



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1994

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Problème

Dans tout le problème, a désigne un réel strictement positif. Dans la partie 1, on étudie la fonction f_a définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad f_a(x) = \frac{1}{x} - e^{-ax}.$$

Partie 1. Étude de f_a

1. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln x}{x}$. On considère l'équation E_a :
 $g(x) = a$.

1. (a) Étudier les variations de g .

1. (b) On suppose $0 < a < 1/e$. Montrer que E_a admet deux solutions notées $u(a)$ et $v(a)$, avec $u(a) < v(a)$. Établir que :

$$1 < u(a) < e < v(a).$$

1. (c) Discuter suivant les valeurs de a le nombre de solutions de E_a .

2. On définit la fonction h_a sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad h_a(x) = 2 \ln x + \ln a - ax.$$

On considère l'équation $F_a : h_a(x) = 0$.

2. (a) Étudier les variations de h_a .

2. (b) On suppose $0 < a < 4/e^2$. Montrer que F_a admet exactement deux solutions $r(a)$ et $s(a)$ telles que $r(a) < s(a)$. Établir que :

$$0 < r(a) < \frac{2}{a} < s(a).$$

2. (c) Discuter suivant les valeurs de a le nombre de solutions de F_a .

3. Soient a, b deux réels tels que $0 < a < b$ et $x > 0$. Montrer que :

$$\frac{1}{x} - 1 < f_a(x) < f_b(x) < \frac{1}{x}.$$

4. Comportement asymptotique de f_a .

4. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_a(x)$.

4. (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x)$.

5. Signe de f_a .

5. (a) Comparer les signes de $f_a(x)$ et de $a - g(x)$.

5. (b) En déduire l'étude du signe de $f_a(x)$, a étant fixé.

6. Variations de f_a .

6. (a) Comparer les signes de $f'_a(x)$ et de $h_a(x)$.

6. (b) Dresser le tableau de variations de f_a . Distinguer les deux cas :

$$a \geq \frac{4}{e^2} \quad \text{et} \quad 0 < a < \frac{4}{e^2}.$$

Dans le second cas, on ne cherchera pas à préciser les valeurs de $f_a(r(a))$ et de $f_a(s(a))$.

7. On suppose dans cette question $0 < a < 1/e$.

7. (a) Montrer que $u(a) < r(a) < v(a) < s(a)$ et que f_a possède un minimum en $r(a)$.

7. (b) Donner l'allure du graphe de f_a .

8. On suppose $0 < a < 1/e$ et on pose $m(a) = f_a(r(a))$.

8. (a) Montrer que :

$$r(a) = \frac{e^{ar(a)/2}}{\sqrt{a}}.$$

8. (b) Montrer que $\lim_{a \rightarrow 0^+} \sqrt{a} r(a) = 1$.

8. (c) Déterminer $\lim_{a \rightarrow 0^+} m(a)$.

8. (d) Calculer un équivalent simple de $m(a) + 1$ lorsque a tend vers 0^+ .

Partie 2. Étude d'un test

On étudie une méthode de détection des porteurs d'un parasite au sein d'un ensemble de N individus choisis au hasard et de manière indépendante dans une population très importante par rapport à N . La proportion de porteurs du parasite est $p \in]0, 1[$.

Un test permet de savoir si un échantillon de sang contient le parasite ou non ; le test est positif dans le premier cas et négatif sinon. On dispose de prélèvements sanguins de

chacun des N individus et l'on compare deux méthodes de détection.

Première méthode : on teste un à un les N prélèvements, effectuant ainsi N tests.

Deuxième méthode, par paquets : on fixe un entier naturel ℓ non nul et l'on suppose que N est un multiple de ℓ , soit $N = n\ell$. On répartit les N prélèvements en n groupes $G_1, \dots, G_n$ contenant chacun ℓ prélèvements.

Pour chaque groupe G_i , on extrait une quantité de sang de chacun des ℓ prélèvements et on les mélange, obtenant un échantillon H_i caractéristique du groupe G_i .

On teste alors H_i : si le test est négatif, l'étude du groupe G_i est terminée ; si le test est positif, on teste un à un les prélèvements de G_i .

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de groupes G_i pour lesquels le test de H_i a été positif, et T la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués au cours de la seconde méthode.

1. (a) Exprimer T à l'aide de n, ℓ, X .

1. (b) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, calculer la probabilité de l'événement «le test de H_i est négatif».

1. (c) Déterminer la loi et l'espérance de X .

On pose désormais, pour toute la fin du problème :

$$a = -\ln(1 - p).$$

1. (d) Montrer que :

$$E(T) = N(1 + f_a(\ell)).$$

On suppose en outre, jusqu'à la fin, que :

$$0 < p < 1 - \frac{1}{3^{1/3}}.$$

2. (a) Montrer que $f_a(3) < 0$. Comparer les deux méthodes pour $\ell = 3$.

2. (b) Établir que $a < 1/e$.

On cherche maintenant à optimiser la méthode par paquets, c'est-à-dire à choisir, en fonction de p , la valeur ℓ qui minimise $E(T)$.

3. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. On dit que ℓ vérifie la propriété (MIN) si, pour tout $\ell' \in \mathbb{N}^*$, $f_a(\ell) \leq f_a(\ell')$.

3. (a) Montrer qu'il existe au moins un $\ell \in \mathbb{N}^*$ qui vérifie la propriété (MIN) et qu'un tel entier est égal soit à $\lfloor r(a) \rfloor$, soit à $\lfloor r(a) \rfloor + 1$, où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x .

On note ℓ_0 le plus petit entier non nul vérifiant (MIN).

3. (b) Montrer que $f_a(\ell_0) < 0$. En déduire que $\ell_0 \geq 2$.

3. (c) Montrer que $f_a(3) < f_a(2)$. Que peut-on en déduire pour ℓ_0 ?

4. Proposer un algorithme en Python qui prend p en donnée et fournit la valeur ℓ_0 .

5. Exemple : on suppose $p = 0,01$.

5. (a) Déterminer la valeur de ℓ_0 .

5. (b) Déterminer le rapport $E(T)/N$ lorsque $\ell = \ell_0$.

6. On note $\rho(p)$ la valeur du rapport $E(T)/N$ lorsque $\ell = \ell_0$.

6. (a) Donner un équivalent de ℓ_0 lorsque p tend vers 0^+ .
6. (b) Donner un équivalent de $\rho(p)$ lorsque p tend vers 0^+ .
6. (c) Le résultat de la question 5. (b) est-il conforme à celui de la question 6. (b) ?