



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1994

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, p désigne un entier naturel fixé et n un entier variable supérieur ou égal à 1. La partie IV utilise uniquement les notations et les résultats de la partie III.

Partie I

1. Vérifier que, pour tout réel $t \neq 1$:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{i=0}^{p+1} t^i + \frac{t^{p+2}}{1-t}.$$

En déduire, pour tout entier $k \geq 2$:

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{i=1}^{p+2} \frac{1}{ik^i} + \int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t} dt,$$

puis :

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{i=1}^{p+2} \frac{1}{ik^i} + \frac{a(k)}{k^{p+3}}, \quad 0 \leq a(k) \leq \frac{2}{p+3}.$$

2. On désigne par M un réel positif ou nul et on envisage une série réelle

$$\sum_{k=2}^{+\infty} z_k$$

dont le terme général vérifie $|z_k| \leq M/k^{p+2}$.

Justifier la convergence de la série. Prouver que, pour tous entiers $n \geq 1$ et $m \geq n+1$:

$$\sum_{i=n+1}^m \frac{1}{i^{p+2}} \leq \int_n^m \frac{dt}{t^{p+2}}.$$

En déduire :

$$\sum_{i=n+1}^m \frac{1}{i^{p+2}} \leq \frac{1}{(p+1)n^{p+1}},$$

puis, pour tout $n \geq 1$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k \right| \leq \frac{M}{(p+1)n^{p+1}}.$$

Partie II : une première approximation de $\ln(n!)$

1. Expression de $\ln(n!)$ à l'aide d'une suite.

1. a) On considère la suite $(v_k)_{k \geq 2}$ définie par :

$$v_k = \ln k - \int_{k-1}^k \ln t \, dt.$$

Prouver que, pour tout $n \geq 2$:

$$\ln(n!) = \sum_{k=2}^n v_k + \int_1^n \ln t \, dt.$$

Expliciter $\int_1^n \ln t \, dt$.

1. b) Établir que, pour tout $k \geq 2$:

$$v_k = \int_0^1 (\ln k - \ln(k-u)) \, du.$$

En déduire :

$$v_k = \frac{1}{2}(\ln k - \ln(k-1)) - \int_0^1 \frac{u - 1/2}{k - u} du.$$

Dans la suite de cette partie, on pose, pour $k \geq 2$:

$$w_k = \int_0^1 \frac{u - 1/2}{k - u} du.$$

1. c) Montrer que, pour tout $n \geq 2$:

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + 1 - \sum_{k=2}^n w_k.$$

2. Étude de la suite $(w_k)_{k \geq 2}$.

Prouver que, pour $k \geq 2$:

$$w_k = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u - u^2}{(k - u)^2} du.$$

En déduire $0 \leq w_k \leq 1/(12(k-1)^2)$.

Ainsi, la série

$$\sum_{k=2}^{+\infty} w_k$$

converge. On admettra que sa somme vaut $1 - \frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

Dans toute la suite du problème, on note $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par :

$$\varepsilon_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k.$$

3. Évaluation asymptotique de $\ln(n!)$.

Montrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \varepsilon_n. \quad (1)$$

4. Majoration du reste ε_n .

En utilisant la seconde question de la partie I, établir que, pour $n \geq 2$:

$$0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{12(n-1)}.$$

Partie III : une approximation générale de $\ln(n!)$

Cette partie a pour objet d'étudier plus précisément le comportement asymptotique de $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$.

1. Évaluation de $\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k$.

À l'aide de l'égalité (1) de la partie II, établir que, pour $k \geq 2$:

$$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = -\left(k - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) - 1.$$

Déduire de la question I. 1 que, pour $k \geq 2$:

$$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \sum_{i=1}^p \frac{b_i}{k^{i+1}} + \frac{d(k)}{k^{p+2}}, \quad b_i = \frac{i}{2(i+1)(i+2)}, \quad |d(k)| \leq 1. \quad (2)$$

2. Une première évaluation de ε_n .

Dans cette question, on fixe $p = 1$, de sorte que (2) s'écrit :

$$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \frac{1}{12k^2} + \frac{d(k)}{k^3}.$$

On pose $r_k = \varepsilon_k - c_1/k$, où c_1 désigne un réel.

2. a) Montrer que, pour $k \geq 2$:

$$\frac{1}{1-1/k} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{g(k)}{k^2}, \quad 0 \leq g(k) \leq 2.$$

2. b) Déterminer c_1 de sorte que $|r_{k-1} - r_k| \leq 7/(6k^3)$ pour $k \geq 2$.

Le réel c_1 étant ainsi choisi, établir que, pour $n \geq 1$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k) \right| \leq \frac{7}{12n^2}.$$

2. c) Prouver que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k) = r_n$$

et en déduire, pour $n \geq 1$:

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + \frac{\lambda_1(n)}{n^2}, \quad |\lambda_1(n)| \leq \frac{7}{12}.$$

3. Une seconde évaluation de ε_n .

Dans cette question, on fixe $p = 2$, de sorte que (2) s'écrit :

$$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{12k^3} + \frac{d(k)}{k^4}.$$

On pose $r_k = \varepsilon_k - 1/(12k) - c_2/k^2$, où c_2 désigne un réel.

3. a) Montrer que, pour $k \geq 2$:

$$\frac{1}{1-1/k} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{g_1(k)}{k^3}, \quad 0 \leq g_1(k) \leq 2.$$

À l'aide de III. 2. a), prouver que :

$$\frac{1}{(1 - 1/k)^2} = 1 + \frac{2}{k} + \frac{g_2(k)}{k^2}, \quad 0 \leq g_2(k) \leq 8.$$

3. b) Vérifier que, pour $k \geq 2$:

$$r_{k-1} - r_k = -\frac{2c_2}{k^3} + \left(d(k) - \frac{1}{12}g_1(k) - c_2g_2(k) \right) \frac{1}{k^4}.$$

Déterminer c_2 de sorte que $|r_{k-1} - r_k| \leq 7/(6k^4)$ pour $k \geq 2$.

3. c) Prouver que, pour $n \geq 1$:

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + \frac{\lambda_2(n)}{n^3}, \quad |\lambda_2(n)| \leq \frac{7}{18}.$$

Désormais, dans toute la suite du problème, p désigne un entier fixé non nul.

4. Étude d'un système auxiliaire.

Les réels $b_1, \dots, b_p$ étant définis en III. 1, on envisage le système $\mathcal{S}$ de p équations linéaires aux inconnues $x_1, \dots, x_p$, qui s'écrit $AX = B$, avec :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

La matrice A est carrée d'ordre p ; son coefficient à la ligne i et à la colonne j est :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \binom{i}{j-1} & \text{si } j \leq i, \\ 0 & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Que valent les éléments diagonaux de A ? Montrer que $\mathcal{S}$ admet une solution et une seule, notée $(c_1, \dots, c_p)$.

5. Évaluation asymptotique de ε_n .

On pose, pour $k \geq 1$:

$$r_k = \varepsilon_k - \sum_{q=1}^p \frac{c_q}{k^q},$$

les c_q étant les coefficients de la solution du système précédent.

5. a) En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à un ordre convenable à la fonction $t \mapsto (1-t)^{-q}$, pour $q \in \{1, \dots, p\}$, montrer que, pour $k \geq 2$:

$$\frac{1}{(1-1/k)^q} = 1 + \sum_{i=1}^{p-q+1} \binom{q+i-1}{i} \frac{1}{k^i} + \frac{q(q+1)\dots(p+1)}{(p-q+1)!} \int_0^{1/k} \frac{(1/k-t)^{p-q+1}}{(1-t)^{p+2}} dt.$$

Prouver que :

$$0 \leq \int_0^{1/k} \frac{(1/k-t)^{p-q+1}}{(1-t)^{p+2}} dt \leq \left(\frac{k}{k-1}\right)^{p+2} \int_0^{1/k} u^{p-q+1} du.$$

En déduire :

$$\frac{1}{(1-1/k)^q} = 1 + \sum_{i=1}^{p-q+1} \binom{q+i-1}{i} \frac{1}{k^i} + \frac{g_q(k)}{k^{p-q+2}}, \quad 0 \leq g_q(k) \leq \binom{p+1}{q-1} 2^{p+2}.$$

5. b) En remarquant que :

$$\sum_{q=1}^p \frac{c_q}{(k-1)^q} - \sum_{q=1}^p \frac{c_q}{k^q} = \sum_{q=1}^p \frac{c_q}{k^q} \left(\frac{1}{(1-1/k)^q} - 1 \right),$$

montrer que, pour $k \geq 2$:

$$\sum_{q=1}^p \frac{c_q}{(k-1)^q} - \sum_{q=1}^p \frac{c_q}{k^q} = \sum_{i=1}^p \frac{\mu_i}{k^{i+1}} + \left(\sum_{q=1}^p c_q g_q(k) \right) \frac{1}{k^{p+2}}, \quad \mu_i = \sum_{j=1}^i a_{i,j} c_j.$$

5. c) On pose $m_p = \max\{|c_1|, \dots, |c_p|\}$ et $M_p = 1 + 2^{2p+3}m_p$.

Prouver que, pour $k \geq 2$:

$$|r_{k-1} - r_k| \leq \frac{M_p}{k^{p+2}}.$$

5. d) En déduire, pour $n \geq 1$:

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \sum_{q=1}^p \frac{c_q}{n^q} + \frac{\lambda_p(n)}{n^{p+1}}, \quad |\lambda_p(n)| \leq \frac{M_p}{p+1}.$$

Partie IV : étude d'un algorithme

On étudie un algorithme de calcul des coefficients $c_1, \dots, c_p$, solution du système $\mathcal{S}$ de III.

4.

On appelle coût le nombre d'additions, de soustractions, de multiplications et de divisions effectuées pour calculer les coefficients. On ne compte pas les affectations, tests, allocations de tableaux ni les opérations de gestion des indices et des boucles.

L'entier $p \geq 1$ est fixé. On utilise des tableaux NumPy et une indexation de 1 à p : la case d'indice 0, ainsi que la ligne et la colonne d'indice 0, ne sont pas utilisées. Les tableaux sont créés ainsi :

Python

```
import numpy as np

B = np.zeros(p + 1)
C = np.zeros(p + 1)
```

```
A = np.zeros((p + 1, p + 1))
```

Les fonctions renvoient le tableau qu'elles ont calculé.

1. Écrire une fonction Python `SecondMembre(p)` calculant le second membre B du système $\mathcal{S}$. Déterminer un équivalent de son coût lorsque $p \rightarrow +\infty$.
2. On envisage la fonction suivante :

Python

```
import numpy as np

def Coefficients(p):
    A = np.zeros((p + 1, p + 1))
    A[1, 1] = 1
    for j in range(2, p + 1):
        A[1, j] = 0
    for i in range(2, p + 1):
        A[i, 1] = 1
        for j in range(2, i):
            A[i, j] = A[i - 1, j - 1] + A[i - 1, j]
        A[i, i] = i
        for j in range(i + 1, p + 1):
            A[i, j] = 0
    return A
```

Expliquer le rôle de cette fonction. Déterminer un équivalent de son coût lorsque $p \rightarrow +\infty$.

3. Écrire une fonction Python `Approximation(A, B, p)` renvoyant C tel que $C[i] = c_i$ pour $i \in \{1, \dots, p\}$, après calcul de B par `SecondMembre(p)` et de A par `Coefficients(p)`. Déterminer un équivalent de son coût lorsque $p \rightarrow +\infty$.

4. Déterminer, lorsque $p \rightarrow +\infty$, un équivalent du coût total de la détermination des coefficients.