



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1996

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Un banquier s'est imposé de vendre une action en dix jours ouvrables. Chaque jour, suivant le cours du jour, il décide de vendre ou d'attendre dans l'espoir de vendre mieux plus tard. S'il n'a pas réalisé la vente au neuvième jour, il s'impose de vendre son action au dixième jour. Quelle stratégie va-t-il choisir ?

Le problème ci-dessous propose, dans un cadre théorique précis, d'évaluer diverses stratégies pour de tels choix en chaîne.

On considère une suite d'expériences aléatoires identiques et indépendantes, à laquelle on associe une suite $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et toutes de même loi.

On considère un entier naturel non nul n .

Si $n = 1$, on définit le gain G_1 par $G_1 = X_1$.

Si $n \geq 2$, on se donne pour chaque $i \in \{1, \dots, n-1\}$ un seuil σ_i , et on définit le gain G_n de la façon suivante :

- Si, pour tout $i < n$, $X_i < \sigma_i$, alors $G_n = X_n$.
- Sinon, $G_n = X_k$, où k est le plus petit rang $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $X_i \geq \sigma_i$.

Le gain G_n est une variable aléatoire dont l'espérance est notée g_n . Dans l'exemple introductif du banquier, $n = 10$, X_i représente le cours de l'action au jour de rang i , et G_{10} est égal au prix de la vente.

On étudie en partie I trois stratégies dans le cas d'expériences aléatoires discrètes et en partie II trois stratégies dans le cas d'expériences aléatoires continues. On étudie dans le préliminaire une suite numérique que l'on retrouve à la fin de la partie II. Les parties I et II sont dans une large mesure indépendantes.

Préliminaire

On définit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par :

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{2}.$$

1. (a) Écrire un programme en Python qui calcule et affiche les 100 premiers termes de la suite. La commande `print(x)` affiche la valeur de x .

1. (b) À l'aide de ce programme, donner une valeur approchée de u_{100} à 10^{-2} près.

2. (a) Étudier la fonction h définie sur $[0, 1]$ par $h(x) = \frac{1+x^2}{2}$.

2. (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

2. (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.

3. (a) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2 - v_n}.$$

En déduire :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{v_n} \geq \frac{n+3}{2}.$$

3. (b) Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \frac{1}{2-x} \leq \frac{1}{2} + \frac{x}{2}.$$

En déduire :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n+3}.$$

Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n).$$

En déduire :

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{v_n} \leq \frac{n+2}{2} + \ln(n+2).$$

3. (c) Déterminer un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie I : Exemples d'expériences aléatoires discrètes

Dans cette partie, r est un entier impair supérieur ou égal à 3. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la variable X_i est discrète et équirépartie sur l'ensemble $\left\{0, \frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \dots, \frac{r}{r}\right\}$; chacune des $r+1$ valeurs est prise avec la même probabilité.

1. Première stratégie

Pour tout $n \geq 2$, on pose $\sigma_1 = 0$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = X_1$.

Calculer l'espérance g_n de G_n . On rappelle que

$$\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}.$$

2. Deuxième stratégie

Pour tout $n \geq 2$ et tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on pose $\sigma_i = 0,5$.

2. (a) Calculer $P(X_1 < 0,5)$.

2. (b) Exprimer, en fonction des variables $X_1, \dots, X_n$, l'événement $\left[G_n = \frac{j}{r}\right]$ pour

$$j \in \left\{0, 1, \dots, \frac{r-1}{2}\right\}, \text{ puis pour } j \in \left\{\frac{r+1}{2}, \dots, r\right\}.$$

En déduire que la loi de G_n est donnée par :

$$\forall j \in \left\{0, 1, \dots, \frac{r-1}{2}\right\}, \quad P\left(G_n = \frac{j}{r}\right) = \frac{2}{r+1} \frac{1}{2^n},$$

$$\forall j \in \left\{\frac{r+1}{2}, \dots, r\right\}, \quad P\left(G_n = \frac{j}{r}\right) = \frac{2}{r+1} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

2. (c) Calculer g_n . Montrer que la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Déterminer la limite de g_n quand n tend vers $+\infty$, avec r fixé. Pouvait-on prévoir ce résultat ? Déterminer la limite de g_n quand r tend vers $+\infty$ parmi les entiers impairs, avec n fixé.

3. Troisième stratégie

Pour tout $n \geq 2$ et tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on pose $\sigma_i = 1$.

3. (a) Exprimer, en fonction des variables $X_1, \dots, X_n$, l'événement $\left[G_n = \frac{j}{r}\right]$ pour $j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$. En déduire la loi de G_n .

3. (b) Calculer g_n . Montrer que la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Déterminer la limite de g_n quand n tend vers $+\infty$, avec r fixé. Pouvait-on prévoir ce résultat ? Déterminer la limite de g_n quand r tend vers $+\infty$ parmi les entiers impairs, avec n fixé.

4. Comparer brièvement les trois stratégies de la partie I.

Partie II : Exemples d'expériences aléatoires continues

Dans cette partie, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la variable X_i suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Elle admet donc une densité φ définie par $\varphi(t) = 1$ si $t \in [0, 1]$, et $\varphi(t) = 0$ sinon.

Les variables $(X_i)_{i \geq 1}$ sont indépendantes si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, les événements $[X_1 \leq t_1], \dots, [X_n \leq t_n]$ sont mutuellement indépendants. On a alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq t_i]\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq t_i).$$

Les variables étant à densité, ces égalités restent vraies si l'on remplace $[X_i \leq t_i]$ par $[X_i < t_i]$.

On note F_n la fonction de répartition de G_n .

1. Déterminer F , la fonction de répartition de X_1 .

2. Première stratégie

Pour tout $n \geq 2$, on pose $\sigma_1 = 0$. Calculer l'espérance g_n de G_n .

3. Deuxième stratégie

Soit $\alpha \in [0, 1[$. Pour tout $n \geq 2$ et tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on pose $\sigma_i = \alpha$.

3. (a) Que vaut $F_n(t)$ pour $t \notin [0, 1[$?

Pour $t \in [0, \alpha[$, décrire l'événement $[G_n \leq t]$ et en déduire $F_n(t)$.

Pour $t \in [\alpha, 1[$, décrire l'événement $[G_n > t]$ et en déduire $F_n(t)$.

Montrer que, pour $n \geq 2$, G_n admet une densité f_n définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \alpha^{n-1} & \text{si } t \in [0, \alpha[, \\ \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} & \text{si } t \in [\alpha, 1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $n = 1$, on rappelle que $G_1 = X_1$.

3. (b) Calculer g_n en fonction de α . Montrer que la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Déterminer la limite de g_n quand n tend vers $+\infty$. Pouvait-on prévoir ce résultat?

3. (c) Déterminer la valeur de α telle que g_2 soit maximum.

3. (d) Dans cette question, $\alpha = 0,5$.

Donner la valeur de g_n . Quelle remarque peut-on faire en comparant ce résultat avec celui de la deuxième stratégie de la partie I?

4. Troisième stratégie

Soit $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de réels telle que, pour tout $k \geq 1$, $0 \leq a_k < 1$.

Pour tout $n \geq 2$ et tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on pose $\sigma_i = a_{n-i}$.

4. (a) En utilisant les résultats de II.2, montrer que G_1 admet une densité et une espérance. Donner la valeur de g_1 .
4. (b) En utilisant les résultats de II.3, montrer que G_2 admet une densité et une espérance. Donner la valeur de g_2 en fonction de a_1 . Déterminer la valeur de a_1 qui maximise g_2 .
4. (c) Soit $n \geq 2$. On suppose que G_n admet une densité notée f_n .

On suppose de plus que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, G_k admet une espérance $g_k \in [0, 1[$, et que, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $a_k = g_k$.

La variable G_{n+1} est donc associée aux seuils $\sigma_1 = a_n, \sigma_2 = g_{n-1}, \dots, \sigma_n = g_1$.

Montrer que :

$$\forall t \in [0, a_n[, \quad F_{n+1}(t) = a_n F_n(t),$$

$$\forall t \in [a_n, 1[, \quad F_{n+1}(t) = t - a_n + a_n F_n(t).$$

En déduire que G_{n+1} admet une densité f_{n+1} et donner une relation entre f_{n+1} et f_n .

En déduire que G_{n+1} admet une espérance g_{n+1} vérifiant :

$$g_{n+1} = a_n g_n + \frac{1}{2}(1 - a_n^2).$$

Déterminer la valeur de a_n qui maximise g_{n+1} .

Montrer que, pour cette valeur de a_n , $g_{n+1} = \frac{1 + g_n^2}{2}$ et $g_{n+1} \in [0, 1[$.

4. (d) On construit ainsi, par récurrence, une suite de variables aléatoires $(G_n)_{n \geq 1}$ dont les espérances vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g_{n+1} = \frac{1 + g_n^2}{2}.$$

Quelle est alors la limite de la suite $(g_n)_{n \geq 1}$?

5. Comparer les trois stratégies de la partie II.