



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1996

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

1. Étude des racines de P_n et de ses dérivées

1.a) Factorisation des dérivées et valeurs aux extrémités

Méthode 1 — Récurrence sur l'ordre de dérivation

Au rang $j = 0$, on prend $Q_0 = 1$. Alors $P_n = (x^2 - 1)^n Q_0$ et $Q_0(-1) = Q_0(1) = 1 \neq 0$.

Supposons que, pour un entier $j < n$, on dispose d'un polynôme Q_j tel que $P_n^{(j)} = (x^2 - 1)^{n-j} Q_j$ et $Q_j(\pm 1) \neq 0$. En dérivant le produit :

$$P_n^{(j+1)}(x) = 2(n-j)x(x^2 - 1)^{n-j-1}Q_j(x) + (x^2 - 1)^{n-j}Q_j'(x).$$

On peut donc prendre :

$$Q_{j+1}(x) = 2(n-j)xQ_j(x) + (x^2 - 1)Q_j'(x).$$

Ce polynôme vérifie $P_n^{(j+1)} = (x^2 - 1)^{n-j-1}Q_{j+1}$. De plus :

$$Q_{j+1}(1) = 2(n-j)Q_j(1), \quad Q_{j+1}(-1) = -2(n-j)Q_j(-1).$$

Les facteurs $2(n-j)$ sont non nuls puisque $j < n$. Les valeurs aux extrémités restent donc non nulles. La récurrence établit le résultat pour $0 \leq j \leq n$.

En itérant ces relations numériques, on obtient également :

$$Q_j(1) = 2^j \frac{n!}{(n-j)!}, \quad Q_j(-1) = (-2)^j \frac{n!}{(n-j)!}.$$

Pour $j < n$, l'exposant $n - j$ est strictement positif. Ainsi :

$$P_n^{(j)}(-1) = P_n^{(j)}(1) = 0 \quad (0 \leq j < n).$$

Méthode 2 — Formule de Leibniz

Écrivons $P_n(x) = (x - 1)^n(x + 1)^n$. Pour $0 \leq j \leq n$, la formule de Leibniz donne :

$$P_n^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{n!}{(n-j+k)!} (x-1)^{n-k} (x+1)^{n-j+k}.$$

Dans chaque terme, on peut mettre en facteur $(x-1)^{n-j}(x+1)^{n-j} = (x^2-1)^{n-j}$. Le polynôme restant est :

$$Q_j(x) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{n!}{(n-j+k)!} (x-1)^{j-k} (x+1)^k.$$

En $x = 1$, seul le terme $k = j$ est non nul, et sa valeur est $2^j n! / (n-j)!$. En $x = -1$, seul le terme $k = 0$ est non nul, et sa valeur est $(-2)^j n! / (n-j)!$. Ces deux valeurs sont non nulles. La factorisation fournit à nouveau $P_n^{(j)}(\pm 1) = 0$ pour $j < n$.

La récurrence donne directement la relation entre deux Q_j successifs demandée dans l'énoncé; la formule de Leibniz fournit une expression explicite de chaque Q_j .

1.b) Nombre de racines par le théorème de Rolle

Théorème de Rolle : si une fonction h est continue sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$, dérivable sur $]a, b[$ et satisfait $h(a) = h(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

Les polynômes et toutes leurs dérivées sont continus et dérivables sur $\mathbb{R}$. Comme $P_n(-1) = P_n(1) = 0$, Rolle appliqué à P_n sur $[-1, 1]$ donne une racine $s_1 \in]-1, 1[$ de P'_n .

Puisque $n \geq 2$, 1.a donne aussi $P'_n(-1) = P'_n(1) = 0$. En appliquant Rolle à P'_n sur $[-1, s_1]$ et $[s_1, 1]$, on obtient deux racines de P''_n , l'une dans $] - 1, s_1[$, l'autre dans $]s_1, 1[$. Elles sont distinctes.

Pour généraliser, supposons que $1 \leq j < n$ et que $P_n^{(j)}$ possède des racines distinctes $s_1 < \dots < s_j$ dans $] - 1, 1[$. Ses valeurs en -1 et 1 sont nulles par 1.a. Les $j + 2$ points ordonnés $-1, s_1, \dots, s_j, 1$ sont donc des zéros de $P_n^{(j)}$.

Sur chacun des $j + 1$ segments reliant deux points consécutifs, les hypothèses de Rolle sont satisfaites. Il existe un zéro de $P_n^{(j+1)}$ à l'intérieur de chacun de ces segments. Les intérieurs étant disjoints, ces zéros sont distincts et appartiennent tous à $] - 1, 1[$.

La récurrence, initialisée pour $j = 1$, montre que $P_n^{(j)}$ possède au moins j racines distinctes dans $] - 1, 1[$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

1.c) Racines de la dérivée d'ordre n

Le polynôme P_n a pour degré $2n$ et pour coefficient dominant 1. Sa dérivée d'ordre n a donc pour degré n et pour coefficient dominant :

$$\frac{(2n)!}{n!} \neq 0.$$

Par 1.b, $P_n^{(n)}$ possède au moins n racines distinctes dans $] - 1, 1[$. Un polynôme non nul de degré n ne peut pas avoir plus de n racines distinctes. Il en possède donc exactement n , toutes dans cet intervalle.

Chacune est simple : s'il y avait une multiplicité supérieure à 1, le total des multiplicités des n racines distinctes dépasserait le degré n . On peut donc les noter $-1 < r_1 < \dots < r_n < 1$, comme dans l'énoncé.

2. Calcul d'une intégrale auxiliaire

2.a) Relation de récurrence

Les deux facteurs de l'intégrande sont des polynômes, donc les intégrales existent sur le segment. Pour $q \geq 1$, intégrons par parties en prenant $(t + 1)^q$ comme facteur à dériver et $(t - 1)^{p+1}/(p + 1)$ comme primitive de $(t - 1)^p$:

$$W(p, q) = \left[\frac{(t-1)^{p+1}(t+1)^q}{p+1} \right]_{-1}^1 - \frac{q}{p+1} \int_{-1}^1 (t-1)^{p+1}(t+1)^{q-1} dt.$$

Le terme de bord est nul : en 1, le facteur $(t-1)^{p+1}$ est nul ; en -1 , le facteur $(t+1)^q$ est nul puisque $q \geq 1$. Ainsi :

$$W(p, q) = -\frac{q}{p+1} W(p+1, q-1).$$

De façon équivalente, $W(p+1, q-1) = -(p+1)W(p, q)/q$; la division par q est licite dans ce cas.

2.b) Valeur de $W(n, n)$

Appliquons successivement la relation de 2.a, en diminuant le second indice de n à 0 :

$$W(n, n) = (-1)^n \frac{n(n-1) \dots 1}{(n+1)(n+2) \dots (2n)} W(2n, 0) = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} W(2n, 0).$$

Le dernier terme se calcule par une primitive :

$$W(2n, 0) = \left[\frac{(t-1)^{2n+1}}{2n+1} \right]_{-1}^1 = \frac{2^{2n+1}}{2n+1}.$$

En multipliant ces expressions :

$$W(n, n) = (-1)^n \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Le signe $(-1)^n$ est cohérent avec celui de $(t^2-1)^n$ sur $] -1, 1[$.

3. Calcul d'intégrales associées au polynôme P_n et à ses dérivées

3.a) Intégrations par parties successives

Pour $0 \leq k \leq n$, posons $J_k = \int_{-1}^1 Q^{(k)}(t) P_n^{(n-k)}(t) dt$. Toutes ces intégrales existent, puisque leurs intégrandes sont polynomiaux.

Pour $0 \leq k < n$, une intégration par parties donne :

$$J_k = \left[Q^{(k)}(t) P_n^{(n-k-1)}(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 Q^{(k+1)}(t) P_n^{(n-k-1)}(t) dt.$$

L'ordre $n - k - 1$ appartient à $\{0, \dots, n - 1\}$. Les deux valeurs de cette dérivée de P_n aux extrémités sont donc nulles par I.1.a. Ainsi $J_k = -J_{k+1}$.

En itérant cette relation exactement n fois, on obtient $J_0 = (-1)^n J_n$, c'est-à-dire :

$$\int_{-1}^1 Q(t) P_n^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_{-1}^1 Q^{(n)}(t) P_n(t) dt.$$

3.b) Orthogonalité aux polynômes de degré inférieur à n

Si $\deg(Q) < n$, la dérivée $Q^{(n)}$ est identiquement nulle. Le résultat de 3.a donne donc :

$$\int_{-1}^1 Q(t) P_n^{(n)}(t) dt = 0.$$

La conclusion est également vraie pour le polynôme nul.

3.c) Norme intégrale de $P_n^{(n)}$

Puisque $P_n(x) = (x^2 - 1)^n$ est unitaire de degré $2n$, sa dérivée d'ordre $2n$ est la constante $P_n^{(2n)}(x) = (2n)!$.

Appliquons 3.a au polynôme $Q = P_n^{(n)}$. Sa dérivée d'ordre n est $Q^{(n)} = P_n^{(2n)} = (2n)!$.

Ainsi :

$$\int_{-1}^1 (P_n^{(n)}(t))^2 dt = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 P_n(t) dt = (-1)^n (2n)! W(n, n).$$

En remplaçant $W(n, n)$ par la valeur de I.2.b, les deux facteurs $(-1)^n$ se compensent :

$$\int_{-1}^1 (P_n^{(n)}(t))^2 dt = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{2n+1}.$$

Cette valeur est strictement positive, comme attendu pour l'intégrale du carré d'un polynôme non nul.

Partie II

1. Polynôme d'interpolation de Lagrange de f

1.a) Valeurs aux nœuds et base

Les racines $r_1, \dots, r_n$ sont distinctes par I.1.c. Tous les dénominateurs $r_j - r_i$, avec $i \neq j$, sont donc non nuls, et L_j est bien un polynôme de degré $n-1$.

Si $i = j$, chaque facteur de $L_j(r_j)$ vaut 1, donc $L_j(r_j) = 1$. Si $i \neq j$, le produit contient le facteur $r_i - r_i = 0$, donc $L_j(r_i) = 0$. Ainsi :

$$L_j(r_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Supposons que

$$\sum_{j=1}^n a_j L_j = 0$$

comme polynôme. En évaluant en r_i , on obtient $a_i = 0$ pour chaque i . La famille $(L_1, \dots, L_n)$ est donc libre.

L'espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ a pour dimension n , et cette famille libre contient n éléments de cet espace. C'est donc une base.

1.b) Expression et unicité du polynôme interpolateur

Dans la base précédente, écrivons

$$A_n = \sum_{j=1}^n a_j L_j.$$

L'évaluation en r_i donne $A_n(r_i) = a_i$. Les conditions d'interpolation imposent donc $a_i = f(r_i)$ pour tous les indices.

Le polynôme :

$$A_n(x) = \sum_{j=1}^n f(r_j) L_j(x)$$

est de degré strictement inférieur à n et vérifie toutes les conditions, ce qui établit l'existence. Les coefficients dans une base sont uniques; les conditions imposant chacun d'eux, le polynôme est unique.

On peut aussi contrôler cette unicité par les racines : la différence de deux interpolateurs aurait un degré inférieur à n et s'annulerait en n points distincts; elle serait donc le polynôme nul.

1.c) Intégrale de l'interpolateur

La fonction A_n est polynomiale, donc continue sur $[-1, 1]$. Par linéarité de l'intégrale appliquée à une somme finie :

$$\int_{-1}^1 A_n(t) dt = \sum_{j=1}^n f(r_j) \int_{-1}^1 L_j(t) dt = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(r_j).$$

C'est le nombre $I_n(f)$ défini dans le sujet.

2. Comparaison de $I(P)$ et de $I_n(P)$ lorsque P est un polynôme

2.a) Exactitude pour un degré inférieur à n

Si $\deg(P) < n$, le polynôme P lui-même appartient à l'espace d'interpolation et possède les valeurs $P(r_j)$ aux nœuds. Par l'unicité de II.1.b, son interpolateur est donc P .

La formule de II.1.c donne alors $I_n(P) = I(P)$. Cela vaut aussi pour $P = 0$, dont les deux intégrales sont nulles.

2.b) Exactitude pour un degré inférieur à $2n$

Le polynôme $S = P_n^{(n)}$ est non nul et de degré n d'après I.1.c. La division euclidienne de P par S donne des polynômes Q, R tels que :

$$P = QS + R, \quad \deg(R) < n.$$

Si $Q = 0$, $\deg(Q) = -\infty < n$ par la convention de l'énoncé. Si $Q \neq 0$, le produit QS a pour degré $\deg(Q) + n \geq n$, tandis que $\deg(R) < n$. Son terme dominant ne peut pas être annulé par R . Ainsi :

$$\deg(P) = \deg(Q) + n < 2n, \quad \deg(Q) < n.$$

Par I.3.b, $\int_{-1}^1 Q(t)S(t) dt = 0$. La linéarité donne donc $I(P) = I(R)$.

Pour chaque j , $S(r_j) = 0$, donc $P(r_j) = R(r_j)$. Comme I_n ne dépend que des valeurs aux nœuds :

$$I_n(P) = \sum_{j=1}^n \lambda_j P(r_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j R(r_j) = I_n(R).$$

Enfin, $\deg(R) < n$, donc 2.a donne $I_n(R) = I(R)$. En réunissant ces égalités :

$$I(P) = I(R) = I_n(R) = I_n(P).$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tous les polynômes de degré au plus $2n - 1$, y compris le polynôme nul.

3. Polynôme d'interpolation de Hermite de f

3.a) Linéarité et noyau

L'évaluation en un point est linéaire, et la dérivation est linéaire sur l'espace des polynômes. Pour tous $H, K \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$, chaque coordonnée de $\varphi(aH + bK)$ est donc celle de $a\varphi(H) + b\varphi(K)$. L'application φ est linéaire.

Si $H \in \text{Ker } \varphi$, alors $H(r_j) = H'(r_j) = 0$ pour chaque j . Si H était non nul, chacune des n racines distinctes r_j aurait une multiplicité au moins égale à 2. Le nombre total de racines comptées avec leur multiplicité serait donc au moins $2n$, alors que $\deg(H) \leq 2n - 1$. Cela contredit le résultat rappelé dans le sujet.

Ainsi $H = 0$. Réciproquement, le polynôme nul appartient au noyau. Donc $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.

3.b) Existence et unicité de B_n

Méthode 1 — Isomorphisme en dimension finie

La question 3.a montre que φ est injective. Son espace de départ et son espace d'arrivée sont de même dimension $2n$. Par le théorème du rang, φ est donc surjective et constitue un isomorphisme.

Les valeurs $f(r_j)$ et $f'(r_j)$ sont définies, puisque f est de classe C^{2n} et les nœuds appartiennent à l'intérieur du segment. Le vecteur :

$$(f(r_1), f'(r_1), \dots, f(r_n), f'(r_n))$$

possède donc un unique antécédent $B_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Cet antécédent satisfait exactement les conditions de valeurs et de dérivées de l'énoncé.

Méthode 2 — Construction explicite avec les polynômes de Lagrange

Pour chaque j , posons $\ell_j = L'_j(r_j)$ et définissons :

$$H_j(x) = (1 - 2\ell_j(x - r_j))L_j(x)^2, \quad K_j(x) = (x - r_j)L_j(x)^2.$$

Ces polynômes sont de degré au plus $2n - 1$. Si $i \neq j$, $L_j(r_i) = 0$, donc L_j^2 et sa dérivée s'annulent en r_i . Les deux polynômes H_j, K_j , ainsi que leurs dérivées, sont donc nuls en r_i .

En r_j , $L_j(r_j) = 1$. On obtient $H_j(r_j) = 1$, $K_j(r_j) = 0$, et, par dérivation :

$$H'_j(r_j) = -2\ell_j + 2L'_j(r_j) = 0, \quad K'_j(r_j) = 1.$$

Le polynôme :

$$B_n(x) = \sum_{j=1}^n (f(r_j)H_j(x) + f'(r_j)K_j(x))$$

appartient donc à $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, vérifie $B_n(r_i) = f(r_i)$ et $B'_n(r_i) = f'(r_i)$ pour chaque i , et établit directement l'existence. Pour l'unicité, la différence de deux polynômes satisfaisant ces conditions appartient au noyau de φ , qui est nul par 3.a.

La première méthode répond à l'enchaînement de l'énoncé avec un argument de dimension ; la seconde fournit une formule pour calculer effectivement l'interpolateur.

3.c) Intégrale de B_n

Puisque $\deg(B_n) < 2n$, la question II.2.b donne $I(B_n) = I_n(B_n)$. Par les conditions d'interpolation, $B_n(r_j) = f(r_j)$ pour chaque j . Donc :

$$I_n(B_n) = \sum_{j=1}^n \lambda_j B_n(r_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(r_j) = I_n(f).$$

Ainsi $I(B_n) = I_n(B_n) = I_n(f)$. Cette identité permettra de remplacer l'erreur de quadrature par l'intégrale de $f - B_n$.

4. Majoration de $|I(f) - I_n(f)|$

La fonction f est de classe C^{2n} sur $[-1, 1]$. Ainsi $f^{(2n)}$ est continue sur ce segment, et sa valeur absolue l'est également. Le théorème des extrema pour une fonction continue sur un segment assure l'existence d'un maximum fini :

$$M_{2n}(f) = \max_{t \in [-1, 1]} |f^{(2n)}(t)| \geq 0.$$

4.a) Reste de l'interpolation de Hermite

Pour alléger les calculs, posons $S = P_n^{(n)}$. Le réel x n'est aucun des nœuds r_j , qui sont toutes les racines de S . Donc $S(x) \neq 0$, et la condition $g_x(x) = 0$ définit un unique réel :

$$\alpha = \frac{f(x) - B_n(x)}{S(x)^2}.$$

La fonction $g_x = f - B_n - \alpha S^2$ est de classe C^{2n} sur le segment, car les deux termes soustraits à f sont des polynômes. Aux nœuds, les conditions de Hermite et $S(r_j) = 0$ donnent :

$$g_x(r_j) = f(r_j) - B_n(r_j) - \alpha S(r_j)^2 = 0.$$

En dérivant :

$$g'_x(t) = f'(t) - B'_n(t) - 2\alpha S(t)S'(t).$$

Donc, pour chaque j :

$$g'_x(r_j) = f'(r_j) - B'_n(r_j) - 2\alpha S(r_j)S'(r_j) = 0.$$

Les $n + 1$ points $r_1, \dots, r_n, x$ sont distincts et sont des zéros de g_x . Ordonnons-les $z_0 < \dots < z_n$. Sur chaque segment $[z_{k-1}, z_k]$, la fonction g_x est continue et dérivable à l'intérieur, avec des valeurs nulles aux deux extrémités. Le théorème de Rolle fournit donc un zéro de g'_x dans chacun des n intervalles ouverts $]z_{k-1}, z_k[$.

Ces intervalles sont disjoints, et aucun des nœuds r_j n'appartient à leur intérieur, puisque les z_k sont précisément les points r_j et x . On a donc obtenu n zéros distincts de g'_x dans $] -1, 1[$, tous distincts des r_j .

En leur ajoutant les n zéros $g'_x(r_j) = 0$ déjà établis, g'_x possède au moins $2n$ zéros distincts dans $] -1, 1[$. Rolle appliqué entre deux zéros consécutifs montre que g''_x en possède au moins $2n - 1$. En répétant ce raisonnement, on obtient pour chaque $k \in \{1, \dots, 2n\}$ au moins $2n + 1 - k$ zéros distincts de $g_x^{(k)}$ dans $] -1, 1[$.

Les hypothèses de continuité et de dérivabilité sont satisfaites à chaque étape, puisque g_x est de classe C^{2n} . En particulier, il existe $c \in] -1, 1[$, donc dans $[-1, 1]$, tel que $g_x^{(2n)}(c) = 0$.

Calculons cette dérivée. Le polynôme S a pour degré n et pour coefficient dominant $(2n)!/n!$, d'après I.1.c. Son carré a pour degré $2n$ et pour coefficient dominant $((2n)!/n!)^2$. Ainsi :

$$(S^2)^{(2n)} = (2n)! \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^2 = \frac{((2n)!)^3}{(n!)^2}.$$

Comme $\deg(B_n) < 2n$, $B_n^{(2n)} = 0$. Donc :

$$g_x^{(2n)}(t) = f^{(2n)}(t) - \alpha \frac{((2n)!)^3}{(n!)^2}.$$

L'annulation en c donne :

$$\alpha = \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} f^{(2n)}(c).$$

Enfin, $g_x(x) = 0$ signifie $f(x) - B_n(x) = \alpha S(x)^2$. En substituant la valeur précédente :

$$f(x) - B_n(x) = \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} f^{(2n)}(c) (P_n^{(n)}(x))^2.$$

Le point c dépend éventuellement de x ; aucune régularité de cette dépendance n'est nécessaire dans la suite.

4.b) Majoration ponctuelle puis intégrale

Si x est distinct de tous les nœuds, la formule de 4.a et $|f^{(2n)}(c)| \leq M_{2n}(f)$ donnent :

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} M_{2n}(f) (P_n^{(n)}(x))^2.$$

Si $x = r_j$ pour un certain j , le membre de gauche est nul par interpolation, et celui de droite est nul puisque $P_n^{(n)}(r_j) = 0$. La même inégalité reste donc vraie à chaque nœud.

Elle vaut ainsi pour tout $x \in [-1, 1]$, y compris les extrémités. Les fonctions $f - B_n$ et $(P_n^{(n)})^2$ sont continues sur le segment; leurs intégrales existent. Par II.3.c, puis par l'inégalité triangulaire pour l'intégrale et la croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned} |I(f) - I_n(f)| &= \left| \int_{-1}^1 (f(t) - B_n(t)) dt \right| \leq \int_{-1}^1 |f(t) - B_n(t)| dt \\ &\leq \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} M_{2n}(f) \int_{-1}^1 (P_n^{(n)}(t))^2 dt. \end{aligned}$$

La valeur calculée en I.3.c fournit :

$$|I(f) - I_n(f)| \leq M_{2n}(f) \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3}.$$

Or $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ et $(2n+1)! = (2n+1)(2n)!$. On peut donc réécrire le coefficient sous la forme demandée :

$$|I(f) - I_n(f)| \leq \frac{M_{2n}(f)}{\binom{2n}{n}^2} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On a intégré une inégalité valable en chaque point, sans intégrer une expression contenant le point variable c de la question précédente.

4.c) Passage à un segment quelconque

Considérons d'abord le cas $a < b$. Posons $m = (a+b)/2$ et $h = (b-a)/2 > 0$. La transformation affine $t \mapsto m + ht$ envoie $[-1, 1]$ sur $[a, b]$, et $f(t) = g(m + ht)$ est de classe C^{2n} .

Par dérivations successives d'une composée affine :

$$f^{(2n)}(t) = h^{2n} g^{(2n)}(m + ht).$$

Comme l'application affine parcourt tout le segment, le maximum des valeurs absolues vérifie $M_{2n}(f) = h^{2n} M_{2n}(g)$.

Le changement de variable affine $u = m + ht$ donne :

$$\int_a^b g(u) du = h \int_{-1}^1 f(t) dt = hI(f).$$

La somme approchée du sujet vaut $hI_n(f)$. L'erreur demandée est donc $h|I(f) - I_n(f)|$.
Par 4.b :

$$h|I(f) - I_n(f)| \leq h^{2n+1} M_{2n}(g) \frac{2^{2n+1}}{\binom{2n}{n}^2 (2n+1)!}.$$

Puisque $2h = b - a$, on obtient :

$$\left| \int_a^b g(u) du - \frac{b-a}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j g\left(\frac{a+b}{2} + r_j \frac{b-a}{2}\right) \right| \leq \frac{M_{2n}(g)(b-a)^{2n+1}}{\binom{2n}{n}^2 (2n+1)!}.$$

Si $a = b$, l'intégrale et la somme pondérée sont nulles, de même que le majorant ; l'inégalité est alors immédiate, sans effectuer de changement de variable inversible.

5. Étude d'un cas particulier

5.a) Nœuds et poids pour $n = 2$

On a $P_2(x) = (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$. Ses deux premières dérivées sont :

$$P_2'(x) = 4x^3 - 4x, \quad P_2''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1).$$

Les racines, ordonnées de façon croissante, sont donc $r_1 = -1/\sqrt{3}$ et $r_2 = 1/\sqrt{3}$. Les deux polynômes de Lagrange valent :

$$L_1(x) = \frac{x - r_2}{r_1 - r_2} = \frac{1 - \sqrt{3}x}{2}, \quad L_2(x) = \frac{x - r_1}{r_2 - r_1} = \frac{1 + \sqrt{3}x}{2}.$$

L'intégrale de x sur $[-1, 1]$ est nulle, et celle de la constante $1/2$ vaut 1. Ainsi :

$$\lambda_1 = I(L_1) = 1, \quad \lambda_2 = I(L_2) = 1.$$

La formule de quadrature sur $[-1, 1]$ est donc $I_2(f) = f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3})$.

5.b) Erreur de la formule à deux points

Dans II.4.c, prenons $n = 2$, les deux nœuds et les deux poids calculés en 5.a. Le dénominateur du majorant est :

$$\binom{4}{2}^2 (2 \cdot 2 + 1)! = 6^2 \cdot 5! = 36 \cdot 120 = 4320.$$

Les deux points d'évaluation sur $[a, b]$ sont $(a + b)/2 \pm (b - a)/(2\sqrt{3})$. On obtient donc :

$$\left| \int_a^b g(u) du - \frac{b-a}{2} \left(g\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) \right) \right| \leq \frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320}.$$

Si g est un polynôme de degré au plus 3, sa dérivée quatrième est nulle, donc le majorant est nul : la formule est exacte, conformément à II.2.b.

5.c) Erreur de la formule composée

Supposons $a < b$ et posons $L = b - a$. Les extrémités des sous-segments sont $a_k = a + kL/p$ pour $0 \leq k \leq p$, et leurs milieux sont :

$$c_k = a + \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{L}{p} \quad (1 \leq k \leq p).$$

Chaque sous-segment est de longueur L/p . La restriction de g à ce sous-segment est de classe C^4 , et le maximum local de $|g^{(4)}|$ y est au plus $M_4(g)$. La question 5.b donne donc, pour chaque k :

$$\left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} g(u) du - \frac{L}{2p} \left(g\left(c_k - \frac{L}{2p\sqrt{3}}\right) + g\left(c_k + \frac{L}{2p\sqrt{3}}\right) \right) \right| \leq \frac{M_4(g)}{4320} \left(\frac{L}{p}\right)^5.$$

Par la relation de Chasles, l'intégrale totale est la somme des intégrales sur les sous-segments. L'erreur totale est donc la somme des p erreurs locales avec leur signe. L'inégalité triangulaire et les bornes précédentes donnent :

$$\left| \int_a^b g(u) du - \frac{b-a}{2p} \sum_{k=1}^p \left(g\left(c_k - \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right) + g\left(c_k + \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right) \right) \right| \leq \frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320p^4}.$$

Cette borne retrouve celle de 5.b lorsque $p = 1$ et tend vers zéro lorsque $p \rightarrow +\infty$. Pour $a = b$, l'intégrale, la somme pondérée et le majorant sont tous nuls.

5.d) Algorithme de calcul

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

La première fonction calcule la somme intérieure de II.5.c ; la seconde multiplie cette somme par $(b-a)/(2p)$ pour renvoyer l'approximation de l'intégrale. On suppose $p \geq 1$, comme dans le sujet, et que g est une fonction Python définie sur $[a, b]$.

Python

```
import numpy as np

def somme_gauss2(g, a, b, p):
    h = (b - a) / p
    decalage = h / (2 * np.sqrt(3))
    somme = 0.0
    for k in range(p):
        centre = a + (k + 0.5) * h
        somme = somme + g(centre - decalage) + g(centre + decalage)
    return somme

def gauss2(g, a, b, p):
    return (b - a) / (2 * p) * somme_gauss2(g, a, b, p)
```

La variable h est la longueur d'un sous-segment. La variable $decalage$ donne la distance entre son milieu et chacun des deux points d'évaluation. La boucle `range(p)` utilise les indices de 0 à $p - 1$; son milieu $centre$ correspond à $c_{k+1} = a + (k + 1/2)h$, ce qui parcourt exactement les p sous-segments.

Les deux points d'évaluation restent dans le sous-segment, puisque $h/(2\sqrt{3}) < h/2$ lorsque $h > 0$. Les divisions sont licites car $p \geq 1$. Si $a = b$, le résultat pondéré renvoyé par `gauss2` est nul.

Le code a été exécuté. Les essais retrouvent l'exactitude pour les polynômes de degré au plus 3. Pour $g(u) = u^4$ sur $[-1, 1]$ avec $p = 4$, l'approximation vaut environ 0,3993055556, tandis que l'intégrale exacte vaut $2/5 = 0,4$. L'erreur vaut $1/1440$ et atteint la borne $M_4(g)(b - a)^5/(4320p^4)$, puisque $M_4(g) = 24$.

Ces essais vérifient la cohérence de l'algorithme ; les démonstrations d'exactitude et de majoration sont celles des questions précédentes.

Relevé des adaptations

- II.5.d : code adapté en Python. La somme intérieure et l'approximation pondérée de l'intégrale sont distinguées explicitement ; les indices et les p milieux sont conservés.