



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1994

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé — HEC, Mathématiques I, 1994

Partie I

1. La somme géométrique finie donne, pour tout réel $t \neq 1$:

$$(1-t) \sum_{i=0}^{p+1} t^i = 1 - t^{p+2}.$$

En divisant par $1-t$ puis en isolant $1/(1-t)$, on obtient :

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{i=0}^{p+1} t^i + \frac{t^{p+2}}{1-t}.$$

Fixons $k \geq 2$. Toutes les fonctions sont continues sur $[0, 1/k]$, puisque $1/k \leq 1/2 < 1$. On peut intégrer l'identité terme à terme, la somme étant finie :

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{i=0}^{p+1} \frac{1}{(i+1)k^{i+1}} + \int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t} dt.$$

En renommant l'indice de la somme, c'est la première formule demandée.

Pour $0 \leq t \leq 1/k \leq 1/2$, on a $0 \leq 1/(1-t) \leq 2$. Donc :

$$0 \leq \int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t} dt \leq 2 \int_0^{1/k} t^{p+2} dt = \frac{2}{(p+3)k^{p+3}}.$$

En posant $a(k) = k^{p+3} \int_0^{1/k} t^{p+2}/(1-t) dt$, on obtient :

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{i=1}^{p+2} \frac{1}{ik^i} + \frac{a(k)}{k^{p+3}}, \quad 0 \leq a(k) \leq \frac{2}{p+3}.$$

Le raisonnement s'applique également à $p = 0$.

2. Puisque $p \geq 0$, l'exposant $p + 2$ est strictement supérieur à 1. La série de Riemann

$$\sum_{k \geq 2} 1/k^{p+2}$$

converge. La domination $|z_k| \leq M/k^{p+2}$ assure donc la convergence absolue, puis la convergence, de

$$\sum z_k.$$

Si $M = 0$, tous les termes sont nuls et les mêmes conclusions restent vraies.

La fonction $t \mapsto t^{-p-2}$ est positive et décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour chaque entier $i \geq n + 1$, on a $t^{-p-2} \geq i^{-p-2}$ sur $[i - 1, i]$. Ainsi :

$$\frac{1}{i^{p+2}} \leq \int_{i-1}^i \frac{dt}{t^{p+2}}.$$

En additionnant de $i = n + 1$ à m et en utilisant Chasles :

$$\sum_{i=n+1}^m \frac{1}{i^{p+2}} \leq \int_n^m \frac{dt}{t^{p+2}} = \frac{1}{p+1} \left(\frac{1}{n^{p+1}} - \frac{1}{m^{p+1}} \right) \leq \frac{1}{(p+1)n^{p+1}}.$$

Pour les sommes partielles de la série de z_k , l'inégalité triangulaire donne :

$$\left| \sum_{k=n+1}^m z_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |z_k| \leq \frac{M}{(p+1)n^{p+1}}.$$

La série étant convergente, on peut faire tendre m vers $+\infty$; la continuité de la valeur

absolue fournit :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k \right| \leq \frac{M}{(p+1)n^{p+1}}.$$

On obtient donc à la fois la convergence et la majoration quantitative du reste.

Partie II : une première approximation de $\ln(n!)$

1. Expression de $\ln(n!)$ à l'aide d'une suite.

1. a) En sommant la définition de v_k , pour $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=2}^n v_k = \sum_{k=2}^n \ln k - \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln t \, dt = \ln(n!) - \int_1^n \ln t \, dt.$$

On a utilisé la propriété du logarithme d'un produit et la relation de Chasles pour une somme finie d'intégrales. Cela donne bien :

$$\ln(n!) = \sum_{k=2}^n v_k + \int_1^n \ln t \, dt.$$

La fonction $t \ln t - t$ est une primitive de $\ln t$ sur $]0, +\infty[$. Par conséquent :

$$\int_1^n \ln t \, dt = [t \ln t - t]_1^n = n \ln n - n + 1.$$

1. b) Le changement de variable affine $u = k - t$, avec $dt = -du$, transforme les bornes $k-1$ et k en 1 et 0. Il donne :

$$\int_{k-1}^k \ln t \, dt = \int_0^1 \ln(k-u) \, du.$$

Comme l'intervalle $[0, 1]$ a longueur 1, on en déduit :

$$v_k = \int_0^1 (\ln k - \ln(k - u)) \, du.$$

Méthode 1 — Intégration par parties centrée

Posons $F(u) = \ln k - \ln(k - u)$. Pour $k \geq 2$, cette fonction est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et $F'(u) = 1/(k - u)$. Une primitive de 1 est $u - 1/2$. L'intégration par parties sur ce segment donne :

$$v_k = [(u - 1/2)F(u)]_0^1 - \int_0^1 \frac{u - 1/2}{k - u} \, du.$$

Comme $F(0) = 0$ et $F(1) = \ln k - \ln(k - 1)$, on obtient :

$$v_k = \frac{1}{2}(\ln k - \ln(k - 1)) - w_k.$$

Méthode 2 — Calcul explicite des deux membres

Notons $L = \ln k - \ln(k - 1)$. Le calcul de la primitive de $\ln t$ donne :

$$v_k = \ln k - (k \ln k - (k - 1) \ln(k - 1) - 1) = 1 - (k - 1)L.$$

D'autre part, $u - 1/2 = (k - 1/2) - (k - u)$, d'où :

$$w_k = \left(k - \frac{1}{2}\right) \int_0^1 \frac{du}{k - u} - 1 = \left(k - \frac{1}{2}\right) L - 1.$$

Par conséquent, $L/2 - w_k = 1 - (k - 1)L = v_k$, ce qui redonne la relation demandée.

La première méthode explique le choix du terme $u - 1/2$; la seconde fournit aussi une expression explicite de w_k .

1. c) La question précédente et le télescopage des logarithmes donnent :

$$\sum_{k=2}^n v_k = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n (\ln k - \ln(k-1)) - \sum_{k=2}^n w_k = \frac{1}{2} \ln n - \sum_{k=2}^n w_k.$$

En remplaçant dans II. 1. a), on obtient, pour $n \geq 2$:

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + 1 - \sum_{k=2}^n w_k.$$

2. On intègre par parties sur $[0, 1]$, où $k - u \geq 1$. Posons $G(u) = (u^2 - u)/2$, de sorte que $G'(u) = u - 1/2$ et $G(0) = G(1) = 0$. La dérivée de $1/(k - u)$ est $1/(k - u)^2$. Ainsi :

$$w_k = \left[\frac{G(u)}{k - u} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{G(u)}{(k - u)^2} du = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u - u^2}{(k - u)^2} du.$$

Pour $0 \leq u \leq 1$, $u - u^2 = u(1 - u) \geq 0$ et $(k - u)^2 \geq (k - 1)^2$. Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq w_k \leq \frac{1}{2(k-1)^2} \int_0^1 (u - u^2) du = \frac{1}{2(k-1)^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{12(k-1)^2}.$$

La série

$$\sum_{k \geq 2} 1/(k-1)^2$$

est une série de Riemann convergente ; la comparaison assure donc la convergence de

$$\sum w_k.$$

Résultat admis dans l'énoncé :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} w_k = 1 - \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

Cette valeur est utilisée uniquement pour identifier la constante dans l'approximation de $\ln(n!)$. Elle n'est pas démontrée par une formule asymptotique extérieure au problème.

La suite ε_n , définie comme le reste de cette série convergente, est donc bien définie pour tout $n \geq 1$, positive ou nulle, et tend vers 0.

3. Pour $n \geq 2$, on écrit :

$$\sum_{k=2}^n w_k = \sum_{k=2}^{+\infty} w_k - \varepsilon_n = 1 - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \varepsilon_n.$$

La formule de II. 1. c) devient :

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \varepsilon_n.$$

Il reste à vérifier le cas $n = 1$, absent de la somme partielle initiale. On a $\ln(1!) = 0$ et

$$\varepsilon_1 = \sum_{k=2}^{+\infty} w_k = 1 - \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

Le membre de droite vaut donc $-1 + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \varepsilon_1 = 0$.

L'égalité (1) est ainsi valable pour tout $n \geq 1$.

4. Pour $n \geq 2$, la positivité de w_k et la majoration de II. 2 donnent :

$$0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{12} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)^2} = \frac{1}{12} \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{j^2}.$$

On applique I. 2 avec $p = 0$, $M = 1$ et le rang $n - 1 \geq 1$. On obtient

$$\sum_{j=n}^{+\infty} 1/j^2 \leq 1/(n-1),$$

donc :

$$0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{12(n-1)}.$$

Ce décalage d'indice explique le dénominateur $n - 1$ de la borne demandée.

Partie III : une approximation générale de $\ln(n!)$

1. Écrivons la formule (1) aux rangs k et $k - 1$ et soustrayons. Comme

$$\ln(k!) - \ln((k-1)!) = \ln k, \text{ il vient :}$$

$$\ln k = k \ln k - (k-1) \ln(k-1) - 1 + \frac{1}{2}(\ln k - \ln(k-1)) + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}.$$

En isolant la différence des restes :

$$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \left(k - \frac{1}{2}\right) (\ln k - \ln(k-1)) - 1 = -\left(k - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) - 1.$$

On retrouve aussi l'expression explicite de w_k obtenue en II. 1. b), conformément à

$$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = w_k.$$

Appliquons l'expansion exacte de I. 1 et multiplions-la par $k - 1/2$. Le terme constant vaut 1 et disparaît après soustraction. Le coefficient de $1/k$ vaut $1/2 - 1/2 = 0$. Pour $1 \leq i \leq p$, le coefficient de $1/k^{i+1}$ est :

$$\frac{1}{i+2} - \frac{1}{2(i+1)} = \frac{i}{2(i+1)(i+2)} = b_i.$$

Le terme restant de degré k^{-p-2} provient de la dernière contribution de la somme et du reste intégral. On peut donc définir :

$$d(k) = \left(1 - \frac{1}{2k}\right) a(k) - \frac{1}{2(p+2)}.$$

Comme $0 \leq a(k) \leq 2/(p+3)$ et $k \geq 2$:

$$-\frac{1}{2(p+2)} \leq d(k) \leq \frac{2}{p+3}.$$

Pour $p \geq 0$, la borne inférieure est au moins $-1/4$ et la borne supérieure au plus $2/3$; en particulier, $|d(k)| \leq 1$. On a donc bien :

$$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \sum_{i=1}^p \frac{b_i}{k^{i+1}} + \frac{d(k)}{k^{p+2}}.$$

Quand $p = 0$, la somme est vide et la formule reste valable.

2. Une première évaluation de ε_n .

2. a) Avec $u = 1/k$, l'identité géométrique finie à deux termes donne :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + \frac{u^2}{1-u}.$$

Ainsi $g(k) = 1/(1 - 1/k)$ convient. Pour $k \geq 2$, $1/2 \leq 1 - 1/k < 1$, donc $1 < g(k) \leq 2$. En particulier, les bornes demandées $0 \leq g(k) \leq 2$ sont satisfaites.

2. b) On calcule la différence du terme correctif :

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{1 - 1/k} - 1 \right) = \frac{1}{k^2} + \frac{g(k)}{k^3}.$$

Avec $p = 1$ et $b_1 = 1/12$, on obtient donc :

$$r_{k-1} - r_k = \frac{1/12 - c_1}{k^2} + \frac{d(k) - c_1 g(k)}{k^3}.$$

Choisissons $c_1 = 1/12$ pour annuler le terme d'ordre $1/k^2$. Alors :

$$|r_{k-1} - r_k| \leq \frac{|d(k)| + g(k)/12}{k^3} \leq \frac{1 + 2/12}{k^3} = \frac{7}{6k^3}.$$

Ce choix est nécessaire si l'on exige la borne pour tous les $k \geq 2$. En effet, cette borne imposerait $k^2(r_{k-1} - r_k) \rightarrow 0$. Dans l'expression précédente, le terme $(d(k) - c_1 g(k))/k$ tend vers 0 puisque d et g sont bornées ; la limite serait donc $1/12 - c_1$. Il faut ainsi $c_1 = 1/12$.

La série

$$\sum_{k \geq 2} (r_{k-1} - r_k)$$

converge absolument par comparaison avec

$$\sum k^{-3}.$$

I. 2, appliquée avec $p = 1$ et $M = 7/6$, donne :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k) \right| \leq \frac{7/6}{2n^2} = \frac{7}{12n^2}.$$

2. c) Comme $\varepsilon_m \rightarrow 0$ et $c_1/m \rightarrow 0$, on a $r_m \rightarrow 0$. Pour tout $m \geq n + 1$, le télescopage donne :

$$\sum_{k=n+1}^m (r_{k-1} - r_k) = r_n - r_m.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient la somme annoncée, égale à r_n . La borne de III.

2. b) donne $|r_n| \leq 7/(12n^2)$.

Puisque $\varepsilon_n = 1/(12n) + r_n$, on pose $\lambda_1(n) = n^2 r_n$. Alors $|\lambda_1(n)| \leq 7/12$ et la formule (1) devient, pour tout $n \geq 1$:

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + \frac{\lambda_1(n)}{n^2}.$$

3. Une seconde évaluation de ε_n .

3. a) La somme géométrique finie à trois termes donne, avec $u = 1/k$:

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \frac{u^3}{1-u}.$$

On peut donc prendre $g_1(k) = 1/(1 - 1/k)$, qui vérifie $0 \leq g_1(k) \leq 2$ pour $k \geq 2$.

Pour la seconde formule, utilisons III. 2. a) : $1/(1 - u) = 1 + u + g(k)u^2$. En élevant au carré :

$$\frac{1}{(1-u)^2} = 1 + 2u + (1 + 2g(k) + 2g(k)u + g(k)^2u^2)u^2.$$

On définit ainsi $g_2(k) = 1 + 2g(k) + 2g(k)/k + g(k)^2/k^2$. Tous les termes sont positifs ou nuls. Comme $g(k) \leq 2$ et $1/k \leq 1/2$:

$$0 \leq g_2(k) \leq 1 + 4 + 2 + 1 = 8.$$

Les deux expressions et leurs bornes sont donc établies avec la question indiquée.

3. b) Les deux formules de III. 3. a) donnent :

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{g_1(k)}{k^4},$$

$$\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2} = \frac{2}{k^3} + \frac{g_2(k)}{k^4}.$$

On soustrait les différences des deux termes correctifs à la formule (2) avec $p = 2$:

$$r_{k-1} - r_k = \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{12k^3} + \frac{d(k)}{k^4} - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{g_1(k)}{k^4} \right) - c_2 \left(\frac{2}{k^3} + \frac{g_2(k)}{k^4} \right).$$

Les deux premiers ordres se simplifient, d'où :

$$r_{k-1} - r_k = -\frac{2c_2}{k^3} + \frac{d(k) - g_1(k)/12 - c_2g_2(k)}{k^4}.$$

Avec $c_2 = 0$, il vient $|r_{k-1} - r_k| \leq (1 + 2/12)/k^4 = 7/(6k^4)$.

Ce choix est unique : si la borne demandée est vraie, $k^3(r_{k-1} - r_k) \rightarrow 0$. Les fonctions d , g_1 et g_2 sont bornées, donc l'expression ci-dessus tend vers $-2c_2$. Il faut par conséquent $c_2 = 0$.

3. c) Avec ce choix, $r_n = \varepsilon_n - 1/(12n)$ tend vers 0. La série des différences est absolument convergente par la majoration obtenue. Son télescopage donne encore :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k).$$

En appliquant I. 2 avec $p = 2$ et $M = 7/6$:

$$|r_n| \leq \frac{7/6}{3n^3} = \frac{7}{18n^3}.$$

Posons $\lambda_2(n) = n^3 r_n$. On a $|\lambda_2(n)| \leq 7/18$, et, pour $n \geq 1$:

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + \frac{\lambda_2(n)}{n^3}.$$

La correction en $1/n^2$ est donc nulle ; l'amélioration porte sur l'ordre du reste.

4. La matrice A est triangulaire inférieure, puisque $a_{i,j} = 0$ pour $j > i$. Sur la diagonale :

$$a_{i,i} = \binom{i}{i-1} = i.$$

Méthode 1 — Inversibilité d'une matrice triangulaire

Tous les éléments diagonaux sont non nuls, car $1 \leq i \leq p$. Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls. Ainsi A est inversible, et $AX = B$ possède une unique solution $X = A^{-1}B$.

Méthode 2 — Résolution successive des équations

L'équation de rang i est :

$$\sum_{j=1}^{i-1} \binom{i}{j-1} x_j + i x_i = b_i.$$

La première impose $x_1 = b_1$. Une fois $x_1, \dots, x_{i-1}$ déterminés, la suivante impose une unique valeur :

$$x_i = \frac{1}{i} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i}{j-1} x_j \right).$$

La division par i est licite. Ces formules construisent donc une solution et prouvent son unicité, rang après rang. En notant cette solution $(c_1, \dots, c_p)$, on obtient la relation qui sera utilisée dans la suite :

$$c_i = \frac{1}{i} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i}{j-1} c_j \right).$$

La première méthode utilise un critère du cours ; la seconde décrit directement le calcul qui sera programmé en partie IV.

5. Évaluation asymptotique de ε_n .

5. a) Fixons $q \in \{1, \dots, p\}$ et posons $L = p - q + 1 \geq 1$. La fonction $f_q(t) = (1 - t)^{-q}$ est de classe C^{L+1} sur un ouvert contenant $[0, 1/k]$, pour $k \geq 2$.

Une récurrence sur l'ordre de dérivation donne, pour $i \geq 1$:

$$f_q^{(i)}(t) = q(q+1) \cdots (q+i-1)(1-t)^{-q-i}.$$

Au rang $i = 1$, la formule est celle de la dérivée usuelle. Si elle vaut au rang i , la dérivation multiplie le coefficient par $q + i$ et remplace l'exposant $-q - i$ par $-q - i - 1$, ce qui prouve le rang suivant.

À $t = 0$, on a :

$$\frac{f_q^{(i)}(0)}{i!} = \frac{(q + i - 1)!}{(q - 1)!i!} = \binom{q + i - 1}{i}.$$

Taylor avec reste intégral à l'ordre L , en 0 et au point $1/k$, donne :

$$f_q(1/k) = \sum_{i=0}^L \frac{f_q^{(i)}(0)}{i!k^i} + \frac{1}{L!} \int_0^{1/k} (1/k - t)^L f_q^{(L+1)}(t) dt.$$

Comme $q + L + 1 = p + 2$, le coefficient de $f_q^{(L+1)}$ est $q(q + 1) \cdots (p + 1)$ et son dénominateur $(1 - t)^{p+2}$. On obtient exactement la première identité du sujet.

Notons $I_{q,k}$ l'intégrale du reste, sans son coefficient. Son intégrande est positif ou nul. Pour $0 \leq t \leq 1/k$:

$$\frac{1}{(1 - t)^{p+2}} \leq \left(\frac{k}{k - 1} \right)^{p+2}.$$

Ainsi :

$$0 \leq I_{q,k} \leq \left(\frac{k}{k - 1} \right)^{p+2} \int_0^{1/k} (1/k - t)^L dt.$$

Le changement de variable affine $u = 1/k - t$ transforme cette dernière intégrale en

$$\int_0^{1/k} u^L du, \text{ dont la valeur est } 1/((L + 1)k^{L+1}).$$

Définissons :

$$g_q(k) = k^{L+1} \frac{q(q + 1) \cdots (p + 1)}{L!} I_{q,k}.$$

Le reste est alors $g_q(k)/k^{L+1} = g_q(k)/k^{p-q+2}$. Sa positivité est acquise et, puisque

$k/(k-1) \leq 2$:

$$g_q(k) \leq 2^{p+2} \frac{q(q+1) \cdots (p+1)}{(L+1)!} = 2^{p+2} \frac{(p+1)!}{(q-1)!(p-q+2)!} = 2^{p+2} \binom{p+1}{q-1}.$$

On a donc la dernière formule et la borne demandées, pour chacun des indices q autorisés. Aucune théorie de séries entières ni aucun échange entre limite et dérivation n'intervient.

5. b) Rectification locale de notation : le coefficient de $1/k^{i+1}$ est désigné partout par μ_i .
Le PDF utilise μ_i dans la somme, puis un autre symbole dans sa définition ; l'énoncé adapté les harmonise.

En appliquant III. 5. a) à chacun des p termes de la différence proposée :

$$\sum_{q=1}^p \frac{c_q}{(k-1)^q} - \sum_{q=1}^p \frac{c_q}{k^q} = \sum_{q=1}^p \sum_{j=1}^{p-q+1} \frac{c_q \binom{q+j-1}{j}}{k^{q+j}} + \frac{1}{k^{p+2}} \sum_{q=1}^p c_q g_q(k).$$

Ces sommes sont finies. Pour regrouper les puissances, posons $i = q + j - 1$. Alors $1 \leq i \leq p$, et, à i fixé, $1 \leq q \leq i$, avec $j = i - q + 1$. Le coefficient de $1/k^{i+1}$ est donc :

$$\mu_i = \sum_{q=1}^i c_q \binom{i}{i-q+1} = \sum_{q=1}^i c_q \binom{i}{q-1} = \sum_{q=1}^i a_{i,q} c_q.$$

On obtient bien :

$$\sum_{q=1}^p \frac{c_q}{(k-1)^q} - \sum_{q=1}^p \frac{c_q}{k^q} = \sum_{i=1}^p \frac{\mu_i}{k^{i+1}} + \left(\sum_{q=1}^p c_q g_q(k) \right) \frac{1}{k^{p+2}}.$$

Comme les c_q sont la solution de $AC = B$, on a surtout $\mu_i = b_i$ pour chaque i : tous les termes des p premiers ordres coïncident avec ceux de la différence des ε_k .

5. c) En soustrayant la formule de III. 5. b) à celle de III. 1, les termes de coefficients $b_i = \mu_i$ disparaissent. Ainsi :

$$r_{k-1} - r_k = \frac{d(k) - \sum_{q=1}^p c_q g_q(k)}{k^{p+2}}.$$

Puisque $|d(k)| \leq 1$, $|c_q| \leq m_p$ et $g_q(k) \geq 0$, on obtient :

$$|r_{k-1} - r_k| \leq \frac{1 + m_p 2^{p+2} \sum_{q=1}^p \binom{p+1}{q-1}}{k^{p+2}}.$$

La somme des coefficients binomiaux de la ligne $p+1$ vaut 2^{p+1} , par le binôme appliqué à $(1+1)^{p+1}$. La somme partielle ci-dessus est inférieure ou égale à cette somme totale, tous les termes étant positifs. Par conséquent :

$$|r_{k-1} - r_k| \leq \frac{1 + m_p 2^{p+2} 2^{p+1}}{k^{p+2}} = \frac{M_p}{k^{p+2}},$$

avec $M_p = 1 + 2^{2p+3} m_p$, comme demandé. Pour p fixé, ces constantes sont finies.

5. d) La suite ε_n tend vers 0. Comme p est fixé, la somme finie

$$\sum_{q=1}^p c_q / n^q$$

tend également vers 0, donc $r_n \rightarrow 0$.

La majoration de III. 5. c) et la convergence de la série de Riemann d'exposant $p+2 > 1$ donnent la convergence absolue de la série des différences. Pour $m > n$, on a :

$$\sum_{k=n+1}^m (r_{k-1} - r_k) = r_n - r_m.$$

En passant à la limite,

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k).$$

La question I. 2, avec $M = M_p$ et le même p , fournit :

$$|r_n| \leq \frac{M_p}{(p+1)n^{p+1}}.$$

Définissons $\lambda_p(n) = n^{p+1}r_n$. On a $|\lambda_p(n)| \leq M_p/(p+1)$ et :

$$\varepsilon_n = \sum_{q=1}^p \frac{c_q}{n^q} + \frac{\lambda_p(n)}{n^{p+1}}.$$

En remplaçant dans (1), on conclut, pour tout $n \geq 1$:

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \sum_{q=1}^p \frac{c_q}{n^q} + \frac{\lambda_p(n)}{n^{p+1}}, \quad |\lambda_p(n)| \leq \frac{M_p}{p+1}.$$

Il s'agit d'une formule exacte assortie d'une borne de reste, pour chaque ordre $p \geq 1$ fixé.

Partie IV : étude d'un algorithme

Les fonctions suivantes utilisent les indices mathématiques $1, \dots, p$. Les tableaux sont donc de taille $p+1$; leur case, ligne ou colonne d'indice 0 est inutilisée. On compte uniquement les opérations arithmétiques participant au calcul des coefficients, selon la convention précisée dans le sujet adapté.

1. Code adapté en Python.

Python

```
import numpy as np

def SecondMembre(p):
    B = np.zeros(p + 1)
    for i in range(1, p + 1):
        B[i] = i / (2 * (i + 1) * (i + 2))
    return B
```

Pour chaque indice i de 1 à p , le programme affecte à $B[i]$ exactement $b_i = i/(2(i+1)(i+2))$. Les bornes de range incluent p , puisque la borne supérieure exclusive est $p + 1$.

L'expression utilise deux additions, deux multiplications et une division par coefficient : son coût est $5p$. On a donc :

$$K_1(p) = 5p \sim 5p \quad \text{lorsque } p \rightarrow +\infty.$$

Cette valeur correspond à l'évaluation directe de l'expression écrite dans ce programme.

2. Code adapté en Python. La fonction étudiée, avec son import, est :

Python

```
import numpy as np

def Coefficients(p):
    A = np.zeros((p + 1, p + 1))
    A[1, 1] = 1
    for j in range(2, p + 1):
        A[1, j] = 0
    for i in range(2, p + 1):
        A[i, 1] = 1
        for j in range(2, i):
            A[i, j] = A[i - 1, j - 1] + A[i - 1, j]
```

```
A[i, i] = i
for j in range(i + 1, p + 1):
    A[i, j] = 0
return A
```

Le programme construit la matrice triangulaire inférieure du système de III. 4. On le vérifie par récurrence sur le numéro de ligne.

Pour $i = 1$, il inscrit $A[1, 1] = 1 = \binom{1}{0}$ et des zéros pour $j > 1$. Supposons la ligne $i - 1$ correcte. Sur la ligne i , les valeurs de bord sont $A[i, 1] = 1 = \binom{i}{0}$ et $A[i, i] = i = \binom{i}{i-1}$, puis les valeurs au-dessus de la diagonale sont nulles.

Pour $2 \leq j \leq i - 1$, la relation du triangle de Pascal donne :

$$A[i - 1, j - 1] + A[i - 1, j] = \binom{i - 1}{j - 2} + \binom{i - 1}{j - 1} = \binom{i}{j - 1}.$$

La ligne i est donc correcte. Pour $p = 1$, les boucles sont vides et la case $A[1, 1] = 1$ fournit directement la bonne matrice.

Seule la boucle intérieure calculant les coefficients effectue des opérations arithmétiques sur leurs valeurs : une addition pour chaque $j \in \{2, \dots, i - 1\}$, soit $i - 2$ additions sur la ligne i .

Pour $p \geq 1$, le coût est :

$$K_2(p) = \sum_{i=2}^p (i - 2) = \frac{(p - 1)(p - 2)}{2} \sim \frac{p^2}{2}.$$

La formule vaut aussi pour $p = 1$, avec un coût nul. Les initialisations à 0, 1 ou i sont des affectations et ne sont pas comptées.

3. Code adapté en Python. On résout le système triangulaire par substitution successive, sans calculer de matrice inverse.

Python

```
import numpy as np

def Approximation(A, B, p):
    C = np.zeros(p + 1)
    for i in range(1, p + 1):
        valeur = B[i]
        for j in range(1, i):
            valeur = valeur - A[i, j] * C[j]
        C[i] = valeur / A[i, i]
    return C
```

Au début de la ligne i , les coefficients $C[1], \dots, C[i-1]$ ont déjà été calculés et valent $c_1, \dots, c_{i-1}$. La boucle intérieure soustrait successivement $a_{i,j}c_j$ de b_i . À sa fin :

$$\text{valeur} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}c_j.$$

Comme $A[i, i] = i > 0$, la division est toujours licite et calcule précisément c_i . Une récurrence sur i montre donc que le tableau renvoyé contient toute la solution. Pour $i = 1$, la boucle intérieure est vide et $C[1] = B[1]/A[1, 1] = b_1$.

La ligne i utilise $i-1$ multiplications, $i-1$ soustractions et une division. Son coût est $2(i-1) + 1$, donc :

$$K_3(p) = \sum_{i=1}^p (2(i-1) + 1) = p(p-1) + p = p^2 \sim p^2.$$

Les trois fonctions ont été exécutées pour plusieurs valeurs de p . Les coefficients de la matrice ont été comparés aux coefficients binomiaux, et les valeurs de la solution ont été contrôlées par les équations $AC = B$ et par une résolution rationnelle exacte

indépendante. Les premières valeurs sont :

$$c_1 = \frac{1}{12}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{1}{360}, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = \frac{1}{1260}, \quad c_6 = 0.$$

Les valeurs produites par les fonctions NumPy sont des approximations numériques à cause de l'arithmétique flottante. Leur vérification expérimentale complète la preuve de correction par substitution ; elle ne constitue pas une preuve de l'approximation générale de $\ln(n!)$.

4. Le coût total des trois appels est la somme de leurs coûts :

$$K(p) = 5p + \frac{(p-1)(p-2)}{2} + p^2 = \frac{3p^2 + 7p + 2}{2}.$$

En divisant par p^2 , on obtient $K(p)/p^2 \rightarrow 3/2$. Donc :

$$K(p) \sim \frac{3}{2}p^2 \quad \text{lorsque } p \rightarrow +\infty.$$

Le calcul du second membre est d'ordre linéaire ; les deux étapes d'ordre quadratique déterminent l'équivalent total.

Relevé des adaptations

- III. 5. b) Le symbole définissant le coefficient de $1/k^{i+1}$ est harmonisé avec celui utilisé dans la formule :

$$\mu_i = \sum_{j=1}^i a_{i,j} c_j.$$

Cela corrige l'incohérence de notation du PDF sans modifier le résultat.

- IV. 1–3) Code adapté en Python : les procédures et tableaux sont remplacés par des fonctions et tableaux NumPy. L'indexation mathématique de 1 à p est conservée

grâce à une case supplémentaire d'indice 0, inutilisée. Les bornes des boucles et la construction des coefficients sont préservées.

- IV. 1–4) La convention de coût est explicitée : seuls les calculs arithmétiques des coefficients sont comptés ; les opérations de gestion des indices, affectations, tests et allocations sont exclues. Les coûts donnés correspondent exactement aux programmes présentés.