



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1994

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Problème

On fixe $a > 0$ et l'on étudie $f_a(x) = 1/x - e^{-ax}$ pour $x > 0$. Les limites en $a = 0$ et en $p = 0$ sont toutes des limites à droite.

Partie 1. Étude de f_a

1. (a) Variations de g

La fonction $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Par la formule de dérivation d'un quotient :

$$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif. Ainsi $g'(x) > 0$ pour $0 < x < e$, $g'(e) = 0$ et $g'(x) < 0$ pour $x > e$.

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $\ln x \rightarrow -\infty$. Pour $0 < x < 1$, $g(x) \leq \ln x$, car $\ln x < 0$ et $1/x > 1$. Donc $g(x) \rightarrow -\infty$.

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, les croissances comparées donnent $\ln x/x \rightarrow 0$. Enfin, $g(e) = 1/e$ et $g(1) = 0$.

x	0^+	e	$+\infty$
Variation de g	$-\infty$	Maximum $1/e$	Limite 0
Sens de variation	Croissante vers e		Décroissante après e

La fonction g possède un maximum global strict, égal à $1/e$, atteint uniquement en e .

1. (b) Deux solutions lorsque $0 < a < 1/e$

Sur $[1, e]$, g est continue et strictement croissante, avec $g(1) = 0 < a < g(e) = 1/e$. Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie assurent l'existence d'une unique solution $u(a) \in]1, e[$.

Sur $[e, +\infty[$, g est continue et strictement décroissante, de valeur $1/e$ en e et de limite $0 < a$ à l'infini. Il existe donc un réel $B > e$ tel que $g(B) < a$. Le théorème des valeurs intermédiaires sur $[e, B]$ donne une solution, et la stricte monotonie sur $[e, +\infty[$ assure son unicité. On la note $v(a) > e$.

Pour $0 < x \leq 1$, $g(x) \leq 0 < a$, donc il n'existe pas d'autre solution. Ainsi :

$$1 < u(a) < e < v(a).$$

L'équation E_a possède exactement les deux solutions annoncées.

1. (c) Nombre de solutions de E_a

On conserve l'hypothèse générale $a > 0$.

- Si $0 < a < 1/e$, l'équation possède exactement deux solutions, comme démontré à la question précédente.
- Si $a = 1/e$, la valeur cherchée est le maximum strict de g ; l'unique solution est $x = e$.
- Si $a > 1/e$, $g(x) \leq 1/e < a$ pour tout $x > 0$, donc l'équation n'a aucune solution.

2. (a) Variations de h_a

La fonction $h_a(x) = 2 \ln x + \ln a - ax$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, puisque $a > 0$. Sa dérivée est :

$$h'_a(x) = \frac{2}{x} - a = \frac{2 - ax}{x}.$$

Le dénominateur est positif. Ainsi h_a est strictement croissante sur $]0, 2/a]$, puis strictement décroissante sur $[2/a, +\infty[$.

En 0^+ , $2 \ln x \rightarrow -\infty$ tandis que $\ln a - ax \rightarrow \ln a$, donc $h_a(x) \rightarrow -\infty$.

À l'infini, on écrit :

$$\frac{h_a(x)}{x} = 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln a}{x} - a \rightarrow -a < 0.$$

Pour x assez grand, $h_a(x)/x < -a/2$, donc $h_a(x) < -ax/2 \rightarrow -\infty$.

Le maximum global est atteint en $2/a$ et vaut :

$$h_a\left(\frac{2}{a}\right) = 2 \ln\left(\frac{2}{a}\right) + \ln a - 2 = \ln\left(\frac{4}{ae^2}\right).$$

x	0^+	$2/a$	$+\infty$
Limites ou valeur	$-\infty$	$h_a(2/a)$	$-\infty$
Sens de variation	Croissante vers $2/a$		Décroissante après $2/a$

La valeur du maximum est positive, nulle ou négative suivant que $a < 4/e^2$, $a = 4/e^2$ ou $a > 4/e^2$.

2. (b) Deux solutions de F_a

Supposons $0 < a < 4/e^2$. Le maximum $h_a(2/a) = \ln(4/(ae^2))$ est alors strictement positif.

Sur $]0, 2/a]$, la fonction est continue, strictement croissante, de limite $-\infty$ en 0^+ et de valeur positive en $2/a$. Le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué entre un point suffisamment proche de 0 et $2/a$, donne une racine ; la stricte monotonie assure son unicité. On la note $r(a)$.

Sur $[2/a, +\infty[$, la fonction est continue, strictement décroissante, de valeur positive en $2/a$ et de limite $-\infty$ à l'infini. Le même raisonnement donne une unique racine $s(a)$ sur cet intervalle.

Les deux racines sont distinctes et vérifient :

$$0 < r(a) < \frac{2}{a} < s(a).$$

2. (c) Nombre de solutions de F_a

Les variations de h_a et le signe de son maximum donnent :

- Si $0 < a < 4/e^2$, il existe exactement deux solutions $r(a)$ et $s(a)$.
- Si $a = 4/e^2$, le maximum est nul et atteint uniquement en $2/a$; l'unique solution est $x = 2/a = e^2/2$.
- Si $a > 4/e^2$, le maximum est strictement négatif; il n'existe aucune solution.

3. Comparaison de f_a et f_b

On suppose $0 < a < b$ et $x > 0$. Alors $-bx < -ax < 0$. L'exponentielle étant strictement croissante :

$$0 < e^{-bx} < e^{-ax} < 1.$$

En changeant les signes, puis en ajoutant $1/x$, on obtient :

$$\frac{1}{x} - 1 < \frac{1}{x} - e^{-ax} < \frac{1}{x} - e^{-bx} < \frac{1}{x}.$$

Ainsi $1/x - 1 < f_a(x) < f_b(x) < 1/x$, comme demandé.

4. (a) Limite en 0^+

Pour $x > 0$, $0 < e^{-ax} < 1$. Donc $f_a(x) > 1/x - 1$.

Or $1/x - 1 \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Par comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_a(x) = +\infty.$$

La droite $x = 0$ est une asymptote verticale de la courbe.

4. (b) Limite à l'infini

Puisque $a > 0$, $e^{-ax} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, et $1/x \rightarrow 0$. Par différence de deux fonctions de limite nulle :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = 0.$$

Pour préciser le côté d'approche, les croissances comparées donnent $xe^{-ax} \rightarrow 0$. Ainsi :

$$f_a(x) = \frac{1}{x} (1 - xe^{-ax}) \sim \frac{1}{x}.$$

La fonction est donc strictement positive pour x assez grand et tend vers 0 par valeurs positives. L'axe des abscisses est une asymptote horizontale.

5. (a) Comparaison des signes

Méthode 1 — La comparaison par le logarithme

Les nombres $1/x$ et e^{-ax} sont strictement positifs. Le logarithme étant strictement croissant, leur différence a le même signe que la différence de leurs logarithmes :

$$\ln(1/x) - \ln(e^{-ax}) = -\ln x + ax = x(a - g(x)).$$

Comme $x > 0$, le signe est celui de $a - g(x)$. Cette comparaison vaut aussi pour l'égalité : $f_a(x) = 0$ si et seulement si $a = g(x)$.

Méthode 2 — Une factorisation avec l'exponentielle

On réécrit :

$$f_a(x) = e^{-ax} \left(\frac{e^{ax}}{x} - 1 \right) = e^{-ax} (e^{ax - \ln x} - 1) = e^{-ax} (e^{x(a - g(x))} - 1).$$

Le facteur e^{-ax} est strictement positif. Pour tout réel t , $e^t - 1$ a le même signe que t , par stricte croissance de l'exponentielle et parce que $e^0 = 1$.

On retrouve donc que $f_a(x)$ et $a - g(x)$ ont exactement le même signe.

5. (b) Signe de f_a

Si $0 < a < 1/e$, les variations de g montrent que $g(x) < a$ pour $x \in]0, u(a)[\cup]v(a), +\infty[$ et que $g(x) > a$ pour $u(a) < x < v(a)$. On en déduit :

x	$]0, u(a)[$	$u(a)$	$]u(a), v(a)[$	$v(a)$	$]v(a), +\infty[$
Signe de $f_a(x)$	+	0	−	0	+

Si $a = 1/e$, $a - g(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, avec égalité uniquement en e . Donc $f_a(e) = 0$ et $f_a(x) > 0$ pour $x \neq e$.

Si $a > 1/e$, $a - g(x) > 0$ pour tout $x > 0$, donc f_a est strictement positive sur tout son domaine.

6. (a) Signe de la dérivée

La fonction f_a est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$f'_a(x) = -\frac{1}{x^2} + ae^{-ax} = \frac{ax^2e^{-ax} - 1}{x^2}.$$

Or :

$$ax^2e^{-ax} = e^{\ln a + 2\ln x - ax} = e^{h_a(x)}.$$

Ainsi :

$$f'_a(x) = \frac{e^{h_a(x)} - 1}{x^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif et $e^t - 1$ a le même signe que t . Par conséquent, $f'_a(x)$ et $h_a(x)$ ont exactement le même signe.

6. (b) Tableau de variations de f_a

Si $a > 4/e^2$, le maximum de h_a est négatif. Donc $f'_a(x) < 0$ pour tout $x > 0$. La fonction f_a est strictement décroissante de $+\infty$ vers 0.

Si $a = 4/e^2$, $h_a(x) \leq 0$ et ne s'annule qu'en $2/a$. La dérivée f'_a est négative partout sauf en ce point isolé, où elle est nulle. La fonction est strictement décroissante sur chacun des intervalles de part et d'autre de $2/a$, et donc strictement décroissante sur tout $]0, +\infty[$. Le point stationnaire n'est pas un extremum.

Pour tout $a \geq 4/e^2$:

x	0^+		$+\infty$
Variation de f_a	$+\infty$	Décroissante	0

Si $0 < a < 4/e^2$, les variations de h_a et ses deux racines donnent $h_a < 0$ sur $]0, r(a)[$, $h_a > 0$ sur $]r(a), s(a)[$ et $h_a < 0$ sur $]s(a), +\infty[$.

x	0^+	$r(a)$	$s(a)$	$+\infty$
Valeurs ou limites	$+\infty$	$f_a(r(a))$	$f_a(s(a))$	0
Sens de variation	Décroissante vers $r(a)$	Croissante vers $s(a)$	Décroissante après $s(a)$	

La fonction possède un minimum local strict en $r(a)$ et un maximum local strict en $s(a)$. Comme demandé, on ne calcule pas ici leurs valeurs.

7. (a) Ordre des zéros et des points stationnaires ; minimum

On suppose $0 < a < 1/e$. On a aussi $a < 4/e^2$, puisque $e < 4$. Les quatre nombres $u(a), v(a), r(a), s(a)$ sont donc bien définis. Pour alléger les notations, on écrit u, v, r, s dans cette question.

Méthode 1 — Les valeurs de h_a aux zéros de f_a

Comme $g(u) = a$, $\ln u = au$. De même, $\ln v = av$. Ainsi :

$$h_a(u) = 2 \ln u + \ln a - au = \ln u + \ln a = \ln(au),$$

$$h_a(v) = \ln(av).$$

Or $1 < u < e$, donc $0 < \ln u < 1$ et $0 < au < 1$. Par conséquent $h_a(u) < 0$.

De même, $v > e$ implique $av = \ln v > 1$, donc $h_a(v) > 0$.

Le signe de h_a montre alors que $r < v < s$. Puisque $u < v < s$ et $h_a(u) < 0$, le point u ne peut appartenir ni à $]r, s[$ ni à $[s, +\infty[$. Il est donc situé avant r .

On obtient :

$$u < r < v < s.$$

En particulier, $f_a(r) < 0$. Sur $]0, r]$, f_a est décroissante ; sur $[r, s]$, elle est croissante. Sur $[s, +\infty[$, elle est strictement positive, car $s > v$. Tous les points de ce dernier intervalle ont donc une valeur supérieure à $f_a(r)$.

Ainsi $r(a)$ est l'unique point de minimum global de f_a sur $]0, +\infty[$.

Méthode 2 — Le signe de f_a et le théorème de Rolle

La fonction f_a est continue sur $[u, v]$, dérivable sur $]u, v[$ et vérifie $f_a(u) = f_a(v) = 0$. Le théorème de Rolle fournit un point $t \in]u, v[$ tel que $f'_a(t) = 0$. D'après la question 6, ce point est r ou s .

Le point s ne peut appartenir à $]u, v[$. En effet, si $u < s < v$, alors $f_a(s) < 0$ d'après la question 5, et f_a est décroissante sur $[s, +\infty[$. Pour tout $x > s$, on aurait donc $f_a(x) \leq f_a(s) < 0$, ce qui contredirait sa limite 0 à l'infini.

Le point fourni par Rolle est donc r , et $u < r < v$.

Comme $h_a(v) = \ln(av) > 0$, on a $f'_a(v) > 0$. La dérivée est positive uniquement entre r et s , donc $v < s$. On retrouve $u < r < v < s$.

Enfin, $f_a(r) < 0$ et le tableau de variations, complété par la positivité après v , montre que r est l'unique minimum global.

7. (b) Allure du graphe

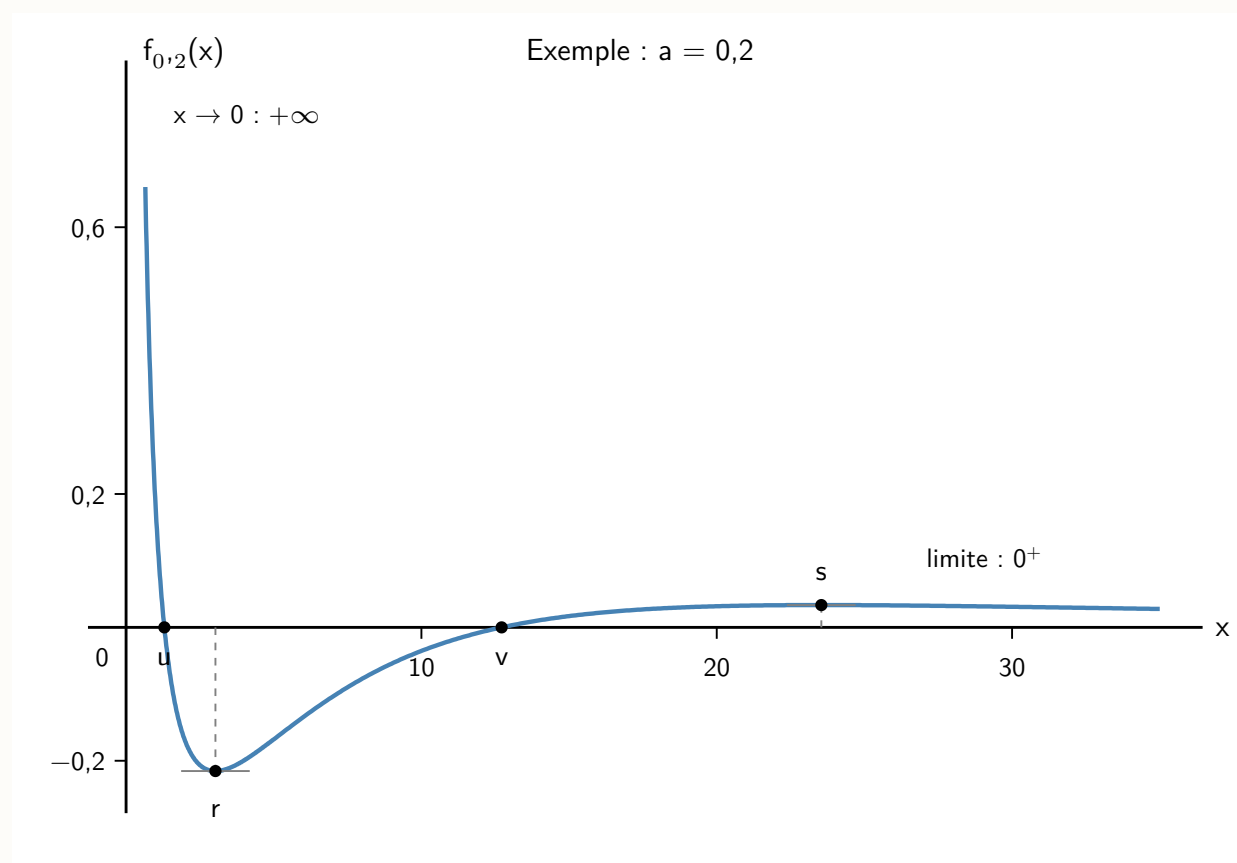
Pour $0 < a < 1/e$, la courbe possède une asymptote verticale $x = 0$ et une asymptote

horizontale $y = 0$ à l'infini. Elle part de $+\infty$, décroît, coupe l'axe en $u(a)$, puis atteint son minimum négatif en $r(a)$.

Elle remonte ensuite, coupe l'axe en $v(a)$, atteint son maximum local positif en $s(a)$, puis décroît vers 0 par valeurs positives. Les tangentes sont horizontales en $r(a)$ et $s(a)$.

Le dessin suivant illustre cette allure pour $a = 1/5$, qui appartient à $]0, 1/e[$. Les points de la courbe sont calculés à partir de $f_{1/5}(x) = 1/x - e^{-x/5}$. Les positions indiquées des quatre points remarquables sont des approximations numériques :

$$u \simeq 1,296, \quad r \simeq 3,026, \quad v \simeq 12,713, \quad s \simeq 23,540.$$



La courbe est représentée sur une portion finie du domaine ; le comportement près de 0 et à l'infini est celui décrit ci-dessus. Les valeurs particulières de cette illustration ne sont pas utilisées pour les démonstrations générales.

8. (a) Relation satisfaite par $r(a)$

Par définition, $h_a(r(a)) = 0$, soit :

$$2 \ln r(a) + \ln a - ar(a) = 0.$$

En exponentiant :

$$a r(a)^2 = e^{ar(a)}.$$

Puisque $a > 0$ et $r(a) > 0$, on peut prendre les racines carrées positives des deux membres :

$$\sqrt{a} r(a) = e^{ar(a)/2}.$$

On obtient bien $r(a) = e^{ar(a)/2} / \sqrt{a}$.

8. (b) Limite de $\sqrt{a} r(a)$

Il faut d'abord établir $ar(a) \rightarrow 0$; on ne peut pas le déduire directement de $a \rightarrow 0$, car $r(a)$ dépend de a .

La question 2 donne $0 < r(a) < 2/a$, donc $0 < ar(a) < 2$. La relation précédente implique :

$$1 < \sqrt{a} r(a) = e^{ar(a)/2} < e.$$

En multipliant l'encadrement supérieur par $\sqrt{a}$:

$$0 < ar(a) < e\sqrt{a}.$$

Les deux bornes tendent vers 0 lorsque $a \rightarrow 0^+$. Donc $ar(a) \rightarrow 0$.

Par continuité de l'exponentielle :

$$\sqrt{a} r(a) = e^{ar(a)/2} \rightarrow 1.$$

En particulier, $r(a) \sim 1/\sqrt{a}$ et $r(a) \rightarrow +\infty$.

8. (c) Limite de $m(a)$

On a :

$$m(a) = \frac{1}{r(a)} - e^{-ar(a)}.$$

La question précédente donne $r(a) \rightarrow +\infty$ et $ar(a) \rightarrow 0$. Donc $1/r(a) \rightarrow 0$ et $e^{-ar(a)} \rightarrow 1$.

Ainsi :

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} m(a) = -1.$$

8. (d) Équivalent de $m(a) + 1$

On sépare deux termes positifs :

$$m(a) + 1 = \frac{1}{r(a)} + 1 - e^{-ar(a)}.$$

Comme $\sqrt{a} r(a) \rightarrow 1$:

$$\frac{1/r(a)}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} r(a)} \rightarrow 1.$$

Pour le second terme, le développement limité usuel $e^{-t} = 1 - t + o(t)$ lorsque $t \rightarrow 0$ donne $(1 - e^{-t})/t \rightarrow 1$. On applique ce résultat à $t = ar(a) > 0$, qui tend vers 0 :

$$\frac{1 - e^{-ar(a)}}{\sqrt{a}} = \frac{1 - e^{-ar(a)}}{ar(a)} \sqrt{a} r(a) \rightarrow 1.$$

En additionnant ces deux limites de quotients, et non des équivalents sans justification :

$$\frac{m(a) + 1}{\sqrt{a}} \rightarrow 2.$$

On conclut :

$$m(a) + 1 \sim 2\sqrt{a} \quad (a \rightarrow 0^+).$$

Partie 2. Étude d'un test

1. (a) Nombre total de tests

La seconde méthode effectue d'abord un test de mélange pour chacun des n groupes, soit n tests.

Chaque groupe positif nécessite ensuite ℓ tests individuels. Comme il y a X groupes positifs, ces tests supplémentaires sont au nombre de ℓX .

Ainsi :

$$T = n + \ell X.$$

Cette formule comprend aussi le cas $\ell = 1$: conformément au protocole, un groupe positif conduit alors à un test supplémentaire du prélèvement individuel.

1. (b) Probabilité d'un test de groupe négatif

Le test du mélange H_i est négatif si et seulement si aucun des ℓ individus du groupe G_i n'est porteur du parasite.

Chaque individu est non porteur avec probabilité $1 - p$ et les états des individus sont indépendants. La probabilité du groupe négatif est donc :

$$P(H_i \text{ négatif}) = (1 - p)^\ell.$$

Par complémentarité, la probabilité d'un groupe positif est $1 - (1 - p)^\ell$.

1. (c) Loi et espérance de X

Pour chaque i , soit I_i la variable indicatrice de l'événement «le test de H_i est positif». Elle suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$\theta = 1 - (1 - p)^\ell \in]0, 1[.$$

Chaque I_i dépend uniquement des états des individus du groupe G_i . Les groupes sont disjoints et les états individuels sont mutuellement indépendants. Le lemme des coalitions assure donc l'indépendance mutuelle de $I_1, \dots, I_n$.

Comme $X = I_1 + \dots + I_n$, on obtient :

$$X \sim \mathcal{B}(n, 1 - (1 - p)^\ell).$$

Pour $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} (1 - (1 - p)^\ell)^k ((1 - p)^\ell)^{n-k}.$$

La variable X est bornée entre 0 et n , donc possède une espérance. Celle de la loi binomiale, ou la linéarité appliquée aux indicatrices, donne :

$$E(X) = n(1 - (1 - p)^\ell).$$

On pose désormais $a = -\ln(1 - p) > 0$, de sorte que $(1 - p)^\ell = e^{-a\ell}$.

1. (d) Espérance du nombre de tests

La variable $T = n + \ell X$ est bornée entre n et $n + n\ell$, donc son espérance existe.

Par linéarité :

$$E(T) = n + \ell E(X) = n + n\ell(1 - (1 - p)^\ell).$$

Puisque $N = n\ell$, on a $n = N/\ell$ et :

$$E(T) = N \left(\frac{1}{\ell} + 1 - e^{-a\ell} \right) = N(1 + f_a(\ell)).$$

Le coût moyen par individu vaut donc $E(T)/N = 1 + f_a(\ell)$.

Dans l'optimisation demandée ensuite, on compare ce coût pour les tailles de groupe entières positives, sous l'hypothèse du sujet que N est un multiple de la taille utilisée. La propriété (MIN) est bien définie sur tous les entiers positifs ; une optimisation restreinte aux diviseurs d'un effectif fixé serait un problème différent.

2. (a) Comparaison des méthodes pour des groupes de trois

On suppose désormais $0 < p < 1 - 3^{-1/3}$. Posons $q = 1 - p$. Alors $q > 3^{-1/3} > 0$, donc $q^3 > 1/3$.

Ainsi :

$$f_a(3) = \frac{1}{3} - e^{-3a} = \frac{1}{3} - q^3 < 0.$$

La première méthode effectue exactement N tests. Pour la seconde avec $\ell = 3$, sous l'hypothèse $3 \mid N$:

$$E(T) = N(1 + f_a(3)) < N.$$

La méthode par groupes de trois nécessite donc strictement moins de tests en moyenne que la méthode individuelle. Il s'agit d'une comparaison d'espérances, et non d'une inégalité valable pour toutes les réalisations.

2. (b) Encadrement de a

Comme $q > 3^{-1/3}$ et que le logarithme est strictement croissant :

$$a = -\ln q < \frac{\ln 3}{3} = g(3).$$

La question 1 de la partie 1 montre que g possède le maximum strict $1/e$, atteint uniquement en e . Puisque $3 \neq e$:

$$g(3) < \frac{1}{e}.$$

On a donc $0 < a < 1/e$. Les résultats des questions 7 et 8 de la partie 1 sont applicables.

3. (a) Existence d'un minimum sur les entiers et candidats

Notons $u = u(a)$, $v = v(a)$ et $r = r(a)$. Les résultats de la partie 1 donnent $u < r < v < s(a)$ et :

$$f_a(x) < 0 \iff u < x < v.$$

L'ensemble des entiers positifs situés dans $]u, v[$ est fini. Il est non vide, puisque $f_a(3) < 0$ implique $3 \in]u, v[$.

La fonction f_a atteint donc un minimum sur cet ensemble fini, et ce minimum est négatif. Tous les autres entiers positifs ont une image positive ou nulle. Le minimum obtenu est ainsi également un minimum sur $\mathbb{N}^*$.

Posons $k = \lfloor r \rfloor$. Comme $r > u > 1$, on a $k \geq 1$. Soit ℓ un entier réalisant le minimum ; alors $u < \ell < v$.

Si $\ell < k$, on a $\ell + 1 \leq k \leq r$. La fonction étant strictement décroissante sur $]0, r]$:

$$f_a(\ell + 1) < f_a(\ell),$$

ce qui contredit l'optimalité de ℓ .

Si $\ell > k + 1$, on a $r < k + 1 \leq \ell - 1 < \ell < v < s(a)$. La fonction étant strictement croissante sur $[r, s(a)]$:

$$f_a(\ell - 1) < f_a(\ell),$$

ce qui fournit également une contradiction.

Tout minimiseur entier appartient donc à :

$$\{\lfloor r(a) \rfloor, \lfloor r(a) \rfloor + 1\}.$$

Si $r(a)$ est entier, il est l'unique minimiseur, car il est déjà l'unique minimum global sur les réels. Sinon, il faut comparer les deux valeurs : l'arrondi au plus proche de $r(a)$ ne suffit pas à décider.

Il peut y avoir égalité entre les deux valeurs. La définition de ℓ_0 impose alors de retenir le plus petit des deux entiers.

3. (b) Négativité du minimum et exclusion de 1

Par définition de ℓ_0 , et puisque 3 est une taille de groupe admissible dans (MIN) :

$$f_a(\ell_0) \leq f_a(3) < 0.$$

Or :

$$f_a(1) = 1 - e^{-a} = 1 - (1 - p) = p > 0.$$

Donc $\ell_0 \neq 1$. Comme $\ell_0 \in \mathbb{N}^*$, on conclut $\ell_0 \geq 2$.

3. (c) Exclusion de la taille 2

On calcule, avec $q = 1 - p$:

$$f_a(3) - f_a(2) = \frac{1}{3} - q^3 - \left(\frac{1}{2} - q^2 \right) = -\frac{1}{6} + p(1 - p)^2.$$

Pour majorer le dernier terme, considérons $w(t) = t(1 - t)^2$ sur $[0, 1]$. C'est une fonction polynomiale, et :

$$w'(t) = (1 - t)(1 - 3t).$$

Elle est croissante sur $[0, 1/3]$ et décroissante sur $[1/3, 1]$. Son maximum est :

$$w\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27} < \frac{1}{6}.$$

Par conséquent :

$$f_a(3) - f_a(2) \leq -\frac{1}{6} + \frac{4}{27} = -\frac{1}{54} < 0.$$

Donc $f_a(3) < f_a(2)$. La taille 2 ne peut pas minimiser f_a sur les entiers. Avec la question précédente :

$$\ell_0 \geq 3.$$

La comparaison $f_a(3) < f_a(2)$ est même valable pour tout $p \in]0, 1[$.

4. Algorithme de détermination de ℓ_0

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

On cherche le premier entier pour lequel la suite des valeurs $f_a(1), f_a(2), \dots$ cesse de décroître. Les résultats de la question 3 justifient cette recherche : avant $\lfloor r(a) \rfloor$, la décroissance est stricte ; il suffit ensuite de comparer les deux candidats.

Si le plus petit candidat est meilleur ou si les deux valeurs sont égales, on s'arrête au premier. Si le second est meilleur, on avance d'un cran ; la valeur suivante est strictement plus grande. En effet, le minimum entier est négatif, et tout entier situé après ce second candidat est soit encore dans l'intervalle de croissance $]r(a), v(a)[$, soit dans une région où f_a est positive ou nulle. La décroissance finale de f_a vers 0 ne remet donc pas en cause le premier minimum entier négatif.

Il est commode d'utiliser directement la différence :

$$f_a(\ell + 1) - f_a(\ell) = -\frac{1}{\ell(\ell + 1)} + p(1 - p)^\ell.$$

La différence est négative exactement lorsque $p(1 - p)^\ell < 1/(\ell(\ell + 1))$. Cela évite de soustraire deux valeurs proches de f_a .

Python

```
def taille_optimale(p):
    q = 1 - p
    ell = 1
    while p * q ** ell < 1 / (ell * (ell + 1)):
        ell = ell + 1
    return ell
```

L'entrée doit satisfaire $0 < p < 1 - 3^{-1/3}$. La boucle augmente la taille tant que la suivante diminue strictement l'espérance de tests. L'inégalité stricte permet de retenir le plus petit minimiseur en cas d'égalité.

La boucle termine, puisque le minimum entier appartient à l'ensemble fini des deux candidats de la question 3. Le code renvoie ℓ_0 . Il a été exécuté pour l'exemple de l'énoncé et sur plusieurs autres valeurs de p ; ses sorties ont été comparées à une recherche directe parmi les tailles candidates.

La preuve de l'algorithme concerne les comparaisons exactes. L'exécution Python utilise des nombres flottants; une entrée extrêmement proche d'un cas d'égalité peut nécessiter une précision numérique supérieure pour départager les deux candidats.

5. (a) Taille optimale lorsque $p = 0,01$

Ici $q = 99/100$ et $a = -\ln(99/100)$. On commence par localiser $r(a)$ pour limiter la comparaison aux deux candidats.

Le logarithme s'exprime par une intégrale sur un segment :

$$a = \int_{99/100}^1 \frac{dt}{t}.$$

L'intégrande est strictement compris entre 1 et 100/99 à l'intérieur du segment. Donc :

$$\frac{1}{100} < a < \frac{1}{99}.$$

En particulier, $2/a > 198 > 11$. La fonction h_a est donc strictement croissante sur $[10, 11]$.

En utilisant $e^{h_a(x)} = ax^2q^x$, on obtient :

$$e^{h_a(10)} = 100aq^{10} < \frac{100}{99}q^{10} = q^9 < 1.$$

Ainsi $h_a(10) < 0$.

Pour le second point, on utilise $(1-t)^j \geq 1-jt$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $j \geq 1$. Cette inégalité se démontre par récurrence : elle est vraie pour $j = 1$ et, en multipliant par $1-t \geq 0$, le rang suivant découle de $(1-jt)(1-t) = 1-(j+1)t + jt^2 \geq 1-(j+1)t$.

Avec $t = 1/100$ et $j = 11$, $q^{11} \geq 89/100$. Donc :

$$e^{h_a(11)} = 121aq^{11} > \frac{121}{100} \times \frac{89}{100} = \frac{10769}{10000} > 1.$$

Ainsi $h_a(11) > 0$. L'unique racine sur la branche croissante vérifie :

$$10 < r(a) < 11.$$

Les seules tailles candidates sont donc 10 et 11. Comparons exactement leurs valeurs :

$$f_a(11) - f_a(10) = -\frac{1}{110} + \frac{1}{100} \left(\frac{99}{100} \right)^{10}.$$

Le signe est négatif, car :

$$110 \times 99^{10} = 9948202825096849390110 < 100^{11} = 100000000000000000000.$$

L'unique minimum entier est donc atteint en :

$$\ell_0 = 11.$$

L'algorithme Python renvoie également 11. La comparaison rationnelle ci-dessus établit le résultat sans dépendre d'un arrondi numérique.

5. (b) Rapport moyen de tests par individu

Avec $\ell_0 = 11$:

$$\frac{E(T)}{N} = 1 + f_a(11) = 1 + \frac{1}{11} - \left(\frac{99}{100}\right)^{11}.$$

Numériquement :

$$\frac{E(T)}{N} \simeq 0,1955708367.$$

Le nombre moyen de tests représente donc environ 19,56 % du nombre de tests de la méthode individuelle, soit une réduction moyenne d'environ 80,44 %.

Ces valeurs supposent, conformément au protocole, que N est un multiple de 11.

6. (a) Équivalent de ℓ_0

On rappelle que $a = -\ln(1 - p)$. Le développement limité usuel du logarithme au voisinage de 0 donne :

$$-\ln(1 - p) = p + o(p), \quad \frac{a}{p} \rightarrow 1.$$

La question 8. (b) de la partie 1 donne $\sqrt{a} r(a) \rightarrow 1$. Puisque $a \rightarrow 0$ lorsque $p \rightarrow 0$, on a $r(a) \rightarrow +\infty$.

Par la question 3. (a), ℓ_0 est égal à $\lfloor r(a) \rfloor$ ou à $\lfloor r(a) \rfloor + 1$. Par conséquent :

$$|\ell_0 - r(a)| \leq 1.$$

En divisant par $r(a) > 0$:

$$\left| \frac{\ell_0}{r(a)} - 1 \right| \leq \frac{1}{r(a)} \rightarrow 0.$$

Ainsi $\ell_0/r(a) \rightarrow 1$. On combine les limites de facteurs :

$$\ell_0 \sqrt{p} = \frac{\ell_0}{r(a)} \sqrt{a} r(a) \sqrt{\frac{p}{a}} \rightarrow 1.$$

On conclut :

$$\ell_0 \sim \frac{1}{\sqrt{p}} \quad (p \rightarrow 0^+).$$

Le fait que ℓ_0 soit entier ne change pas cet équivalent, car l'écart avec $r(a)$ reste borné.

6. (b) Équivalent de $\rho(p)$

Méthode 1 — La formule exacte au minimum entier

On part de l'expression :

$$\rho(p) = \frac{1}{\ell_0} + 1 - e^{-a\ell_0}.$$

La question précédente donne $\ell_0\sqrt{p} \rightarrow 1$. Donc :

$$\frac{1/\ell_0}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\ell_0\sqrt{p}} \rightarrow 1.$$

D'autre part :

$$\frac{a\ell_0}{\sqrt{p}} = \frac{a}{p} \ell_0\sqrt{p} \rightarrow 1,$$

ce qui implique aussi $a\ell_0 \rightarrow 0$.

On utilise la limite $(1 - e^{-t})/t \rightarrow 1$ en 0, avec $t = a\ell_0 > 0$:

$$\frac{1 - e^{-a\ell_0}}{\sqrt{p}} = \frac{1 - e^{-a\ell_0}}{a\ell_0} \frac{a\ell_0}{\sqrt{p}} \rightarrow 1.$$

La somme des deux quotients tend vers 2. Ainsi :

$$\rho(p) \sim 2\sqrt{p} \quad (p \rightarrow 0^+).$$

Méthode 2 — Comparaison au minimum sur les réels

Le minimum global réel vaut $m(a)$ et le minimum entier vaut $f_a(\ell_0)$, donc :

$$1 + m(a) \leq \rho(p).$$

Choisissons $k = \lfloor r(a) \rfloor \geq 1$. Comme ℓ_0 minimise sur les entiers :

$$\rho(p) \leq 1 + f_a(k).$$

La dérivée de f_a vérifie, pour $x > 0$:

$$|f'_a(x)| = \left| -\frac{1}{x^2} + ae^{-ax} \right| \leq \frac{1}{x^2} + a.$$

Sur le segment $[k, r(a)]$, on a $x \geq k$ et $r(a) - k < 1$. L'inégalité des accroissements finis donne :

$$|f_a(k) - f_a(r(a))| \leq \left(\frac{1}{k^2} + a \right) (r(a) - k) \leq \frac{1}{k^2} + a.$$

Si $r(a)$ est entier, cette différence est nulle, et l'encadrement reste valable. Puisque $r(a) \sim 1/\sqrt{a}$ et $k/r(a) \rightarrow 1$, on a $k\sqrt{a} \rightarrow 1$. Par conséquent :

$$\frac{1/k^2 + a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a} \left(\frac{1}{ak^2} + 1 \right) \rightarrow 0.$$

On obtient :

$$0 \leq \rho(p) - (1 + m(a)) \leq \frac{1}{k^2} + a = o(\sqrt{a}).$$

La partie 1 donne $1 + m(a) \sim 2\sqrt{a}$. En divisant l'encadrement par $\sqrt{a}$, il vient $\rho(p)/\sqrt{a} \rightarrow 2$. Enfin $a/p \rightarrow 1$ donne $\rho(p)/\sqrt{p} \rightarrow 2$.

Cette méthode explique pourquoi la contrainte d'une taille entière ne modifie pas le premier terme du coût optimal lorsque p est petit.

6. (c) Comparaison avec l'exemple numérique

Pour $p = 0,01$, l'équivalent de la question précédente donne :

$$2\sqrt{p} = 2\sqrt{0,01} = 0,20.$$

La valeur exacte calculée à la question 5. (b) est environ 0,19557. L'écart absolu est d'environ 0,00443, soit un écart relatif d'environ 2,3 % par rapport à la valeur exacte.

Le résultat numérique est donc cohérent avec l'approximation asymptotique. Celle-ci décrit une limite lorsque $p \rightarrow 0$ et ne fournit pas une égalité exacte pour $p = 0,01$.

Relevé des adaptations

- Partie 2, 4 : code adapté en Python ; le langage historique est remplacé par une boucle qui compare les différences successives et retient le plus petit minimiseur en cas d'égalité. Toutes les questions mathématiques sont conservées.