



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**HEC**

**Mathématiques 1**

**1996**

*Sujet de mathématiques approfondies*

---

**Mathématiques approfondies — Prépa ECG**

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, on désigne par  $n$  un entier naturel donné supérieur ou égal à 2 et par  $f$  une application de classe  $C^{2n}$  du segment  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

On se propose d'établir une méthode de calcul approché de l'intégrale

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(t) dt.$$

Dans la partie I, on étudie le polynôme  $P_n(x) = (x^2 - 1)^n$ , ses dérivées  $P_n^{(j)}$  et notamment sa dérivée d'ordre  $n$ ,  $P_n^{(n)}$ .

La partie II propose l'étude de deux procédés d'interpolation polynomiale de  $f$ . Le premier permet de définir la méthode utilisée pour le calcul approché de  $I(f)$ ; le second permet de majorer l'erreur commise.

## Partie I

---

### 1. Étude des racines de $P_n$ et de ses dérivées

1.a) Établir l'existence, pour tout entier naturel  $j \leq n$ , d'un polynôme  $Q_j$  tel que, pour tout réel  $x$  :

$$P_n^{(j)}(x) = (x^2 - 1)^{n-j} Q_j(x), \quad Q_j(-1) \neq 0, \quad Q_j(1) \neq 0.$$

On pourra raisonner par récurrence sur  $j$ , et on précisera l'expression de  $Q_{j+1}$  en fonction de  $Q_j$  pour  $0 \leq j \leq n-1$ .

En déduire les valeurs en  $-1$  et  $1$  de  $P_n$  et de ses dérivées d'ordre  $j < n$ .

1.b) À l'aide du théorème de Rolle, dont on rappellera l'énoncé précis, montrer que  $P'_n$  admet au moins une racine dans  $] -1, 1[$ , puis que  $P''_n$  admet au moins deux racines distinctes dans  $] -1, 1[$ .

Établir que, pour tout entier  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $P_n^{(j)}$  admet au moins  $j$  racines distinctes dans  $] -1, 1[$ .

1.c) En déduire que  $P_n^{(n)}$  admet exactement  $n$  racines réelles distinctes, et que celles-ci appartiennent à  $] -1, 1[$ .

Dans toute la suite du problème, ces racines sont notées  $r_1, \dots, r_n$ , avec  $-1 < r_1 < \dots < r_n < 1$ .

## 2. Calcul d'une intégrale auxiliaire

On pose, pour tout couple  $(p, q)$  d'entiers naturels :

$$W(p, q) = \int_{-1}^1 (t-1)^p (t+1)^q dt.$$

2.a) À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre  $W(p+1, q-1)$  et  $W(p, q)$  lorsque  $q \geq 1$ .

2.b) En déduire que :

$$W(n, n) = (-1)^n \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

## 3. Calcul d'intégrales associées au polynôme $P_n$ et à ses dérivées

Dans cette question,  $Q$  désigne un polynôme à coefficients réels.

3.a) Établir, à l'aide d'intégrations par parties successives, l'égalité :

$$\int_{-1}^1 Q(t) P_n^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_{-1}^1 Q^{(n)}(t) P_n(t) dt.$$

3.b) Quelle est la valeur de  $\int_{-1}^1 Q(t) P_n^{(n)}(t) dt$  lorsque  $Q$  est de degré strictement inférieur à  $n$  ?

3.c) Expliciter  $P_n^{(2n)}$ , puis exprimer  $\int_{-1}^1 (P_n^{(n)}(t))^2 dt$  en fonction de  $W(n, n)$  et obtenir ainsi sa valeur.

## Partie II

### 1. Polynôme d'interpolation de Lagrange de $f$

On pose, pour  $j \in \{1, \dots, n\}$  et tout réel  $x$  :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \frac{x - r_i}{r_j - r_i}, \quad \lambda_j = \int_{-1}^1 L_j(t) dt.$$

1.a) Calculer  $L_j(r_i)$  en distinguant suivant que  $i$  est, ou non, égal à  $j$ .

En déduire que  $(L_1, \dots, L_n)$  est une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  des polynômes de degré strictement inférieur à  $n$ .

1.b) Expliciter, dans cette base, un polynôme  $A_n$  de degré strictement inférieur à  $n$  tel que  $A_n(r_j) = f(r_j)$  pour chaque  $j \in \{1, \dots, n\}$ , et prouver qu'un tel polynôme est unique.

1.c) Établir l'égalité :

$$\int_{-1}^1 A_n(t) dt = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(r_j).$$

On prend désormais pour valeur approchée de  $I(f)$  l'intégrale  $I(A_n)$ , que l'on notera  $I_n(f)$  dans la suite du problème. Autrement dit :

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(r_j).$$

### 2. Comparaison de $I(P)$ et de $I_n(P)$ lorsque $P$ est un polynôme

Dans cette question,  $P$  désigne un polynôme, dont le degré est noté  $\deg(P)$ . Par convention, le degré du polynôme nul est posé égal à  $-\infty$ .

2.a) On suppose que  $\deg(P) < n$ . Comparer  $I(P)$  et  $I_n(P)$ .

2.b) On suppose que  $\deg(P) < 2n$ .

Justifier l'existence d'un couple  $(Q, R)$  de polynômes tel que  $P = QP_n^{(n)} + R$  et  $\deg(R) < n$ .

Montrer que  $\deg(Q) < n$ .

Déduire des résultats de la partie I que  $I(P) = I(R)$ .

Comparer  $I_n(R)$  et  $I_n(P)$ , puis  $I(P)$  et  $I_n(P)$ .

### 3. Polynôme d'interpolation de Hermite de $f$

3.a) À tout polynôme  $H \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ , on associe :

$$\varphi(H) = (H(r_1), H'(r_1), H(r_2), H'(r_2), \dots, H(r_n), H'(r_n)) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Établir que  $\varphi$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  et déterminer son noyau.

On rappelle qu'un polynôme non nul de degré  $d$  admet au plus  $d$  racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

3.b) En déduire qu'il existe un polynôme  $B_n$  de degré strictement inférieur à  $2n$ , et un seul, tel que  $B_n(r_j) = f(r_j)$  et  $B'_n(r_j) = f'(r_j)$  pour chaque  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

3.c) Déduire des résultats précédents que  $I(B_n) = I_n(B_n)$ , puis que  $I(B_n) = I_n(f)$ .

### 4. Majoration de $|I(f) - I_n(f)|$

Soit  $M_{2n}(f)$  le maximum, dont on justifiera l'existence, de  $|f^{(2n)}(t)|$  lorsque  $t$  décrit  $[-1, 1]$ .

4.a) Dans cette question,  $x$  désigne un réel donné de  $[-1, 1]$ , distinct de  $r_1, \dots, r_n$ . On envisage l'application  $g_x$  définie sur  $[-1, 1]$  par :

$$g_x(t) = f(t) - B_n(t) - \alpha(P_n^{(n)}(t))^2,$$

où  $\alpha$  est le réel, dont on justifiera l'existence, tel que  $g_x(x) = 0$ .

Calculer  $g'_x(r_1), \dots, g'_x(r_n)$ .

En appliquant le théorème de Rolle à  $g_x$  sur des intervalles convenables, prouver que  $g'_x$  s'annule en au moins  $n$  points de  $] -1, 1[$ , distincts de  $r_1, \dots, r_n$ .

Établir que  $g_x^{(2n)}$  s'annule en au moins un point  $c \in [-1, 1]$ .

Expliciter  $g_x^{(2n)}(t)$  et en déduire une expression de  $\alpha$  en fonction de  $f^{(2n)}(c)$  et de  $n$ .

À l'aide de  $g_x(x) = 0$ , établir que :

$$f(x) - B_n(x) = \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} f^{(2n)}(c) (P_n^{(n)}(x))^2.$$

4.b) Prouver que, pour tout réel  $x \in [-1, 1]$  :

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} M_{2n}(f) (P_n^{(n)}(x))^2.$$

On distinguera deux cas suivant que  $x$  est, ou non, égal à l'un des nombres  $r_1, \dots, r_n$ .

Déduire des résultats des parties I et II que :

$$|I(f) - I_n(f)| \leq \frac{M_{2n}(f)}{\binom{2n}{n}^2} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

4.c) On considère une application  $g$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , définie et de classe  $C^{2n}$  sur un segment  $[a, b]$ . On désigne par  $M_{2n}(g)$  le maximum de  $|g^{(2n)}(u)|$  lorsque  $u$  décrit  $[a, b]$ .

En envisageant la fonction  $f$  définie sur  $[-1, 1]$  par  $f(t) = g((a+b)/2 + t(b-a)/2)$ , donner en fonction de  $a, b, n$  et de  $M_{2n}(g)$  un majorant de :

$$\left| \int_a^b g(u) du - \frac{b-a}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j g\left(\frac{a+b}{2} + r_j \frac{b-a}{2}\right) \right|.$$

## 5. Étude d'un cas particulier

Dans cette question, on suppose que  $n = 2$ .

5.a) Déterminer le polynôme  $P_2''$ , ses racines  $r_1, r_2$ , les polynômes  $L_1, L_2$  et les intégrales  $\lambda_1 = I(L_1), \lambda_2 = I(L_2)$ .

5.b) En appliquant la majoration obtenue en II.4.c, montrer que :

$$\left| \int_a^b g(u) du - \frac{b-a}{2} \left( g\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) \right) \right| \leq \frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320}.$$

5.c) On considère un entier  $p \geq 1$  et on subdivise  $[a, b]$  en  $p$  sous-segments de même longueur, dont on note les milieux  $c_1, \dots, c_p$ .

En appliquant l'inégalité précédente à chacun de ces sous-segments, majorer en fonction de  $p$  et de  $M_4(g)$  l'expression :

$$\left| \int_a^b g(u) du - \frac{b-a}{2p} \sum_{k=1}^p \left( g\left(c_k - \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right) + g\left(c_k + \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right) \right) \right|.$$

5.d) Écrire en Python un algorithme de calcul de la somme précédente, les réels  $a, b$ , la fonction  $g$  et l'entier  $p$  étant supposés donnés.