



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1995

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Ce problème a pour objet l'étude d'endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$, où l'entier m est supérieur ou égal à 2, vérifiant certaines relations.

Dans toute la suite, si f désigne un tel endomorphisme et k un entier strictement positif, on note f^k la composée de k applications égales à f . On pose $f^0 = I$, où I désigne l'application identité de $\mathbb{R}^m$, et on note I_m la matrice identité d'ordre m .

On rappelle que $\mathbb{R}^m$ est somme directe de deux sous-espaces vectoriels F et G si tout vecteur $x \in \mathbb{R}^m$ peut se décomposer de manière unique sous la forme $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in G$. L'application qui à x associe cet unique vecteur y est le projecteur de $\mathbb{R}^m$ sur F dans la direction G .

Partie I

On considère dans cette partie un endomorphisme f de $\mathbb{R}^m$ vérifiant la relation

$$f^2 = \frac{1}{2}(f + I). \quad (1)$$

1. Recherche de solutions particulières de (1)

Déterminer les réels a tels que $f = aI$ vérifie (1).

2. Étude des puissances de f et de son inversibilité

On suppose dans cette question que les endomorphismes f et I sont linéairement indépendants.

2. a) Exprimer f^3 et f^4 comme combinaisons linéaires de I et de f .

Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n , il existe un couple (a_n, b_n) de nombres réels et un seul tel que $f^n = a_n f + b_n I$.

Déterminer a_0, b_0, a_1, b_1 et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour $n \in \mathbb{N}$.

2. b) Former une relation entre a_{n+2}, a_{n+1}, a_n d'une part, et entre b_{n+2}, b_{n+1}, b_n d'autre part.

En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{3}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{3}$.

2. c) On convient d'appeler limite de $f^n = a_n f + b_n I$ l'endomorphisme $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}I$.

Calculer p^2 et en déduire que p est un projecteur.

2. d) Prouver que f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} comme combinaison linéaire de f et de I .

3. Étude des éléments propres de f et des solutions de (1)

3. a) Soit λ une valeur propre de f . En appliquant la relation (1) à un vecteur propre non nul x de f associé à λ , établir que λ vérifie l'équation $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. En déduire les valeurs propres éventuelles de f .

3. b) On suppose donné un vecteur $x \in \mathbb{R}^m$ écrit sous la forme $x = y + z$, avec $y \in \text{Ker}(f - I)$ et $z \in \text{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$.

Exprimer $f(x)$ à l'aide de y et z , puis y et z en fonction de x et de $f(x)$.

En déduire que $\mathbb{R}^m$ est somme directe de $\text{Ker}(f - I)$ et de $\text{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$, que p est le projecteur sur $\text{Ker}(f - I)$ dans la direction $\text{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$, et que f est diagonalisable.

3. c) On pose $r = \dim \text{Ker}(f - I)$, avec $0 \leq r \leq m$.

Déterminer f lorsque $r = 0$ ou $r = m$.

On suppose désormais $0 < r < m$. Écrire la matrice M de f dans une base de $\mathbb{R}^m$ obtenue par réunion d'une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\text{Ker}(f - I)$ et d'une base $(e_{r+1}, \dots, e_m)$ de $\text{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$.

3. d) Réciproquement, vérifier que la matrice M obtenue précédemment satisfait bien la relation $M^2 = \frac{1}{2}(M + I_m)$.

3. e) Calculer $(f + \frac{1}{2}I) \circ (f - I)$.

En déduire que $\text{Im}(f - I)$ est inclus dans $\text{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$ et, en comparant les dimensions de ces deux sous-espaces, prouver leur égalité.

Ainsi, p est aussi le projecteur sur $\text{Ker}(f - I)$ dans la direction $\text{Im}(f - I)$.

Partie II

1. Étude d'une suite récurrente

On étudie dans cette question la convergence des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2} + u_{n+1} + u_n}{3}. \quad (2)$$

1. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^3 = \frac{r^2 + r + 1}{3}$. Factoriser le polynôme $3X^3 - X^2 - X - 1$ en un facteur de degré un et un facteur de degré deux à coefficients réels, puis étudier le signe de ce dernier facteur.
1. b) Déterminer les suites géométriques $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $r \in \mathbb{R}$, vérifiant (2), en convenant que le terme d'indice 0 vaut 1.

On pose $\rho = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et on choisit $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ tel que $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\sin \theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les nombres réels

$$g_n = \rho^n \cos(n\theta), \quad h_n = \rho^n \sin(n\theta).$$

À l'aide des formules d'addition du sinus et du cosinus, montrer que chacune de ces deux suites vérifie $3v_{n+2} + 2v_{n+1} + v_n = 0$, puis la relation (2).

1. c) On associe à toute suite réelle (u_n) vérifiant (2) le système réel suivant, d'inconnues A, B, C :

$$\begin{cases} A + Bg_0 + Ch_0 = u_0, \\ A + Bg_1 + Ch_1 = u_1, \\ A + Bg_2 + Ch_2 = u_2. \end{cases}$$

En formant la combinaison $3u_2 + 2u_1 + u_0$, exprimer A en fonction de u_0, u_1, u_2 et montrer que le système admet une solution (A, B, C) et une seule. On ne demande pas le calcul explicite de B et de C .

Établir par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = A + Bg_n + Ch_n$.

À l'aide de $0 < \rho < 1$, en déduire la limite de (u_n) en fonction de u_0, u_1, u_2 .

On considère désormais un endomorphisme f de $\mathbb{R}^m$ vérifiant la relation

$$f^3 = \frac{1}{3}(f^2 + f + I). \quad (3)$$

2. Étude des puissances de f et de son inversibilité

On suppose dans cette question que les endomorphismes I, f, f^2 sont linéairement indépendants.

2. a) Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n , il existe un triplet (a_n, b_n, c_n) de nombres réels et un seul tel que $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$.

Déterminer a_n, b_n, c_n pour $0 \leq n \leq 2$ et exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n pour $n \in \mathbb{N}$.

2. b) Prouver que les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) vérifient la relation (2).

En déduire les limites $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ et $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$ de ces trois suites.

2. c) On convient d'appeler limite de $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$ l'endomorphisme $q = a f^2 + b f + c I$. Établir que q est un projecteur.

2. d) Prouver que f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} comme combinaison linéaire de f^2 , f , I .

3. Étude du projecteur q

3. a) Déterminer les valeurs propres réelles éventuelles de f .

Existe-t-il un endomorphisme diagonalisable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (3) ?

3. b) On suppose donné un vecteur $x \in \mathbb{R}^m$ écrit sous la forme $x = y + z$, avec $y \in \text{Ker}(f - I)$ et $z \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

Exprimer y et z en fonction de x , $f(x)$, $f^2(x)$.

En déduire que $\mathbb{R}^m$ est somme directe de $\text{Ker}(f - I)$ et de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, et que q est le projecteur sur $\text{Ker}(f - I)$ dans la direction $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

3. c) Calculer $(3f^2 + 2f + I) \circ (f - I)$.

En déduire que $\text{Im}(f - I)$ est inclus dans $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et, en comparant les dimensions de ces deux sous-espaces, prouver leur égalité.

Ainsi, q est aussi le projecteur sur $\text{Ker}(f - I)$ dans la direction $\text{Im}(f - I)$.

4. Étude des solutions de (3)

4. a) On suppose dans cette question que $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) > 0$.

Soit e_1 un vecteur non nul appartenant à $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. Montrer que $(e_1, f(e_1))$ est une famille libre de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. En déduire que $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) \geq 2$.

4. b) On suppose dans cette question que $m = 2$; ainsi, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Déterminer les dimensions possibles de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et de $\text{Ker}(f - I)$.

En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est l'une des deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

4. c) On suppose dans cette question que $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) > 2$.

Soit $e_2 \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ tel que la famille $(e_1, f(e_1), e_2)$ soit libre. Montrer que $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est encore une famille libre de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. En déduire que $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) \geq 4$.

4. d) On suppose dans cette question que $m = 3$; ainsi, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer les dimensions possibles de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et de $\text{Ker}(f - I)$.

En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est l'une des deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

4. e) Étudier de la même manière le cas $m = 4$ en précisant les formes possibles de la matrice de f dans des bases convenables de $\mathbb{R}^4$.

4. f) On suppose désormais que $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) > 2q$, avec q un entier naturel non nul.

Soit $(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q))$ une famille libre de vecteurs de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. On peut donc trouver $e_{q+1} \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ tel que $(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q), e_{q+1})$ soit encore une famille libre.

Montrer que $(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q), e_{q+1}, f(e_{q+1}))$ est une famille libre de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et en déduire que la dimension de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ est paire.

4. g) On pose $2r = \dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, avec $0 \leq 2r \leq m$. Écrire la matrice M de f dans une base de $\mathbb{R}^m$ obtenue par réunion d'une base convenable de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et d'une base de $\text{Ker}(f - I)$.

4. h) Réciproquement, vérifier que la matrice M obtenue précédemment satisfait bien la relation $M^3 = \frac{1}{3}(M^2 + M + I_m)$.