



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1996

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Préliminaire

1. (a) Calcul des cent premiers termes

Code adapté en Python. Le programme affiche d'abord u_1 , puis applique la relation de récurrence pour calculer successivement $u_2, \dots, u_{100}$:

Python

```
u = 0.5
print(1, u)
for n in range(2, 101):
    u = (1 + u**2) / 2
    print(n, u)
```

La borne supérieure de range est exclue : range(2, 101) parcourt exactement les entiers de 2 à 100. À chaque itération, la nouvelle valeur de u est calculée à partir de l'ancienne, puis affichée avec son indice.

Le programme produit donc exactement 100 lignes, correspondant aux 100 premiers termes. La variable u contient u_{100} en fin de programme. Ce code a été exécuté.

1. (b) Valeur approchée de u_{100}

Question adaptée au programme actuel : le calcul numérique est effectué avec le programme Python de 1(a).

L'exécution fournit :

$$u_{100} \simeq 0,9812084402587709.$$

À 10^{-2} près, on peut donc donner :

$$u_{100} \simeq 0,98.$$

Cette valeur est une approximation numérique ; la convergence et son ordre seront établis par les questions suivantes.

2. (a) Étude de h

La fonction $h(x) = (1 + x^2)/2$ est un polynôme, donc elle est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur un ouvert contenant cet intervalle. Sa dérivée vaut $h'(x) = x$.

Elle est strictement croissante sur $[0, 1]$: la dérivée est strictement positive sur $]0, 1]$, ou, directement, $x^2 < y^2$ lorsque $0 \leq x < y \leq 1$. Les valeurs aux extrémités sont :

$$h(0) = \frac{1}{2}, \quad h(1) = 1.$$

Ainsi, $h([0, 1]) = [1/2, 1]$. En particulier, si $x \in [1/2, 1[$, alors $h(x) \in [1/2, 1[$.

Pour comparer l'image à son argument, on calcule :

$$h(x) - x = \frac{1 + x^2 - 2x}{2} = \frac{(1 - x)^2}{2}.$$

Cette différence est positive pour $0 \leq x < 1$ et nulle pour $x = 1$. Le seul point fixe de h dans $[0, 1]$ est donc 1.

2. (b) Croissance de la suite

On établit d'abord que $u_n \in [1/2, 1[$ pour tout $n \geq 1$. L'initialisation est donnée par $u_1 = 1/2$. Si u_n est dans cet intervalle, la stabilité vérifiée en 2(a) donne $u_{n+1} = h(u_n) \in [1/2, 1[$. La propriété est vraie par récurrence.

Méthode 1 — Signe de la différence de deux termes

Pour chaque n ,

$$u_{n+1} - u_n = h(u_n) - u_n = \frac{(1 - u_n)^2}{2} > 0,$$

puisque $u_n < 1$. La suite est donc strictement croissante.

Méthode 2 — Propagation par une fonction croissante

On a $u_2 = 5/8 > 1/2 = u_1$. Supposons $u_{n+1} > u_n$. Les deux termes sont dans $[0, 1]$, où h est strictement croissante ; par conséquent,

$$u_{n+2} = h(u_{n+1}) > h(u_n) = u_{n+1}.$$

La récurrence montre que tous les écarts successifs sont strictement positifs.

La première méthode exploite une identité explicite ; la seconde se réutilise pour des suites définies par une application croissante, même lorsque la différence est moins simple à calculer.

2. (c) Convergence et limite

La suite est croissante et majorée par 1, d'après 2(b). Le théorème de la limite monotone assure sa convergence vers un réel $\ell \in [1/2, 1]$.

Comme h est continue sur $[0, 1]$, le passage à la limite dans $u_{n+1} = h(u_n)$ donne :

$$\ell = \frac{1 + \ell^2}{2}.$$

Cette égalité équivaut à $(\ell - 1)^2 = 0$. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Le fait que 1 soit un point fixe ne suffisait pas à lui seul ; la convergence a d'abord été établie par monotonie et majoration.

3. (a) Accroissements des inverses de v_n

Par définition et 2(b), $0 < v_n = 1 - u_n \leq 1/2$ pour tout n . Les inverses demandés sont donc définis. De plus, $v_n \rightarrow 0$ par 2(c).

En remplaçant u_n par $1 - v_n$ dans la récurrence,

$$v_{n+1} = 1 - \frac{1 + (1 - v_n)^2}{2} = v_n - \frac{v_n^2}{2} = \frac{v_n(2 - v_n)}{2}.$$

Comme $v_n > 0$ et $2 - v_n > 0$, on peut calculer :

$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{2}{v_n(2 - v_n)} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2 - v_n}.$$

Puisque $0 < v_n \leq 1/2$, le dernier membre est au moins égal à $1/2$. Pour $n \geq 2$, en sommant de $k = 1$ à $k = n - 1$,

$$\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_1} \geq \frac{n-1}{2}.$$

On a $v_1 = 1/2$, donc :

$$\frac{1}{v_n} \geq 2 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+3}{2}.$$

Pour $n = 1$, les deux membres valent 2. L'inégalité est ainsi valable pour tous les $n \geq 1$.

On retiendra aussi $v_n \leq 2/(n+3)$.

3. (b) Majoration des inverses

Pour $x \in [0, 1]$, le dénominateur $2 - x$ est strictement positif. La différence entre la borne annoncée et la fraction vaut :

$$\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2-x} = \frac{x(1-x)}{2(2-x)} \geq 0.$$

Cela démontre la première inégalité. En l'appliquant à $x = v_n \in [0, 1]$, puis en utilisant 3(a),

$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2 - v_n} \leq \frac{1}{2} + \frac{v_n}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n+3}.$$

Pour établir la majoration harmonique, on utilise la décroissance de $t \mapsto 1/t$ sur $[1, +\infty[$.

Pour chaque entier $k \geq 2$ et tout $t \in [k-1, k]$, $1/t \geq 1/k$. En intégrant, puis en sommant,

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}, \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n).$$

Enfin, sommons la majoration des accroissements de $1/v_k$ pour $k = 1, \dots, n-1$:

$$\frac{1}{v_n} \leq 2 + \frac{n-1}{2} + \sum_{j=4}^{n+2} \frac{1}{j} = \frac{n+3}{2} + \sum_{j=4}^{n+2} \frac{1}{j}.$$

Pour $n \geq 2$, la somme harmonique obtenue ci-dessus donne :

$$\sum_{j=4}^{n+2} \frac{1}{j} = \sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{j} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \leq \ln(n+2) - \frac{5}{6}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{v_n} \leq \frac{n+3}{2} + \ln(n+2) - \frac{5}{6} = \frac{n+2}{2} + \ln(n+2) - \frac{1}{3}.$$

Cette borne est même légèrement plus forte que celle demandée. En particulier :

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{v_n} \leq \frac{n+2}{2} + \ln(n+2).$$

3. (c) Équivalent de v_n

Méthode 1 — Encadrement obtenu aux questions précédentes

Les questions 3(a) et 3(b) donnent, pour $n \geq 2$:

$$\frac{n+3}{2} \leq \frac{1}{v_n} \leq \frac{n+2}{2} + \ln(n+2).$$

En divisant par $n > 0$, les deux bornes tendent vers $1/2$, car $\ln(n+2)/n \rightarrow 0$ par croissance comparée. Le théorème d'encadrement donne :

$$\frac{1}{nv_n} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Les termes sont positifs et la limite est non nulle ; la continuité de la fonction inverse permet d'obtenir $nv_n \rightarrow 2$. Par conséquent :

$$v_n \sim \frac{2}{n}.$$

Méthode 2 — Somme des accroissements et moyenne arithmétique

La relation exacte de 3(a) donne :

$$\frac{1}{v_n} = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2 - v_k}.$$

Comme $v_k \rightarrow 0$, les termes $b_k = 1/(2 - v_k)$ tendent vers $1/2$. Justifions directement la limite de leur moyenne, sans supposer un théorème supplémentaire.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe K tel que $|b_k - 1/2| \leq \varepsilon$ pour $k \geq K$. Pour $n > K$, on a :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(b_k - \frac{1}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K-1} \left| b_k - \frac{1}{2} \right| + \frac{n-K}{n} \varepsilon.$$

Le premier terme tend vers 0, car son numérateur est une somme fixe ; le second est au plus égal à ε . Puisque ε est arbitraire, cette moyenne tend vers 0.

En divisant l'identité télescopique par n , on obtient de nouveau $1/(nv_n) \rightarrow 1/2$, puis $v_n \sim 2/n$.

La première méthode utilise les bornes explicites de l'énoncé ; la seconde montre comment des accroissements tendant vers une constante déterminent une croissance linéaire de la suite transformée.

Partie I : Exemples d'expériences aléatoires discrètes

Dans cette partie, toutes les variables X_i sont comprises entre 0 et 1. Le gain sélectionne une de ces valeurs, donc $0 \leq G_n \leq 1$. Son espérance existe avant tout calcul de loi ou de moyenne.

1. Première stratégie

Puisque $\sigma_1 = 0$ et $X_1 \geq 0$, on accepte immédiatement la première valeur. Ainsi, $G_n = X_1$, y compris pour $n = 1$ par définition.

Méthode 1 — Somme des valeurs pondérées par leurs probabilités

Par équiprobabilité et la formule de somme arithmétique rappelée dans l'énoncé,

$$g_n = E(X_1) = \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^r \frac{j}{r} = \frac{1}{r(r+1)} \frac{r(r+1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Méthode 2 — Symétrie de la loi

La transformation $x \mapsto 1 - x$ permute les valeurs $0, 1/r, \dots, 1$ et conserve leur probabilité. Les variables X_1 et $1 - X_1$ ont donc la même loi.

Les espérances existent, car les variables sont bornées. Ainsi,

$$E(X_1) = E(1 - X_1) = 1 - E(X_1),$$

ce qui donne encore $g_n = 1/2$ pour tout n .

Le calcul direct utilise la loi ; la symétrie permet de déterminer la moyenne sans effectuer de somme.

2. (a) Probabilité de refuser une observation

Écrivons $r = 2m + 1$, avec $m = (r - 1)/2$. Les valeurs strictement inférieures à $1/2$ sont $0, 1/r, \dots, m/r$, soit $m + 1 = (r + 1)/2$ valeurs.

Chacune a la probabilité $1/(r + 1)$, donc :

$$P(X_1 < 0,5) = \frac{1}{2}.$$

Comme r est impair, $1/2$ n'est pas une valeur possible : les deux moitiés du support comportent le même nombre d'éléments.

2. (b) Loi du gain pour un seuil égal à $1/2$

Pour $j \in \{0, \dots, (r - 1)/2\}$, la valeur j/r est inférieure au seuil. Elle ne peut être retenue qu'à l'ultime tirage, après refus de tous les précédents. Ainsi :

$$\left[G_n = \frac{j}{r} \right] = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} [X_i < 1/2] \right) \cap \left[X_n = \frac{j}{r} \right].$$

L'intersection est vide de conditions lorsque $n = 1$ et désigne alors Ω . Par indépendance et 2(a),

$$P\left(G_n = \frac{j}{r}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{r+1} = \frac{2}{r+1} \frac{1}{2^n}.$$

Pour $j \in \{(r + 1)/2, \dots, r\}$, la valeur est acceptable. Elle peut être retenue au premier rang où elle est observée après une suite de refus, ou à l'ultime rang. On a donc la réunion disjointe :

$$\left[G_n = \frac{j}{r} \right] = \bigcup_{k=1}^n \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i < 1/2] \right) \cap \left[X_k = \frac{j}{r} \right] \right).$$

Deux rangs différents ne peuvent contribuer simultanément : l'acceptation au premier interdit que toutes les observations antérieures au second soient sous le seuil.

Par additivité et indépendance,

$$P\left(G_n = \frac{j}{r}\right) = \frac{1}{r+1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{2}{r+1} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Cette loi vaut aussi pour $n = 1$, où les deux formules donnent $1/(r + 1)$ pour chaque valeur.

2. (c) Espérance, croissance et limites

Méthode 1 — Regroupement de la loi en deux moitiés du support

La masse totale de la moitié basse est 2^{-n} , et celle de la moitié haute est $1 - 2^{-n}$, d'après 2(b). Les probabilités sont constantes au sein de chaque moitié.

La moyenne des valeurs de la moitié basse est la moyenne de ses extrémités 0 et $(r - 1)/(2r)$, donc :

$$\mu_- = \frac{r - 1}{4r}.$$

La moyenne de la moitié haute est la moyenne de ses extrémités $(r + 1)/(2r)$ et 1, donc :

$$\mu_+ = \frac{3r + 1}{4r}.$$

Par conséquent,

$$g_n = \mu_- 2^{-n} + \mu_+ (1 - 2^{-n}) = \frac{3r + 1}{4r} - \frac{r + 1}{r 2^{n+1}}.$$

Méthode 2 — Conditionnement sur le premier choix

Si $X_1 \geq 1/2$, on reçoit X_1 ; sinon on recommence la même stratégie avec les $n - 1$ observations restantes, indépendantes du premier tirage. La probabilité de chaque alternative vaut $1/2$.

La loi de la valeur acceptée sur la première alternative est uniforme sur la moitié haute, d'espérance μ_+ . Pour $n \geq 2$, la formule de l'espérance totale donne :

$$g_n = \frac{1}{2} \mu_+ + \frac{1}{2} g_{n-1}.$$

On a $g_1 = 1/2$. En soustrayant μ_+ , la récurrence devient $g_n - \mu_+ = (g_{n-1} - \mu_+)/2$. Ainsi,

$$g_n = \mu_+ + \left(\frac{1}{2} - \mu_+\right) 2^{-(n-1)} = \frac{3r+1}{4r} - \frac{r+1}{r 2^{n+1}}.$$

La première méthode utilise la loi complète; la seconde calcule la moyenne en analysant seulement la première décision.

Le coefficient de $2^{-(n+1)}$ est strictement positif. Ainsi,

$$g_{n+1} - g_n = \frac{r+1}{r 2^{n+2}} > 0,$$

et la suite est strictement croissante. À r fixé,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = \frac{3r+1}{4r} = \mu_+.$$

Ce résultat était prévisible : la probabilité de n'obtenir aucune valeur acceptable dans les $n-1$ premiers tirages vaut $2^{-(n-1)}$ et tend vers 0. Lorsqu'une valeur est acceptée avant le dernier tirage, sa loi est uniforme sur la moitié haute, dont la moyenne est μ_+ .

Enfin, à n fixé, lorsque r tend vers $+\infty$ parmi les entiers impairs,

$$g_n \rightarrow \frac{3}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

3. (a) Loi du gain lorsque seul le maximum est accepté

Posons $q = r/(r+1) \in]0, 1[$. Puisque $\sigma_i = 1$, on accepte une observation avant l'ultime rang si et seulement si elle vaut 1.

Pour $0 \leq j \leq r-1$, la valeur j/r ne peut être obtenue qu'au dernier rang, après absence de valeur 1 dans les rangs précédents :

$$\left[G_n = \frac{j}{r}\right] = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} [X_i < 1]\right) \cap \left[X_n = \frac{j}{r}\right].$$

Comme $P(X_i < 1) = q$, l'indépendance donne :

$$P\left(G_n = \frac{j}{r}\right) = \frac{q^{n-1}}{r+1} \quad (0 \leq j \leq r-1).$$

Le gain vaut 1 si et seulement si au moins un des n tirages vaut 1. Le complément de cet événement est l'absence de 1 à tous les rangs, de probabilité q^n . Ainsi :

$$P(G_n = 1) = 1 - q^n.$$

Les probabilités totalisent $rq^{n-1}/(r+1) + 1 - q^n = 1$. Pour $n = 1$, elles redonnent la loi uniforme initiale.

3. (b) Espérance, croissance et limites

Méthode 1 — Calcul à partir de la loi

À l'aide de 3(a) et de la somme arithmétique,

$$g_n = 1 - q^n + \frac{q^{n-1}}{r(r+1)} \sum_{j=0}^{r-1} j = 1 - q^n + \frac{r-1}{2(r+1)} q^{n-1}.$$

Comme $q = r/(r+1)$, les deux termes proportionnels à q^{n-1} se regroupent :

$$g_n = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r+1} \right)^{n-1}.$$

Méthode 2 — Conditionnement sur l'apparition de la valeur 1

Soit A l'événement qu'au moins un des $n-1$ premiers tirages vaut 1. On a $P(A) = 1 - q^{n-1}$. Sur A , le gain vaut 1 ; sur son complément, le gain vaut X_n .

L'événement A dépend seulement des $n-1$ premiers tirages et est indépendant de X_n . On peut donc écrire :

$$G_n = \mathbf{1}_A + X_n \mathbf{1}_{A^c},$$

puis, en utilisant l'indépendance et $E(X_n) = 1/2$,

$$g_n = P(A) + E(X_n)P(A^c) = 1 - q^{n-1} + \frac{1}{2}q^{n-1}.$$

Cette formule donne de nouveau le résultat. Pour $n = 1$, $A = \emptyset$ et l'identité reste valide.

La première méthode réutilise la loi ; la seconde montre le gain comme une alternative entre obtenir la valeur maximale et accepter une dernière observation indépendante.

Pour r fixé, $0 < q < 1$, et :

$$g_{n+1} - g_n = \frac{1}{2}q^{n-1}(1-q) > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = 1.$$

Cette limite était prévisible, puisque la probabilité q^{n-1} de n'avoir vu aucun 1 avant le dernier tirage tend vers 0.

À n fixé, $q \rightarrow 1$ lorsque $r \rightarrow +\infty$, donc :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} g_n = \frac{1}{2}.$$

La valeur 1 a une probabilité $1/(r+1)$ qui devient très faible : pour un nombre fixé d'observations, la stratégie finit alors presque toujours par accepter le dernier tirage.

4. Comparaison des trois stratégies discrètes

Notons $g_n^{(1)}$, $g_n^{(2)}$, $g_n^{(3)}$ les espérances des trois stratégies. Les résultats sont :

$$g_n^{(1)} = \frac{1}{2}, \quad g_n^{(2)} = \frac{3r+1}{4r} - \frac{r+1}{r2^{n+1}}, \quad g_n^{(3)} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r+1} \right)^{n-1}.$$

Pour $n = 1$, les trois stratégies coïncident. Pour $n \geq 2$, les deuxième et troisième ont une espérance strictement supérieure à $1/2$.

À r fixé, la deuxième converge vers $(3r+1)/(4r) < 1$, avec une erreur divisée par 2 à chaque observation supplémentaire. La troisième converge vers 1, mais avec une erreur multipliée par $r/(r+1)$, qui est plus proche de 1.

Il n'existe pas de classement uniforme des deuxième et troisième pour un horizon fini. Par exemple, pour $r = 3$:

- À $n = 2$, $g_2^{(2)} = 2/3 > 5/8 = g_2^{(3)}$.

- À $n = 5$, $g_5^{(2)} = 13/16 < 431/512 = g_5^{(3)}$.

La troisième devient meilleure lorsque l'horizon est suffisamment long à r fixé. À l'inverse, pour $n \geq 2$ fixé et r très grand, sa moyenne tend vers $1/2$, alors que celle de la deuxième tend vers $3/4 - 2^{-(n+1)} > 1/2$.

Partie II : Exemples d'expériences aléatoires continues

Les observations sont uniformes sur $[0, 1]$. Le gain prend une de ces valeurs, donc $0 \leq G_n \leq 1$ presque sûrement pour toute stratégie considérée. Il admet ainsi une espérance finie. La construction d'une densité sera vérifiée séparément lorsque la question le demande.

1. Fonction de répartition d'une uniforme

La variable X_1 admet la densité φ égale à 1 sur $[0, 1]$ et nulle ailleurs. L'intégration de cette densité donne :

$$F(t) = P(X_1 \leq t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ t & 0 \leq t < 1, \\ 1 & t \geq 1. \end{cases}$$

En particulier, $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$. La loi étant à densité, chaque valeur ponctuelle, notamment 0 ou 1, a une probabilité nulle.

2. Première stratégie continue

Comme $X_1 \geq 0$ presque sûrement et $\sigma_1 = 0$, on accepte la première observation : $G_n = X_1$ presque sûrement. Cette égalité vaut aussi pour $n = 1$ par définition.

L'espérance d'une uniforme sur $[0, 1]$, ou son calcul direct par transfert, donne :

$$g_n = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2} \quad (n \geq 1).$$

3. (a) Fonction de répartition et densité pour un seuil constant

Traitons d'abord $0 < \alpha < 1$ et $n \geq 2$. Le gain est compris entre 0 et 1 presque sûrement, donc $F_n(t) = 0$ si $t < 0$, et $F_n(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Si $0 \leq t < \alpha$, une valeur au plus égale à t ne peut être acceptée avant le dernier tirage. On a donc :

$$[G_n \leq t] = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} [X_i < \alpha] \right) \cap [X_n \leq t].$$

Par indépendance, uniformité et $P(X_i < \alpha) = \alpha$,

$$F_n(t) = \alpha^{n-1}t \quad (0 \leq t < \alpha).$$

Si $\alpha \leq t < 1$, le gain dépasse t si une valeur supérieure à t est retenue à un rang k , après refus des $k-1$ observations précédentes. Ainsi :

$$[G_n > t] = \bigcup_{k=1}^n \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i < \alpha] \right) \cap [X_k > t] \right).$$

La réunion est disjointe : une valeur supérieure à $t \geq \alpha$ est acceptable et ne permet plus d'atteindre un rang ultérieur de cette réunion. L'intersection pour $k=1$ désigne Ω .

Par additivité et indépendance,

$$P(G_n > t) = (1-t) \sum_{k=1}^n \alpha^{k-1} = (1-t) \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}.$$

Le dénominateur est non nul, car $\alpha < 1$. On obtient :

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \alpha^{n-1}t & 0 \leq t < \alpha, \\ 1 - (1-t) \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} & \alpha \leq t < 1, \\ 1 & t \geq 1. \end{cases}$$

Les deux expressions intérieures coïncident au raccord $t = \alpha$, avec valeur α^n . Elles se raccordent aussi continûment aux valeurs 0 et 1 aux extrémités.

Pour vérifier rigoureusement la densité annoncée, définissons f_n comme dans le sujet. Elle est positive ou nulle, continue sauf éventuellement en 0, α et 1, et son intégrale vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \alpha^{n-1}\alpha + \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}(1-\alpha) = 1.$$

En l'intégrant jusqu'à t , on retrouve précisément la fonction F_n ci-dessus. Elle est donc une densité de G_n , et pas seulement une dérivée formelle de sa répartition.

Si $\alpha = 0$, la première observation est toujours acceptée, donc $G_n = X_1$ presque sûrement. La première branche de f_n porte sur l'intervalle vide $[0, 0[$; la seconde vaut 1 sur $[0, 1[$, ce qui redonne une densité uniforme pour tout $n \geq 2$.

Si $n = 1$, pour tout α , $G_1 = X_1$ et sa densité est uniforme. Ce cas est écrit séparément dans le sujet adapté pour éviter une puissance ambiguë lorsque $\alpha = 0$ et $n - 1 = 0$.

3. (b) Espérance, croissance et limite pour un seuil constant

Méthode 1 — Intégration de la densité

Pour $n \geq 2$, la densité de 3(a) permet d'écrire :

$$g_n = \alpha^{n-1} \int_0^\alpha t dt + \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \int_\alpha^1 t dt.$$

Les intégrales sont sur des segments et les fonctions sont bornées, donc elles existent. Leur calcul donne :

$$g_n = \frac{\alpha^{n+1}}{2} + \frac{(1-\alpha^n)(1-\alpha^2)}{2(1-\alpha)}.$$

En utilisant $1 - \alpha^2 = (1 - \alpha)(1 + \alpha)$ et $1 - \alpha > 0$,

$$g_n = \frac{\alpha^{n+1} + (1 + \alpha)(1 - \alpha^n)}{2} = \frac{1 + \alpha - \alpha^n}{2}.$$

Cette formule vaut aussi pour $\alpha = 0$ et $n \geq 2$, où elle donne $1/2$. Pour $n = 1$, elle donne également $(1 + \alpha - \alpha)/2 = 1/2$, comme attendu.

Méthode 2 — Reprise de la stratégie après un premier refus

Pour $n \geq 2$, soit H_{n-1} le gain de la même stratégie appliquée aux observations $X_2, \dots, X_n$. Il a la même loi que G_{n-1} et est indépendant de X_1 , car il dépend uniquement des observations restantes.

On a l'identité :

$$G_n = X_1 \mathbf{1}_{[X_1 \geq \alpha]} + H_{n-1} \mathbf{1}_{[X_1 < \alpha]}.$$

Toutes les variables sont bornées. La linéarité, le transfert pour le premier terme et l'indépendance pour le second donnent :

$$g_n = \int_{\alpha}^1 t \, dt + \alpha g_{n-1} = \frac{1 - \alpha^2}{2} + \alpha g_{n-1}.$$

Le point fixe de cette récurrence est $L = (1 + \alpha)/2$, puisque $(1 - \alpha)L = (1 - \alpha^2)/2$. Ainsi, $g_n - L = \alpha(g_{n-1} - L)$. Avec $g_1 = 1/2$, pour $0 < \alpha < 1$,

$$g_n = L + \alpha^{n-1} \left(\frac{1}{2} - L \right) = \frac{1 + \alpha - \alpha^n}{2}.$$

Pour $\alpha = 0$, la récurrence donne directement $g_n = 1/2$ pour tous les n . Cette seconde méthode explique le calcul de moyenne par la première décision, sans nécessiter la loi complète du gain.

Pour tout $\alpha \in [0, 1[$ et $n \geq 1$,

$$g_{n+1} - g_n = \frac{\alpha^n(1 - \alpha)}{2} \geq 0.$$

La suite est donc croissante ; elle est strictement croissante si $\alpha > 0$, et constante si $\alpha = 0$. Comme $\alpha^n \rightarrow 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = \frac{1 + \alpha}{2}.$$

On pouvait prévoir cette limite : la probabilité de ne voir aucune valeur acceptable avant le dernier rang est $\alpha^{n-1} \rightarrow 0$. Lorsqu'on accepte une observation, sa loi conditionnelle est uniforme sur $[\alpha, 1]$, de moyenne $(1 + \alpha)/2$. Pour $\alpha = 0$, on accepte immédiatement et cette moyenne vaut $1/2$.

3. (c) Meilleur seuil pour deux observations

D'après 3(b),

$$g_2(\alpha) = \frac{1 + \alpha - \alpha^2}{2} \quad (0 \leq \alpha < 1).$$

Méthode 1 — Étude de la dérivée

La fonction est dérivable sur un ouvert contenant $[0, 1]$ et $g_2'(\alpha) = 1/2 - \alpha$. Elle est strictement croissante jusqu'à $\alpha = 1/2$, puis strictement décroissante. Son maximum sur $[0, 1]$ est donc atteint uniquement en $\alpha = 1/2$ et vaut :

$$g_2(1/2) = \frac{5}{8}.$$

Méthode 2 — Complétion du carré

Une identité exacte donne :

$$g_2(\alpha) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right)^2.$$

Le carré est positif ou nul et s'annule exactement en $\alpha = 1/2$, qui appartient à l'ensemble admissible. Cela prouve directement le même maximum et son unicité.

La dérivation donne les variations complètes ; la complétion du carré fournit immédiatement une majoration valable pour tous les seuils.

3. (d) Seuil égal à $1/2$ et comparaison au modèle discret

En remplaçant α par $1/2$ dans 3(b),

$$g_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Cette formule est exactement la limite, lorsque $r \rightarrow +\infty$ parmi les entiers impairs, du gain moyen de la deuxième stratégie discrète calculé en I.2(c).

Plus précisément, en distinguant les notations des deux modèles,

$$g_n^{\text{discret}} - g_n^{\text{continu}} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}} \right).$$

Cette différence est nulle pour $n = 1$, positive pour $n \geq 2$, et tend vers 0 à n fixé lorsque $r \rightarrow +\infty$. La comparaison porte ici sur les espérances calculées ; elle n'est pas une preuve de convergence en loi des gains.

4. (a) Initialisation de la stratégie à seuils variables

Pour une seule observation, il n'y a aucun choix intermédiaire : $G_1 = X_1$. La variable admet donc la densité uniforme, égale à 1 sur $[0, 1]$ et nulle ailleurs.

Elle est bornée, donc son espérance existe, et II.2 donne :

$$g_1 = \frac{1}{2}.$$

4. (b) Deux observations et premier seuil optimal

Pour $n = 2$, il y a un seul seuil $\sigma_1 = a_1$. On est dans le cas de II.3 avec $\alpha = a_1 \in [0, 1[$.

La variable G_2 admet donc une densité que l'on peut écrire :

$$f_2(t) = \begin{cases} a_1 & 0 \leq t < a_1, \\ 1 + a_1 & a_1 \leq t < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le gain est borné et son espérance vaut :

$$g_2 = \frac{1 + a_1 - a_1^2}{2}.$$

D'après l'étude de II.3(c), ou en écrivant $g_2 = 5/8 - (a_1 - 1/2)^2/2$, le maximum est atteint uniquement en :

$$a_1 = \frac{1}{2} = g_1, \quad g_2 = \frac{5}{8}.$$

4. (c) Passage de n à $n + 1$ observations

Fixons $n \geq 2$ et supposons les hypothèses de la question satisfaites. Le premier seuil a_n est encore libre dans $[0, 1[$; les suivants ont déjà été choisis et valent $g_{n-1}, \dots, g_1$.

Définissons H_n comme le gain obtenu à partir des observations $X_2, \dots, X_{n+1}$, avec les seuils $a_{n-1}, \dots, a_1$. Les égalités $a_k = g_k$ pour $k < n$ montrent que ces seuils sont ceux du problème à n observations.

Les observations étant indépendantes et de même loi, H_n a la même loi que G_n et est indépendant de X_1 , par le lemme des coalitions. Il n'est pas nécessaire que H_n soit la même variable aléatoire que G_n : son égalité en loi suffit pour utiliser F_n, f_n et g_n .

La première décision donne l'identité :

$$G_{n+1} = X_1 \mathbf{1}_{[X_1 \geq a_n]} + H_n \mathbf{1}_{[X_1 < a_n]}.$$

Pour $0 \leq t < a_n$, un gain inférieur ou égal à t ne peut pas venir d'une acceptation du premier tirage. Ainsi,

$$[G_{n+1} \leq t] = [X_1 < a_n] \cap [H_n \leq t].$$

Par indépendance et uniformité,

$$F_{n+1}(t) = a_n F_n(t) \quad (0 \leq t < a_n).$$

Pour $a_n \leq t < 1$, on décompose selon la première décision :

$$[G_{n+1} \leq t] = [a_n \leq X_1 \leq t] \cup ([X_1 < a_n] \cap [H_n \leq t]).$$

Les deux événements sont disjoints. Le premier a la probabilité $t - a_n$ et le second la probabilité $a_n F_n(t)$. Donc :

$$F_{n+1}(t) = t - a_n + a_n F_n(t) \quad (a_n \leq t < 1).$$

Pour $t < 0$, la répartition vaut 0; pour $t \geq 1$, elle vaut 1. Les deux branches se raccordent au seuil, car elles prennent toutes deux la valeur $a_n F_n(a_n)$ à ce point.

Une densité convenable de G_{n+1} est :

$$f_{n+1}(t) = a_n f_n(t) + \mathbf{1}_{[a_n, 1[}(t),$$

ou, en explicitant les branches,

$$f_{n+1}(t) = \begin{cases} a_n f_n(t) & 0 \leq t < a_n, \\ 1 + a_n f_n(t) & a_n \leq t < 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

après avoir choisi une version de f_n nulle en dehors de $[0, 1]$, ce qui est possible puisque G_n y prend ses valeurs presque sûrement. Les valeurs isolées aux bornes peuvent être choisies arbitrairement.

Cette fonction est positive ou nulle et continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, puisque f_n possède cette propriété et qu'on ajoute un seul intervalle. De plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n+1}(t) dt = a_n \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt + (1 - a_n) = 1.$$

Son intégrale jusqu'à t redonne les deux branches de F_{n+1} ; elle est donc bien une densité du gain.

Pour son espérance, le gain est borné, donc le transfert s'applique. La relation entre les densités donne :

$$g_{n+1} = a_n \int_0^1 t f_n(t) dt + \int_{a_n}^1 t dt = a_n g_n + \frac{1 - a_n^2}{2}.$$

On peut aussi obtenir cette moyenne directement à partir de la première décision. En prenant l'espérance dans l'identité définissant G_{n+1} , l'indépendance de H_n et X_1 donne :

$$E(H_n \mathbf{1}_{[X_1 < a_n]}) = E(H_n) P(X_1 < a_n) = a_n g_n,$$

et le premier terme vaut $\int_{a_n}^1 t dt$. On retrouve donc la même relation sans avoir besoin

de recalculer la densité pour cette étape.

Il reste à optimiser en a_n . L'espérance g_n dépend uniquement des seuils déjà fixés ; elle reste constante pendant cette optimisation. Pour tout $a \in [0, 1[$,

$$ag_n + \frac{1 - a^2}{2} = \frac{1 + g_n^2}{2} - \frac{(a - g_n)^2}{2}.$$

Comme $g_n \in [0, 1[$ par hypothèse, le seuil $a = g_n$ est admissible. Le carré est nul uniquement pour cette valeur. Le seuil optimal est donc :

$$a_n = g_n, \quad g_{n+1} = \frac{1 + g_n^2}{2}.$$

Enfin, $0 \leq g_n < 1$ entraîne $1/2 \leq (1 + g_n^2)/2 < 1$. L'espérance nouvelle appartient donc à $[0, 1[$, ce qui permet de poursuivre la construction par récurrence.

La logique du seuil optimal est précise : on compare l'observation présente au gain moyen g_n que l'on peut obtenir en poursuivant la stratégie sur les n observations restantes.

4. (d) Limite du gain moyen de la troisième stratégie

Les initialisations II.4(a) et II.4(b), puis II.4(c), construisent successivement des gains admettant des densités et des espérances, avec :

$$g_1 = \frac{1}{2}, \quad g_{n+1} = \frac{1 + g_n^2}{2}.$$

Cette suite a exactement la même initialisation et la même récurrence que la suite (u_n) du préliminaire. Une récurrence immédiate donne $g_n = u_n$ pour tout $n \geq 1$.

D'après le préliminaire 2(c),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = 1.$$

Le préliminaire 3(c) apporte aussi la précision :

$$1 - g_n \sim \frac{2}{n}.$$

La densité et l'espérance de chaque gain sont établies par la construction, et la limite de l'espérance vient de l'étude de la suite numérique ; aucun échange entre une limite de variables et une espérance n'est utilisé.

5. Comparaison des trois stratégies continues

Rectification de l'énoncé : cette question compare les stratégies de la partie II, et non celles de la partie I, déjà comparées en I.4.

La première stratégie donne toujours une moyenne égale à $1/2$.

La deuxième, pour un seuil fixé $\alpha \in [0, 1[$, donne :

$$q_n(\alpha) = \frac{1 + \alpha - \alpha^n}{2} \rightarrow \frac{1 + \alpha}{2} < 1.$$

Elle améliore strictement la première pour $n \geq 2$ et $\alpha > 0$. Pour $\alpha = 0$, elle coïncide avec la première. Même un seuil très proche de 1 conserve une limite strictement inférieure à 1 s'il est fixé.

La troisième emploie des seuils qui dépendent du nombre d'observations restantes. Son gain moyen vaut u_n , tend vers 1 et vérifie $1 - u_n \sim 2/n$.

On peut aussi comparer rigoureusement les deuxième et troisième pour chaque horizon fini. La moyenne $q_n(\alpha)$ satisfait la récurrence de II.3(b) :

$$q_{n+1}(\alpha) = \frac{1 - \alpha^2}{2} + \alpha q_n(\alpha).$$

Pour $n = 1$, $q_1(\alpha) = u_1 = 1/2$. Supposons $q_n(\alpha) \leq u_n$. Comme $\alpha \geq 0$,

$$q_{n+1}(\alpha) \leq \frac{1 - \alpha^2}{2} + \alpha u_n = \frac{1 + u_n^2}{2} - \frac{(\alpha - u_n)^2}{2} \leq u_{n+1}.$$

Par récurrence, $q_n(\alpha) \leq u_n$ pour tout n et tout seuil constant admissible. La troisième stratégie a donc une espérance au moins aussi grande que toute stratégie à seuil constant.

Pour $n = 2$, l'égalité est obtenue exactement pour $\alpha = 1/2$, et les deuxième et troisième stratégies optimisées coïncident. Pour $n = 3$, l'égalité imposerait à la fois $q_2(\alpha) = u_2$, donc $\alpha = 1/2$, et $\alpha = u_2 = 5/8$; ces conditions sont incompatibles. Ainsi, $q_3(\alpha) < u_3$ pour tout seuil constant.

La même inégalité reste stricte pour tous les $n \geq 3$. En effet, si $q_n(\alpha) < u_n$ et $\alpha > 0$, la première inégalité de la récurrence ci-dessus est stricte ; si $\alpha = 0$, $q_{n+1}(0) = 1/2 < u_{n+1}$.

Dans le modèle uniforme à dix observations de l'exemple introductif, la troisième stratégie utilise successivement les seuils $u_9, u_8, \dots, u_1$, puis accepte obligatoirement la dernière observation. Le premier seuil vaut environ 0,8498, le dernier vaut $1/2$, et le gain moyen est $u_{10} \simeq 0,8611$, calculé avec la même récurrence. Ces valeurs concernent exclusivement le modèle uniforme étudié.

Relevé des adaptations

- Préliminaire 1(a) : code adapté en Python pour calculer et afficher les cent premiers termes ; le rôle de `print` est précisé dans le sujet.
- Préliminaire 1(b) : la demande de calcul à la calculatrice est remplacée par l'exploitation du programme Python, en conservant la précision 10^{-2} .
- Partie I, intitulé : le titre « Partie II » placé devant les expériences discrètes dans le PDF est rectifié en « Partie I », en cohérence avec le préambule et les renvois suivants.
- II.3(a) : la densité donnée est écrite pour $n \geq 2$ et le cas $n = 1$ est rappelé séparément, afin d'éviter une puissance ambiguë pour $\alpha = 0$.
- II.5 : le renvoi à la partie I est rectifié en un renvoi à la partie II, conformément à la place et à l'objet de cette question.