



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1995

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

On note $E = \mathbb{R}^m$. Toutes les applications et tous les scalaires employés sont réels. Les produits d'endomorphismes désignent des compositions ; les polynômes en un même endomorphisme commutent entre eux.

1. Recherche de solutions particulières de (1)

Si $f = aI$, alors $f^2 = a^2I$. Comme I est non nul, la relation (1) équivaut à $a^2 = \frac{1}{2}(a+1)$, soit $2a^2 - a - 1 = 0$.

La factorisation $2a^2 - a - 1 = (a-1)(2a+1)$ donne exactement les deux solutions $a = 1$ et $a = -\frac{1}{2}$.

Les endomorphismes scalaires solutions sont donc I et $-\frac{1}{2}I$.

2. Étude des puissances de f et de son inversibilité

Dans cette question, la famille (f, I) est libre dans l'espace vectoriel réel des endomorphismes de E .

2. a) En utilisant deux fois la relation (1), on calcule

$$f^3 = \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}f = \frac{3}{4}f + \frac{1}{4}I,$$

$$f^4 = \frac{3}{4}f^2 + \frac{1}{4}f = \frac{5}{8}f + \frac{3}{8}I.$$

Pour l'existence des coefficients, procédons par récurrence. Pour $n = 0$, $f^0 = I = 0f + 1I$, donc $(a_0, b_0) = (0, 1)$. Si $f^n = a_n f + b_n I$, alors

$$f^{n+1} = a_n f^2 + b_n f = \left(\frac{1}{2}a_n + b_n\right) f + \frac{1}{2}a_n I.$$

La représentation existe donc à tout rang. Elle est unique : si $af + bI = a'f + b'I$, la liberté de (f, I) impose $a = a'$ et $b = b'$.

En particulier, $(a_1, b_1) = (1, 0)$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n.$$

2. b) En remplaçant b_{n+1} dans la relation pour a_{n+2} , on obtient

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n.$$

De même,

$$b_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n.$$

Les deux suites vérifient donc la même récurrence d'ordre deux.

Méthode 1 — Résolution d'une récurrence à deux racines réelles distinctes

L'équation associée est $t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0$, soit $(t - 1)(t + \frac{1}{2}) = 0$. Ses deux racines réelles distinctes sont 1 et $-\frac{1}{2}$; le résultat du programme sur les récurrences d'ordre deux est applicable.

On écrit $a_n = A + B(-\frac{1}{2})^n$. Les conditions $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ donnent $A + B = 0$ et $A - \frac{1}{2}B = 1$, d'où $A = \frac{2}{3}$ et $B = -\frac{2}{3}$.

De même, pour $b_n = C + D(-\frac{1}{2})^n$, les conditions $b_0 = 1$ et $b_1 = 0$ donnent $C + D = 1$ et $C - \frac{1}{2}D = 0$, d'où $C = \frac{1}{3}$ et $D = \frac{2}{3}$.

Ainsi,

$$a_n = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right), \quad b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^n.$$

Puisque $\left| -\frac{1}{2} \right| < 1$, la puissance $\left(-\frac{1}{2} \right)^n$ tend vers 0. On conclut que $a_n \rightarrow \frac{2}{3}$ et $b_n \rightarrow \frac{1}{3}$.

Méthode 2 — Différences successives et somme géométrique

Pour toute suite v vérifiant $v_{n+2} = \frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n)$, posons $d_n = v_{n+1} - v_n$. Alors

$$d_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{2}v_{n+1} = -\frac{1}{2}d_n,$$

et donc $d_n = \left(-\frac{1}{2} \right)^n (v_1 - v_0)$. En sommant les différences, pour $n \geq 1$,

$$v_n = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} d_k = v_0 + \frac{2}{3}(v_1 - v_0) \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right).$$

La même formule vaut pour $n = 0$, puisque le facteur entre parenthèses est alors nul. Avec $(v_0, v_1) = (0, 1)$ puis $(1, 0)$, elle donne les expressions annoncées de a_n et b_n , puis leurs limites.

La première méthode utilise directement les deux racines réelles; la seconde ramène la récurrence à une seule suite géométrique de différences.

2. c) Comme f et I commutent,

$$p^2 = \left(\frac{2}{3}f + \frac{1}{3}I \right)^2 = \frac{4}{9}f^2 + \frac{4}{9}f + \frac{1}{9}I.$$

La relation $f^2 = \frac{1}{2}(f + I)$ donne alors

$$p^2 = \frac{2}{9}(f + I) + \frac{4}{9}f + \frac{1}{9}I = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}I = p.$$

L'application p est un endomorphisme idempotent, donc un projecteur. Son image et son noyau seront identifiés en 3. b).

2. d) La relation (1) s'écrit $2f^2 - f = I$, c'est-à-dire $f \circ (2f - I) = I$. Comme $2f - I$ commute avec f , on a également $(2f - I) \circ f = I$.

L'endomorphisme $2f - I$ est donc un inverse des deux côtés, et $f^{-1} = 2f - I$. Cette preuve ne requiert pas l'indépendance de f et de I et vaut aussi pour les solutions scalaires.

3. Étude des éléments propres de f et des solutions de (1)

La condition d'indépendance de la question 2 n'est pas imposée ici. L'expression $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}I$ reste définie et vérifie $p^2 = p$ pour toute solution de (1).

3. a) Soit $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$. On a alors $f^2(x) = \lambda^2 x$. En appliquant (1) à x ,

$$\lambda^2 x = \frac{1}{2}(\lambda + 1)x.$$

Comme $x \neq 0$, $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. La factorisation de la question 1 donne $\lambda \in \{1, -\frac{1}{2}\}$.

Il s'agit des seules valeurs propres possibles. L'une d'elles peut être absente, comme pour $f = I$ ou $f = -\frac{1}{2}I$.

3. b) Posons $F = \text{Ker}(f - I)$ et $G = \text{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$. Si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$, alors

$$f(y) = y, \quad f(z) = -\frac{1}{2}z, \text{ et}$$

$$f(x) = y - \frac{1}{2}z.$$

On résout les deux égalités $x = y + z$ et $f(x) = y - \frac{1}{2}z$:

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x) = p(x), \quad z = \frac{2}{3}(x - f(x)) = (I - p)(x).$$

Ces formules donnent l'unicité d'une décomposition éventuelle. Pour démontrer son existence, il faut vérifier les appartenances pour un vecteur x quelconque, sans supposer qu'une décomposition est déjà connue.

On calcule

$$(f - I) \circ p = \frac{2}{3}f^2 - \frac{1}{3}f - \frac{1}{3}I = 0,$$

et

$$\left(f + \frac{1}{2}I\right) \circ (I - p) = \frac{2}{3} \left(f + \frac{1}{2}I\right) \circ (I - f) = \frac{2}{3} \left(-f^2 + \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}I\right) = 0.$$

Donc $p(x) \in F$ et $(I - p)(x) \in G$, et $x = p(x) + (I - p)(x)$ fournit une décomposition pour tout $x \in E$.

Enfin, si $v \in F \cap G$, alors $f(v) = v = -\frac{1}{2}v$, donc $v = 0$. On a ainsi $E = F \oplus G$. Les formules établies montrent que p est le projecteur sur F dans la direction G .

La réunion d'une base de F et d'une base de G est une base de E constituée de vecteurs propres. La matrice de f dans cette base est diagonale ; f est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

3. c) Comme $E = F \oplus G$, $\dim G = m - r$.

Si $r = 0$, alors $F = \{0\}$ et $G = E$. Tout vecteur vérifie $f(x) = -\frac{1}{2}x$, donc $f = -\frac{1}{2}I$.

Si $r = m$, alors $F = E$ et $f = I$.

Si $0 < r < m$, les vecteurs $e_1, \dots, e_r$ vérifient $f(e_j) = e_j$, tandis que les autres vérifient $f(e_j) = -\frac{1}{2}e_j$. Dans la base indiquée,

$$M = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}I_{m-r} \end{pmatrix}.$$

Chaque entier r de 0 à m peut effectivement apparaître, en définissant f par une telle matrice diagonale et en utilisant la vérification suivante.

3. d) Pour la matrice précédente,

$$M^2 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}I_{m-r} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}(M + I_m) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}I_{m-r} \end{pmatrix}.$$

Les deux expressions sont égales. Les cas $r = 0$ et $r = m$ donnent respectivement $\frac{1}{4}I_m = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}I_m + I_m)$ et $I_m = \frac{1}{2}(I_m + I_m)$.

Toute matrice de cette forme définit donc une solution de (1). Plus généralement, une matrice semblable PMP^{-1} vérifie la même relation, puisque $(PMP^{-1})^2 = PM^2P^{-1}$ et $PI_mP^{-1} = I_m$.

3. e) Méthode 1 — Inclusion et comparaison des dimensions

Le calcul polynomial donne

$$\left(f + \frac{1}{2}I\right) \circ (f - I) = f^2 - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}I = 0.$$

Si $z \in \text{Im}(f - I)$, il existe x tel que $z = (f - I)(x)$; l'égalité précédente implique $(f + \frac{1}{2}I)(z) = 0$. Donc $\text{Im}(f - I) \subset G$.

Le théorème du rang appliqué à $f - I$ donne $\dim \text{Im}(f - I) = m - \dim F = m - r$. La somme directe de 3. b) donne aussi $\dim G = m - r$. L'inclusion entre deux sous-espaces de même dimension finie est donc une égalité :

$$\text{Im}(f - I) = \text{Ker} \left(f + \frac{1}{2}I \right).$$

Par conséquent, p est le projecteur sur $\text{Ker}(f - I)$ dans la direction $\text{Im}(f - I)$.

Méthode 2 — Construction d'un antécédent

Le même calcul polynomial prouve l'inclusion $\text{Im}(f - I) \subset G$. Pour l'inclusion inverse, si $z \in G$, on a $f(z) = -\frac{1}{2}z$ et donc

$$(f - I) \left(-\frac{2}{3}z \right) = -\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}z - z \right) = z.$$

Tout élément de G possède ainsi un antécédent par $f - I$, ce qui donne $G \subset \text{Im}(f - I)$. On retrouve l'égalité et la même description du projecteur p .

La comparaison des dimensions répond à la méthode imposée ; la seconde approche fournit en plus un antécédent explicite.

Partie II

1. Étude d'une suite récurrente

1. a) Question adaptée au programme actuel.

L'équation demandée équivaut à $3r^3 - r^2 - r - 1 = 0$. Le nombre 1 est une racine, et la division par $X - 1$ donne

$$3X^3 - X^2 - X - 1 = (X - 1)(3X^2 + 2X + 1).$$

Pour tout réel r ,

$$3r^2 + 2r + 1 = 3 \left(r + \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} > 0.$$

Le facteur de degré deux ne s'annule donc pas sur $\mathbb{R}$. L'unique solution réelle de l'équation est $r = 1$.

La forme complétée du carré sera aussi utile pour exclure des valeurs propres réelles sur certains sous-espaces dans la suite du problème.

1. b) Question adaptée au programme actuel.

Si la suite (r^n) vérifie (2), l'égalité au rang 0 donne $3r^3 = r^2 + r + 1$. D'après 1. a), nécessairement $r = 1$. Réciproquement, la suite constante 1 vérifie la relation. Ainsi, la seule suite de la forme demandée avec $r \in \mathbb{R}$ est $(1)_{n \in \mathbb{N}}$. Le choix $r = 0$ ne convient pas : au rang 0, le membre de droite vaudrait $\frac{1}{3}$, tandis que le membre de gauche serait nul.

Étudions maintenant les deux suites réelles proposées. Le nombre θ existe : le cosinus est continu et strictement décroissant de 0 à -1 sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, donc prend une fois la valeur $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Sur cet intervalle ouvert, le sinus est positif ; l'identité $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ donne alors $\sin \theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

À partir des formules d'addition appliquées à $(n+1)\theta + \theta$ et à $(n+1)\theta - \theta$, on obtient

$$\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2 \cos \theta \cos((n+1)\theta),$$

$$\sin((n+2)\theta) + \sin(n\theta) = 2 \cos \theta \sin((n+1)\theta).$$

En multipliant chaque égalité par ρ^{n+2} , on en déduit, pour $v = g$ ou $v = h$,

$$v_{n+2} = 2\rho \cos \theta v_{n+1} - \rho^2 v_n = -\frac{2}{3}v_{n+1} - \frac{1}{3}v_n.$$

Donc $3v_{n+2} + 2v_{n+1} + v_n = 0$. La même relation au rang $n+1$ donne

$3v_{n+3} + 2v_{n+2} + v_{n+1} = 0$. En soustrayant la relation au rang n de celle au rang $n+1$,

$$3v_{n+3} - v_{n+2} - v_{n+1} - v_n = 0.$$

Les deux suites g et h vérifient ainsi (2), entièrement dans un cadre réel.

1. c) Question adaptée au programme actuel.

Méthode 1 — Représentation réelle par trois suites solutions

Les valeurs initiales sont

$$g_0 = 1, \quad h_0 = 0, \quad g_1 = -\frac{1}{3}, \quad h_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad g_2 = -\frac{1}{9}, \quad h_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{9}.$$

Pour les valeurs d'indice 2, on peut utiliser la récurrence de 1. b) :

$$g_2 = -\frac{2}{3}g_1 - \frac{1}{3}g_0 = -\frac{1}{9} \text{ et } h_2 = -\frac{2}{3}h_1 - \frac{1}{3}h_0 = -\frac{2\sqrt{2}}{9}.$$

Le système de l'énoncé s'écrit donc

$$A + B = u_0, \quad A - \frac{1}{3}B + \frac{\sqrt{2}}{3}C = u_1, \quad A - \frac{1}{9}B - \frac{2\sqrt{2}}{9}C = u_2.$$

En multipliant la troisième égalité par 3, la deuxième par 2, puis en ajoutant la première, les coefficients de B et de C s'annulent. On obtient

$$6A = 3u_2 + 2u_1 + u_0, \quad A = \frac{u_0 + 2u_1 + 3u_2}{6}.$$

L'unicité de A est donc nécessaire. La première équation impose ensuite $B = u_0 - A$, et la deuxième impose un unique C , car $\frac{\sqrt{2}}{3} \neq 0$.

Pour vérifier l'existence, prenons ces valeurs de A , B et C . Les deux premières équations sont satisfaites par construction. La combinaison de leurs membres de gauche avec trois fois le membre de gauche de la troisième équation vaut $6A$. Comme $6A = u_0 + 2u_1 + 3u_2$, cette troisième équation est également satisfaite. Le système admet donc exactement une solution. Le calcul explicite de B et de C n'est pas nécessaire.

La suite $v_n = A + Bg_n + Ch_n$ vérifie (2), par linéarité et parce que les suites constantes, g et h la vérifient. Les trois premières valeurs de v sont u_0, u_1, u_2 .

Par récurrence, si $u_n = v_n$, $u_{n+1} = v_{n+1}$ et $u_{n+2} = v_{n+2}$, la relation (2) donne $u_{n+3} = v_{n+3}$. Les trois égalités initiales permettent donc de conclure que

$$u_n = A + B\rho^n \cos(n\theta) + C\rho^n \sin(n\theta) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Puisque les sinus et cosinus ont une valeur absolue au plus 1,

$$|u_n - A| \leq (|B| + |C|)\rho^n.$$

Comme $0 < \rho = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, cette majoration tend vers 0. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{u_0 + 2u_1 + 3u_2}{6}.$$

Méthode 2 — Moyennes successives, encadrements et quantité constante

Cette méthode démontre directement la convergence sans utiliser la représentation trigonométrique. Posons $L_n = \min(u_n, u_{n+1}, u_{n+2})$ et $H_n = \max(u_n, u_{n+1}, u_{n+2})$.

La valeur u_{n+3} est la moyenne des trois valeurs précédentes, donc appartient à $[L_n, H_n]$. Le triple suivant reste dans ce même intervalle. Il en résulte $L_{n+1} \geq L_n$ et $H_{n+1} \leq H_n$.

Les deux suites sont bornées par L_0 et H_0 ; elles convergent donc par le théorème de la limite monotone. Pour prouver que leurs limites coïncident, calculons les trois valeurs suivantes :

$$u_{n+3} = \frac{u_n + u_{n+1} + u_{n+2}}{3},$$

$$u_{n+4} = \frac{u_n + 4u_{n+1} + 4u_{n+2}}{9},$$

$$u_{n+5} = \frac{4u_n + 7u_{n+1} + 16u_{n+2}}{27}.$$

Dans chacune de ces combinaisons, les trois coefficients sont positifs, leur somme vaut 1 et chacun est au moins égal à $\frac{1}{9}$. Si $D_n = H_n - L_n > 0$, un terme du triple initial vaut H_n et un autre vaut L_n . Chaque combinaison est donc au moins $L_n + \frac{1}{9}D_n$ et au plus $H_n - \frac{1}{9}D_n$.

Ces mêmes bornes valent lorsque $D_n = 0$, puisque toutes les valeurs sont alors égales. On en déduit

$$0 \leq D_{n+3} \leq \frac{7}{9} D_n.$$

Par récurrence, $D_{3k} \leq (\frac{7}{9})^k D_0$. De plus, D_n est décroissante, donc, pour $n = 3k + j$ avec $j \in \{0, 1, 2\}$, $D_n \leq D_{3k}$. Ainsi, $D_n \rightarrow 0$.

Les limites de L_n et de H_n sont donc égales à une même valeur ℓ . L'encadrement $L_n \leq u_n \leq H_n$ donne $u_n \rightarrow \ell$.

Enfin, posons $S_n = 3u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n$. La relation (2) donne

$$S_{n+1} = 3u_{n+3} + 2u_{n+2} + u_{n+1} = 3u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = S_n.$$

La quantité S_n est constante, égale à $3u_2 + 2u_1 + u_0$. En passant à la limite dans cette somme finie, $6\ell = 3u_2 + 2u_1 + u_0$, ce qui donne la même limite.

La première méthode fournit une formule explicite et une vitesse de convergence. La seconde exploite uniquement le fait que chaque nouveau terme est une moyenne des trois précédents.

2. Étude des puissances de f et de son inversibilité

Dans cette question, la famille (f^2, f, I) est libre dans l'espace vectoriel des endomorphismes de E .

2. a) Les trois premières puissances donnent

n	a_n	b_n	c_n
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	0

Pour l'existence à tout rang, si $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$, alors

$$f^{n+1} = a_n f^3 + b_n f^2 + c_n f = \left(\frac{1}{3}a_n + b_n\right) f^2 + \left(\frac{1}{3}a_n + c_n\right) f + \frac{1}{3}a_n I.$$

La représentation est donc stable par passage du rang n au rang $n + 1$ et existe par récurrence, à partir du rang 0. Sa seule possibilité résulte de la liberté de (f^2, f, I) : la différence de deux représentations imposerait que les trois différences de coefficients soient nulles.

Les relations demandées sont

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + c_n, \quad c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n.$$

2. b) En composant (3) par f^n , on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{n+3} = \frac{1}{3}(f^{n+2} + f^{n+1} + f^n).$$

On remplace chaque puissance par son expression dans la famille libre (f^2, f, I) , puis on identifie les trois coefficients. Cela donne

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+2} + a_{n+1} + a_n}{3}, \quad b_{n+3} = \frac{b_{n+2} + b_{n+1} + b_n}{3}, \quad c_{n+3} = \frac{c_{n+2} + c_{n+1} + c_n}{3}.$$

Ces trois suites sont réelles ; la question II.1) c) s'applique. Avec les valeurs initiales du tableau,

$$\begin{aligned} a &= \frac{0 + 2 \times 0 + 3 \times 1}{6} = \frac{1}{2}, & b &= \frac{0 + 2 \times 1 + 3 \times 0}{6} = \frac{1}{3}, & c &= \frac{1 + 2 \times 0 + 3 \times 0}{6} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Les trois suites convergent, et $q = \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{3}f + \frac{1}{6}I = \frac{1}{6}(3f^2 + 2f + I)$.

2. c) Méthode 1 — Calcul polynomial de q^2

La relation (3) donne

$$f^3 = \frac{1}{3}(f^2 + f + I), \quad f^4 = \frac{1}{3}(f^3 + f^2 + f) = \frac{4}{9}f^2 + \frac{4}{9}f + \frac{1}{9}I.$$

En développant le carré,

$$q^2 = \frac{1}{36}(9f^4 + 12f^3 + 10f^2 + 4f + I).$$

On remplace les deux premières puissances :

$$9f^4 = 4f^2 + 4f + I, \quad 12f^3 = 4f^2 + 4f + 4I.$$

Il en résulte

$$q^2 = \frac{1}{36}(18f^2 + 12f + 6I) = \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{3}f + \frac{1}{6}I = q.$$

L'endomorphisme q est donc un projecteur.

Méthode 2 — Image fixée par le projecteur

La factorisation de II.1) a), appliquée à f , donne

$$(f - I) \circ (3f^2 + 2f + I) = 3f^3 - f^2 - f - I = 0.$$

Comme $q = \frac{1}{6}(3f^2 + 2f + I)$, on a $(f - I) \circ q = 0$. Tout vecteur $q(x)$ est donc fixé par f .

Pour un vecteur y fixé par f , on a aussi $f^2(y) = y$, donc $q(y) = \frac{1}{6}(3y + 2y + y) = y$. En prenant $y = q(x)$, on obtient $q(q(x)) = q(x)$ pour tout x .

Ainsi, $q^2 = q$ et q est un projecteur. Cette seconde preuve explique le rôle de son image, qui sera précisé en question 3 ; la première vérifie directement l'identité polynomialement.

2. d) La relation (3) se récrit $3f^3 - f^2 - f = I$, donc

$$f \circ (3f^2 - f - I) = I.$$

Les deux facteurs commutent, puisqu'il s'agit de polynômes en f ; on a donc aussi $(3f^2 - f - I) \circ f = I$.

Ainsi, f est inversible et $f^{-1} = 3f^2 - f - I$. Cette conclusion vaut pour toute solution de (3), même si I, f, f^2 ne sont pas indépendants.

3. Étude du projecteur q

Dans les questions suivantes, la seule relation imposée à f est (3). Le polynôme $q = \frac{1}{6}(3f^2 + 2f + I)$ obtenu précédemment est défini pour toute solution de cette relation. Les preuves de $q^2 = q$ en 2. c) ne nécessitent pas l'indépendance de I, f, f^2 .

3. a) Si $x \neq 0$ est un vecteur propre réel associé à λ , la relation (3) appliquée à x donne $3\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

Or $3\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - 1)(3\lambda^2 + 2\lambda + 1)$ et le facteur de degré deux est strictement positif sur $\mathbb{R}$. La seule valeur propre réelle possible est donc 1 ; elle n'est pas nécessairement présente.

L'endomorphisme I satisfait (3) et est diagonalisable. La réponse à la question d'existence est donc affirmative.

Plus précisément, si une solution de (3) est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sa matrice diagonale dans une base de vecteurs propres ne peut avoir que des coefficients diagonaux égaux à 1. Cette matrice est I_m , donc l'endomorphisme est I .

Ainsi, parmi toutes les solutions de (3), la seule diagonalisable sur $\mathbb{R}$ est $f = I$. Si l'on imposait en plus l'indépendance de I, f, f^2 de la question 2, aucune solution diagonalisable ne serait possible; cette hypothèse n'est toutefois pas imposée dans la présente question.

3. b) Posons $F = \text{Ker}(f - I)$, $G = \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et $T = 3f^2 + 2f + I = 6q$.

Si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$, alors $f(y) = y$, $f^2(y) = y$, et $T(z) = 0$. Par conséquent, $T(x) = T(y) + T(z) = 6y$, d'où

$$y = \frac{1}{6}(3f^2(x) + 2f(x) + x) = q(x),$$

$$z = x - y = \frac{1}{6}(5x - 2f(x) - 3f^2(x)) = (I - q)(x).$$

Ces formules montrent l'unicité d'une décomposition éventuelle. Établissons l'existence pour tout $x \in E$.

L'identité $(f - I) \circ q = 0$, démontrée en 2. c), assure $q(x) \in F$. Comme $q^2 = q$ et $T = 6q$,

$$T \circ (I - q) = 6q - 6q^2 = 0,$$

donc $(I - q)(x) \in G$. L'égalité $x = q(x) + (I - q)(x)$ donne ainsi une décomposition pour tout vecteur.

Si $v \in F \cap G$, alors $T(v) = 6v$ puisque $f(v) = v$, mais $T(v) = 0$ puisque $v \in G$. On a donc $v = 0$. Par conséquent, $E = F \oplus G$.

Les formules de y et de z identifient q comme le projecteur sur $\text{Ker}(f - I)$ dans la direction $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, sans hypothèse d'indépendance des puissances de f .

3. c) Méthode 1 — Inclusion et théorème du rang

On calcule

$$(3f^2 + 2f + I) \circ (f - I) = 3f^3 - f^2 - f - I = 0.$$

Pour tout $z = (f - I)(x)$, on a donc $(3f^2 + 2f + I)(z) = 0$. Il s'ensuit $\text{Im}(f - I) \subset G$.

Le théorème du rang donne $\dim \text{Im}(f - I) = m - \dim \text{Ker}(f - I) = m - \dim F$. La somme directe de 3. b) donne $\dim G = m - \dim F$. Les deux sous-espaces ont la même dimension finie, donc

$$\text{Im}(f - I) = \text{Ker}(3f^2 + 2f + I).$$

Par suite, q est également le projecteur sur $\text{Ker}(f - I)$ dans la direction $\text{Im}(f - I)$.

Méthode 2 — Antécédent explicite sur G

Le calcul précédent donne encore l'inclusion de l'image dans G . Pour $z \in G$, on a $3f^2(z) + 2f(z) + z = 0$. Posons $x = -\frac{1}{6}(3f + 5I)(z)$. Alors

$$(f - I)(x) = -\frac{1}{6}(3f^2 + 2f - 5I)(z) = -\frac{1}{6}(-z - 5z) = z.$$

Tout vecteur de G est donc dans l'image de $f - I$. L'égalité des sous-espaces et la description du projecteur en résultent.

La première preuve suit la comparaison des dimensions demandée; la seconde montre concrètement comment résoudre $(f - I)(x) = z$ pour $z \in G$.

4. Étude des solutions de (3)

Dans toute cette question, notons $G = \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et $F = \text{Ker}(f - I)$. D'après 3. b), $E = F \oplus G$.

Le sous-espace G est stable par f : si $v \in G$, alors

$(3f^2 + 2f + I)(f(v)) = f((3f^2 + 2f + I)(v)) = 0$. De plus, pour tout $v \in G$,

$$f^2(v) = -\frac{2}{3}f(v) - \frac{1}{3}v.$$

On utilisera la matrice réelle

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

pour représenter cette action sur un plan engendré par v et $f(v)$.

4. a) Puisque $e_1 \in G$ et G est stable, $f(e_1) \in G$. Supposons $ae_1 + bf(e_1) = 0$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Si $b = 0$, la non-nullité de e_1 impose $a = 0$. Si $b \neq 0$, alors $f(e_1) = te_1$ avec $t = -\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$. En appliquant $3f^2 + 2f + I$ à e_1 , on obtiendrait $(3t^2 + 2t + 1)e_1 = 0$.

Or $3t^2 + 2t + 1 = 3(t + \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3} > 0$, et $e_1 \neq 0$. Cette égalité est impossible. Tous les coefficients d'une relation sont donc nuls, ce qui prouve la liberté de $(e_1, f(e_1))$.

Le sous-espace G contient ainsi deux vecteurs indépendants, donc $\dim G \geq 2$.

4. b) Pour $m = 2$, la question 4. a) exclut $\dim G = 1$. Les seuls couples possibles sont donc $(\dim G, \dim F) = (0, 2)$ et $(2, 0)$.

Si $G = \{0\}$, alors $F = E$ et $f = I$, représenté par I_2 dans toute base.

Si $G = E$, choisissons $e_1 \neq 0$. La famille $(e_1, f(e_1))$ est libre et contient deux vecteurs de E , donc constitue une base. L'image du premier vecteur est le second ; l'image du second est

$$f^2(e_1) = -\frac{1}{3}e_1 - \frac{2}{3}f(e_1).$$

La matrice de f dans cette base est donc

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

comme demandé.

Cette matrice n'a aucune valeur propre réelle. En effet, $3B^2 + 2B + I_2 = 0$; si $BX = \lambda X$ avec $X \neq 0$ réel, alors $(3\lambda^2 + 2\lambda + 1)X = 0$, contrairement à la stricte positivité de ce coefficient. Elle ne peut donc pas avoir une base réelle de vecteurs propres et n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Les deux cas existent : I_2 satisfait (3), et l'identité $3B^2 + 2B + I_2 = 0$ entraîne $(B - I_2)(3B^2 + 2B + I_2) = 3B^3 - B^2 - B - I_2 = 0$, donc B satisfait aussi (3).

4. c) Le plan $V = \text{Vect}(e_1, f(e_1))$ est stable par f : $f(e_1)$ lui appartient et $f^2(e_1) = -\frac{1}{3}e_1 - \frac{2}{3}f(e_1)$ également.

L'hypothèse de liberté de $(e_1, f(e_1), e_2)$ signifie notamment que $e_2 \notin V$. Comme G est stable par f , les quatre vecteurs considérés appartiennent à G .

Étudions une relation $ae_1 + bf(e_1) + ce_2 + df(e_2) = 0$. Si $d = 0$, la liberté de la famille à trois vecteurs impose $a = b = c = 0$.

Supposons donc $d \neq 0$. On peut écrire $f(e_2) = te_2 + h$, où $t = -\frac{c}{d} \in \mathbb{R}$ et

$h = -\frac{a}{d}e_1 - \frac{b}{d}f(e_1) \in V$. La stabilité de V implique $f(h) \in V$. En appliquant f à cette égalité,

$$f^2(e_2) = t^2e_2 + th + f(h).$$

Puisque $e_2 \in G$, on a $3f^2(e_2) + 2f(e_2) + e_2 = 0$. En remplaçant les deux images,

$$(3t^2 + 2t + 1)e_2 + (3t + 2)h + 3f(h) = 0.$$

Le second terme et le troisième appartiennent à V , et le coefficient de e_2 est strictement positif. On pourrait donc diviser par ce coefficient pour obtenir $e_2 \in V$, ce qui contredit le choix de e_2 .

Le cas $d \neq 0$ est impossible ; les quatre coefficients sont nuls. La famille $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est libre dans G , donc $\dim G \geq 4$.

4. d) Pour $m = 3$, la dimension de G ne peut pas valoir 1, d'après 4. a). Elle ne peut pas valoir 3 non plus : si elle était supérieure à 2, on pourrait compléter $(e_1, f(e_1))$ par un vecteur $e_2 \in G$ pour former une famille libre à trois vecteurs ; la question 4. c) imposerait alors $\dim G \geq 4$, ce qui serait impossible dans $\mathbb{R}^3$.

Les seuls couples de dimensions sont donc $(\dim G, \dim F) = (0, 3)$ et $(2, 1)$.

Dans le premier cas, $f = I$ et sa matrice est I_3 . Dans le second, choisissons une base $(e_1, f(e_1))$ de G et un vecteur non nul $v \in F$. La somme directe assure que $(e_1, f(e_1), v)$ est une base de E . On a $f(v) = v$, et la matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. En effet, par 3. a), toutes les valeurs propres réelles possibles sont égales à 1, mais son espace propre pour 1 a dimension $\dim F = 1 < 3$. Elle ne possède donc pas une base de vecteurs propres. Les deux cas existent, car le bloc B et le bloc identité satisfont chacun (3).

4. e) Pour $m = 4$, la question 4. a) exclut $\dim G = 1$, et la question 4. c) exclut $\dim G = 3$. Il reste les dimensions 0, 2 ou 4.

Si $\dim G = 0$, alors $\dim F = 4$ et $f = I$; la matrice est I_4 .

Si $\dim G = 2$, alors $\dim F = 2$. En réunissant une base $(e_1, f(e_1))$ de G et une base de F , on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}.$$

Si $\dim G = 4$, alors $F = \{0\}$. On choisit $e_1 \neq 0$ dans G , puis e_2 hors du plan engendré par $e_1, f(e_1)$; ce choix est possible puisque ce plan a dimension $2 < 4$. La question 4. c) assure que $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est une base de $G = E$. Chacun des deux plans associés est stable par f , et la matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Ces trois formes satisfont (3), car chaque bloc le satisfait. Elles sont donc toutes possibles. Seule la forme I_4 est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, par la caractérisation de 3. a).

4. f) Notons $V = \text{Vect}(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q))$. La famille donnée est libre, donc $\dim V = 2q$.

Pour chaque j , $f(e_j) \in V$ et $f^2(e_j) = -\frac{1}{3}e_j - \frac{2}{3}f(e_j) \in V$. Par linéarité, V est stable par

f .

Comme $\dim G > 2q$, V est un sous-espace strict de G . Il existe donc $e = e_{q+1} \in G \setminus V$, conformément au théorème de la base incomplète, et $f(e) \in G$ par stabilité de G .

Considérons une relation $h + ae + bf(e) = 0$ avec $h \in V$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Si $b = 0$, le fait que $e \notin V$ impose $a = 0$, puis $h = 0$; la liberté de la famille initiale annule alors tous les coefficients qui composaient h .

Si $b \neq 0$, on écrit $f(e) = te + k$, avec $t = -\frac{a}{b}$ et $k = -\frac{h}{b} \in V$. Comme V est stable, $f(k) \in V$. En appliquant f puis la relation sur G , on obtient

$$f^2(e) = t^2e + tk + f(k),$$

$$(3t^2 + 2t + 1)e + (3t + 2)k + 3f(k) = 0.$$

Le coefficient $3t^2 + 2t + 1$ est strictement positif. Les deux derniers termes appartenant à V , cette égalité imposerait $e \in V$, contradiction. Ainsi, aucune relation non triviale n'existe; la famille prolongée par $e_{q+1}, f(e_{q+1})$ est libre dans G .

Pour en déduire la parité, si $G = \{0\}$ sa dimension est 0, donc paire. Sinon, 4. a) fournit une première paire libre. Tant que les paires déjà construites n'engendrent pas tout G , la construction précédente ajoute deux vecteurs et conserve la liberté.

Ce processus doit s'arrêter : une famille libre dans G ne peut pas avoir plus de $\dim G$ éléments. À l'arrêt, les paires engendrent tout G , faute de quoi une nouvelle paire pourrait être ajoutée. Elles constituent donc une base de G dont le cardinal est un entier pair.

Par conséquent, $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ est paire. La démonstration repose uniquement sur des sous-espaces réels stables et sur la positivité d'un polynôme réel du second degré.

4. g) Écrivons $\dim G = 2r$. La question précédente permet de choisir une base de G sous la forme

$$(e_1, f(e_1), \dots, e_r, f(e_r)).$$

Lorsque $r = 0$, cette famille est vide. Comme $E = G \oplus F$, $\dim F = m - 2r$. Complétons avec une base $(v_1, \dots, v_{m-2r})$ de F , vide si $2r = m$.

Dans la base obtenue, chaque paire $(e_j, f(e_j))$ donne le bloc $B : f(e_j)$ est le second vecteur de la paire et $f^2(e_j) = -\frac{1}{3}e_j - \frac{2}{3}f(e_j)$. Chaque v_j est fixé par f .

Ainsi,

$$M = \text{diag}(\underbrace{B, \dots, B}_{r \text{ blocs}}, I_{m-2r}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

La notation diag désigne la matrice par blocs dont les blocs indiqués sont sur la diagonale et dont tous les autres blocs sont nuls. Si $r = 0$, $M = I_m$; si $2r = m$, le bloc identité final est absent.

La dimension de l'espace propre pour 1 est $m - 2r$. Il n'y a aucune autre valeur propre réelle. En particulier, si $2r = m$, le spectre réel est vide; si $m - 2r > 0$, il est égal à $\{1\}$. La matrice est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ exactement lorsque $r = 0$.

4. h) Calculons les puissances du bloc B par multiplication matricielle :

$$B^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{27} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{27} \end{pmatrix}.$$

On vérifie aussi

$$B^2 + B + I_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} = 3B^3.$$

Sur le bloc identité, $I_{m-2r}^3 = I_{m-2r} = \frac{1}{3}(I_{m-2r}^2 + I_{m-2r} + I_{m-2r})$. Les puissances d'une matrice diagonale par blocs s'obtiennent en élevant séparément chacun de ses blocs à la puissance considérée. Ainsi,

$$M^3 = \frac{1}{3}(M^2 + M + I_m).$$

Cette vérification couvre aussi les cas où les blocs B ou le bloc identité sont absents. Pour toute matrice inversible réelle P , la matrice $A = PMP^{-1}$ vérifie également (3), puisque $A^k = PM^kP^{-1}$ pour $k = 1, 2, 3$.

Réciproquement, les questions précédentes ont montré que toute solution de (3) possède une base donnant cette forme. Les solutions sont donc exactement les endomorphismes représentés, dans une base réelle convenable, par les matrices de 4. g), pour les entiers r tels que $0 \leq 2r \leq m$.

Relevé des adaptations

II.1) a) : la résolution est effectuée dans $\mathbb{R}$. La factorisation réelle $(X - 1)(3X^2 + 2X + 1)$ et la stricte positivité du facteur de degré deux remplacent la recherche de racines hors du cadre réel.

II.1) b) : la recherche des suites géométriques est limitée aux rapports réels. Deux suites réelles $g_n = \rho^n \cos(n\theta)$ et $h_n = \rho^n \sin(n\theta)$ sont introduites pour fournir les solutions supplémentaires nécessaires à la question suivante ; leurs récurrences sont établies à partir des formules d'addition autorisées.

II.1) c) : les suites étudiées et le système d'inconnues sont entièrement réels. La représentation $u_n = A + Bg_n + Ch_n$ conserve l'étude d'un système de trois équations, la combinaison imposée $3u_2 + 2u_1 + u_0$, la preuve par récurrence et la limite

$(u_0 + 2u_1 + 3u_2)/6$, utilisée ensuite en II.2) b). Aucun résultat de résolution générale d'une récurrence d'ordre trois n'est supposé connu.