donnent $ak_2 - bk_1 > 0$ et $ak_1 - bk_2 < 0$. Les limites calculées dans la question 3 sont donc strictement positive à gauche et strictement négative à droite.

Il existe des réels $A < B$ tels que $f'(A) > 0$ et $f'(B) < 0$. La fonction f' est continue, car $f \in \mathcal{E}$. Le théorème des valeurs intermédiaires fournit $x_* \in]A, B[$ avec $f'(x_*) = 0$.

La fonction f est concave par II.2. La question I.3 donne donc $f(x) \leq f(x_*)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi f présente un maximum global. L'unicité n'est pas assurée ici : la concavité de u n'est pas supposée stricte et f' peut s'annuler sur un intervalle.

3. (b) Condition nécessaire pour l'existence d'un maximum.

Si f atteint un maximum en x_* , la dérivabilité sur l'ouvert $\mathbb{R}$ donne $f'(x_*) = 0$. Comme f est concave et de classe C^2 , f' est décroissante. Ainsi $f'(x) \geq 0$ lorsque $x < x_*$ et $f'(x) \leq 0$ lorsque $x > x_*$.

En passant aux limites déjà calculées,

$$\frac{1}{2}(ak_2 - bk_1) \geq 0, \quad \frac{1}{2}(ak_1 - bk_2) \leq 0.$$

Après division par les quantités strictement positives bk_2 et bk_1 , on obtient

$$\frac{k_1}{k_2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{k_2}{k_1}.$$

Les égalités aux bornes ne suffisent pas en général pour l'existence d'un maximum. Par exemple, $u(t) = 2t - \ln(1 + e^t)$ est de classe C^2 , avec $u'(t) = 1 + 1/(1 + e^t) \in]1, 2[$ et $u''(t) = -e^t/(1 + e^t)^2 < 0$. Ses limites sont $k_1 = 1$ et $k_2 = 2$. Pour $R_0 = 0$, $a = 2$ et $b = 1$, on a $a/b = k_2/k_1$, mais $f'(x) = u'(2x) - u'(-x)/2 > 1 - 1 = 0$ pour tout x . La fonction f est strictement croissante et n'atteint aucun maximum.

Si $k_1 = k_2 = k > 0$, l'encadrement de la question 3 impose $u'(t) = k$ pour tout t . Alors u est affine et $f'(x) = k(a - b)/2$. Un maximum existe exactement lorsque $a = b$, auquel cas f est constante et tout point est maximisant. Ce cas est cohérent avec les inégalités larges de 3 (b), tandis que l'hypothèse stricte de 3 (a) ne peut pas être satisfaite.

Partie III

1. Concavité et restrictions aux droites.

Supposons d'abord f concave. Fixons $x, h \in \mathbb{R}^3$, $s, t \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$. L'identité

$$x + (\lambda s + (1 - \lambda)t)h = \lambda(x + sh) + (1 - \lambda)(x + th)$$

et la concavité de f donnent $\phi_{x,h}(\lambda s + (1 - \lambda)t) \geq \lambda \phi_{x,h}(s) + (1 - \lambda)\phi_{x,h}(t)$. Donc chaque restriction $\phi_{x,h}$ est concave, y compris si $h = 0$, où elle est constante.

Réciproquement, supposons que toutes ces restrictions soient concaves. Pour deux vecteurs $a, b \in \mathbb{R}^3$, prenons $x = b$ et $h = a - b$. La concavité de $\phi_{b,a-b}$ aux arguments 1 et 0 donne

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) = \phi_{b,a-b}(\lambda) \geq \lambda \phi_{b,a-b}(1) + (1 - \lambda)\phi_{b,a-b}(0) = \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

On a donc exactement la définition de la concavité de f . Les deux propriétés sont équivalentes, sans hypothèse de dérivabilité.

2. (a) Dérivées le long d'une droite.

La fonction f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$ et l'application $t \mapsto x + th$ est affine, donc $\phi_{x,h}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. La règle de dérivation composée donne

$$\phi'_{x,h}(t) = \sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + th) = \langle \nabla f(x + th), h \rangle.$$

En dérivant chaque terme de cette somme finie, et puisque les h_i sont constants,

$$\phi''_{x,h}(t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + th) = \langle A_{x+th}(h), h \rangle.$$

Le théorème de Schwarz s'applique, car f est de classe C^2 sur cet ouvert ; l'ordre des deux dérivations partielles ne change donc pas la valeur des coefficients.

2. (b) Valeurs propres et signe de la forme quadratique.

Le théorème de Schwarz donne ${}^t(A_x) = A_x$. Cette matrice réelle symétrique est donc diagonalisable dans une base orthonormale, par le théorème spectral réel. Notons e_1, e_2, e_3 une telle base et μ_1, μ_2, μ_3 les valeurs propres correspondantes.

Si

$$h = \sum_{i=1}^3 z_i e_i,$$

l'orthonormalité donne

$$\langle A_x(h), h \rangle = \sum_{i=1}^3 \mu_i z_i^2.$$

Si toutes les μ_i sont négatives ou nulles, chaque terme est négatif ou nul, donc $\langle A_x(h), h \rangle \leq 0$ pour tout h .

La réciproque est vraie. En effet, supposons cette inégalité valable pour tout h , et prenons un vecteur propre non nul v associé à une valeur propre μ . Alors

$\langle A_x(v), v \rangle = \mu \|v\|^2 \leq 0$. Comme $\|v\|^2 > 0$, on obtient $\mu \leq 0$. Toutes les valeurs propres sont donc négatives ou nulles.

Le cas d'une valeur propre nulle est inclus ; il donne une direction sur laquelle la forme quadratique s'annule et ne contredit pas l'inégalité.

2. (c) Critère hessien de concavité.

Supposons f concave. La question III.1 donne la concavité de chaque $\phi_{x,h}$. Ces fonctions sont de classe C^2 par 2 (a), donc I.2 (b) donne $\phi''_{x,h}(0) \leq 0$. Ainsi $\langle A_x(h), h \rangle \leq 0$ pour tous x, h . La réciproque de 2 (b) assure que toutes les valeurs propres de chaque A_x sont négatives ou nulles.

Réciproquement, supposons que toutes les valeurs propres de chaque A_x soient négatives ou nulles. Pour tous x, h et t , la question 2 (b), appliquée au point $x + th$, donne

$$\phi''_{x,h}(t) = \langle A_{x+th}(h), h \rangle \leq 0.$$

La question I.2 (a) assure alors que chaque $\phi_{x,h}$ est concave. La question III.1 donne la concavité de f .

Ainsi f est concave si et seulement si sa hessienne a, en chaque point de $\mathbb{R}^3$, des valeurs propres négatives ou nulles. La condition porte sur tous les points, et non sur une seule hessienne évaluée en un point critique.

2. (d) Concavité de la forme quadratique avec le paramètre λ .

Méthode 1 — Calculer les valeurs propres par des vecteurs explicites.

La fonction polynomiale f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$. Son gradient est $(-2x_1 + 2\lambda x_3, -2x_2 + 2\lambda x_3, 2\lambda x_1 + 2\lambda x_2 - 2x_3)$ et sa hessienne, indépendante du point, vaut

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2\lambda \\ 0 & -2 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda & -2 \end{pmatrix}.$$

On considère $v_0 = (1, -1, 0)$, $v_+ = (1, 1, \sqrt{2})$ et $v_- = (1, 1, -\sqrt{2})$. Un produit matriciel donne

$$Av_0 = -2v_0, \quad Av_+ = (-2 + 2\sqrt{2}\lambda)v_+, \quad Av_- = (-2 - 2\sqrt{2}\lambda)v_-.$$

Pour le second calcul, les deux premières coordonnées du produit valent $-2 + 2\sqrt{2}\lambda$, et la troisième $4\lambda - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}(-2 + 2\sqrt{2}\lambda)$. Pour le troisième, les deux premières valent $-2 - 2\sqrt{2}\lambda$, et la troisième $4\lambda + 2\sqrt{2} = -\sqrt{2}(-2 - 2\sqrt{2}\lambda)$.

Ces trois vecteurs sont non nuls et deux à deux orthogonaux : les produits de v_0 avec chacun des autres valent $1 - 1 = 0$, et $\langle v_+, v_- \rangle = 1 + 1 - 2 = 0$. Ils forment donc une base de $\mathbb{R}^3$, pour toute valeur de λ , même lorsque les valeurs propres coïncident.

Les trois valeurs propres de A sont donc -2 , $-2 + 2\sqrt{2}\lambda$ et $-2 - 2\sqrt{2}\lambda$. D'après 2 (c), f est concave exactement lorsque les deux dernières sont négatives ou nulles, c'est-à-dire

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \lambda \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Les deux bornes sont incluses : la présence d'une valeur propre nulle reste compatible avec la concavité globale établie par ce critère.

Méthode 2 — Étudier la forme quadratique par des carrés.

Pour $h = (h_1, h_2, h_3)$, on a $\langle A(h), h \rangle = 2f(h)$. En complétant les carrés,

$$f(h) = -(h_1 - \lambda h_3)^2 - (h_2 - \lambda h_3)^2 + (2\lambda^2 - 1)h_3^2.$$

Le développement du membre de droite redonne les trois termes $-h_1^2, -h_2^2, -h_3^2$ et les deux termes croisés de l'énoncé. Si $2\lambda^2 - 1 \leq 0$, cette expression est négative ou nulle pour tout h , donc A a toutes ses valeurs propres négatives ou nulles par 2 (b), et f est concave par 2 (c).

Si $2\lambda^2 - 1 > 0$, choisissons $h = (\lambda, \lambda, 1)$. Les deux premiers carrés s'annulent et $f(h) = 2\lambda^2 - 1 > 0$. La forme quadratique de A prend alors une valeur strictement positive, donc le critère de 2 (c) n'est pas satisfait. La fonction n'est pas concave.

On retrouve $|\lambda| \leq 1/\sqrt{2}$. La première preuve donne une base propre complète; la seconde caractérise directement le signe de la forme quadratique, sans calcul spectral supplémentaire.

3. Maximum global en un point où le gradient s'annule.

Fixons un point quelconque $y \in \mathbb{R}^3$ et posons $h = y - y_0$. Par III.1, la fonction $\phi(t) = f(y_0 + th)$ est concave. Elle est de classe C^2 et, d'après III.2 (a),

$$\phi'(0) = \sum_{j=1}^3 h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(y_0) = 0.$$

La question I.3 assure que ϕ présente un maximum global en 0. En particulier $f(y) = \phi(1) \leq \phi(0) = f(y_0)$. Comme y était quelconque, f présente un maximum global en y_0 .

On établit aussi, pour préparer la question 4, la majoration par le plan tangent. Pour une fonction concave de classe C^2 et deux points quelconques z, y , la majoration par la tangente de I.2 (a), appliquée à $t \mapsto f(z + t(y - z))$ entre 0 et 1, donne

$$f(y) \leq f(z) + \langle \nabla f(z), y - z \rangle.$$

Cette inégalité est globale; elle ne repose pas sur un critère local de maximum lorsque certaines valeurs propres de la hessienne sont nulles.

4. (a) Suffisance des trois conditions au bord de Λ .

Posons $z = (0, 1, c)$ et choisissons $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Lambda$. La fonction indiquée dans l'énoncé est $\psi(t) = f(z + t(x - z))$. Elle est concave par III.1, et de classe C^2 . Sa dérivée en 0 vaut

$$\psi'(0) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(z) + (x_2 - 1) \frac{\partial f}{\partial x_2}(z) + (x_3 - c) \frac{\partial f}{\partial x_3}(z).$$

Comme $x_1 \geq 0$, $x_2 - 1 \leq 0$ et les trois dérivées vérifient les conditions de l'énoncé,

chacun des deux premiers produits est négatif ou nul et le troisième est nul. Donc $\psi'(0) \leq 0$.

La majoration par la tangente de I.2 (a), appliquée à ψ , donne

$\psi(1) \leq \psi(0) + \psi'(0) \leq \psi(0)$. Cela signifie $f(x) \leq f(z)$.

Le point z appartient à Λ et x était quelconque dans cet ensemble. Ainsi $(0, 1, c)$ maximise bien f sur Λ . Le raisonnement respecte la méthode proposée et ne suppose pas que les dérivées partielles des coordonnées contraintes s'annulent.

4. (b) Nécessité des trois conditions.

On montre que l'échec de chaque condition fournit une direction autorisée dans laquelle la fonction augmente. Notons e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique et $z = (0, 1, c)$.

Si $\partial f / \partial x_1(z) > 0$, les points $z + te_1 = (t, 1, c)$ appartiennent à Λ pour $t \geq 0$. La dérivée en 0 de $t \mapsto f(z + te_1)$ est strictement positive.

Si $\partial f / \partial x_2(z) < 0$, les points $z - te_2 = (0, 1 - t, c)$ appartiennent à Λ pour $t \geq 0$. La dérivée en 0 de $t \mapsto f(z - te_2)$ vaut $-\partial f / \partial x_2(z) > 0$.

Si $\partial f / \partial x_3(z) \neq 0$, on choisit $d = e_3$ lorsque cette dérivée est positive, et $d = -e_3$ lorsqu'elle est négative. Les points $z + td$ appartiennent à Λ pour tout $t \geq 0$, et la dérivée en 0 de $t \mapsto f(z + td)$ est $|\partial f / \partial x_3(z)| > 0$.

Dans chacun de ces cas, si $q(t)$ désigne la fonction le long de la direction choisie, la définition de la dérivée donne $(q(t) - q(0))/t \rightarrow q'(0) > 0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$. Pour tout $t > 0$ assez petit, ce quotient est donc positif, puis $q(t) > q(0)$. On a trouvé un point de Λ où f est plus grande qu'en z .

Ainsi, si l'une des trois conditions échoue, $(0, 1, c)$ ne maximise pas f sur Λ . Avec 4 (a), les trois conditions sont nécessaires et suffisantes.

5. (a) Espérance d'utilité pour trois actifs aléatoires.

Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq 3$, posons $p_i = P(\{\omega_i\})$, $r_{ki} = R_k(\omega_i)$ et $d_{ki} = r_{ki} - R_0$. On a

$p_i \geq 0$ et

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

À l'issue ω_i , le revenu est

$$w_i(y) = R_0 + \sum_{k=1}^3 d_{ki} y_k.$$

Le revenu et son utilité prennent un nombre fini de valeurs réelles, donc l'espérance existe. Son expression est

$$f(y) = \sum_{i=1}^n p_i u \left(R_0 + \sum_{k=1}^3 (r_{ki} - R_0) y_k \right).$$

Chaque application w_i est affine et u est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Les composées $u \circ w_i$ sont donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$. Comme leur somme est finie, $f \in \mathcal{F}$. On peut dériver cette somme terme à terme, sans aucun échange avec une limite ou une série infinie :

$$\frac{\partial f}{\partial y_k}(y) = \sum_{i=1}^n p_i d_{ki} u'(w_i(y)),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_\ell}(y) = \sum_{i=1}^n p_i d_{ki} d_{\ell i} u''(w_i(y)), \quad k, \ell \in \{1, 2, 3\}.$$

Méthode 1 — Utiliser les combinaisons affines.

Pour $y, z \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in [0, 1]$, $w_i(\lambda y + (1 - \lambda)z) = \lambda w_i(y) + (1 - \lambda)w_i(z)$. La concavité de u donne

$$u(w_i(\lambda y + (1 - \lambda)z)) \geq \lambda u(w_i(y)) + (1 - \lambda)u(w_i(z)).$$

On multiplie par $p_i \geq 0$ et on somme. Il vient $f(\lambda y + (1 - \lambda)z) \geq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(z)$.
Donc f est concave.

Méthode 2 — Étudier la forme quadratique de la hessienne.

Les expressions des dérivées secondes donnent, pour tout $h \in \mathbb{R}^3$,

$$\langle \nabla^2 f(y)h, h \rangle = \sum_{i=1}^n p_i u''(w_i(y)) \left(\sum_{k=1}^3 d_{ki} h_k \right)^2.$$

Chaque carré et chaque probabilité sont positifs ou nuls, tandis que $u'' \leq 0$ par I.2 (b). La somme est donc négative ou nulle pour tous y, h . Par III.2 (b), toutes les valeurs propres de la hessienne sont négatives ou nulles ; par III.2 (c), f est concave.

La première preuve conserve la concavité sous composition affine et sommation à coefficients positifs. La seconde donne une expression concrète de la hessienne et de ses directions éventuelles d'annulation. Dans les deux approches, aucune indépendance entre les actifs n'est supposée ou utilisée : leurs valeurs à chaque issue commune sont prises en compte.

5. (b) Condition nécessaire et suffisante sur c .

La fonction f est concave et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$, comme établi en 5 (a). Les questions 4 (a) et 4 (b) s'appliquent donc à $z_c = (0, 1, c)$ et aux contraintes $y_1 \geq 0, y_2 \leq 1$.

À ce point, le revenu à l'issue ω_i vaut

$$w_i(z_c) = R_0 + (r_{2i} - R_0) + c(r_{3i} - R_0) = r_{2i} + c(r_{3i} - R_0).$$

En substituant dans l'expression du gradient de 5 (a), on obtient la condition nécessaire

et suffisante suivante :

$$\sum_{i=1}^n p_i (r_{1i} - R_0) u'(r_{2i} + c(r_{3i} - R_0)) \leq 0,$$

$$\sum_{i=1}^n p_i (r_{2i} - R_0) u'(r_{2i} + c(r_{3i} - R_0)) \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^n p_i (r_{3i} - R_0) u'(r_{2i} + c(r_{3i} - R_0)) = 0.$$

Les trois relations doivent être satisfaites simultanément. Elles caractérisent exactement les réels c pour lesquels $(0, 1, c)$ maximise f sur Λ ; aucune unicité ni existence d'un tel réel n'est assurée sans données supplémentaires sur les actifs et l'utilité.

De manière équivalente, ces relations s'écrivent

$$E((R_1 - R_0)u'(R_2 + c(R_3 - R_0))) \leq 0,$$

$$E((R_2 - R_0)u'(R_2 + c(R_3 - R_0))) \geq 0,$$

$$E((R_3 - R_0)u'(R_2 + c(R_3 - R_0))) = 0.$$

Ces espérances sont toutes bien définies, car l'univers est fini. Les signes inégaux des deux premières conditions reflètent les directions de déplacement autorisées au bord : on peut augmenter y_1 et diminuer y_2 , tandis qu'on peut déplacer y_3 dans les deux sens.

Relevé des adaptations

Aucune adaptation mathématique n'est nécessaire : toutes les questions sont traitées avec les outils du référentiel fourni.

- Partie I, 1 : le dessin demandé dans le corrigé est intégré en SVG, avec des coordonnées calculées exactement à partir de la parabole illustrative $q(t) = 4 - t^2$.
Le PDF ne contient aucune figure source à reproduire.