



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1992

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, n , a et b désignent des entiers naturels non nuls.

PARTIE I

On effectue dans une urne contenant initialement b boules blanches et b boules noires une suite de tirages de la façon suivante : si les $n - 1$ premiers tirages ont tous donné une boule blanche, on procède au n -ième tirage. Cette condition n'est pas à prendre en compte au premier tirage.

- Si la boule obtenue est noire, ce n -ième tirage est le tirage final.
 - Si la boule obtenue est blanche, elle est remplacée dans l'urne avec, en plus, a autres boules blanches ; l'urne est alors prête pour le $(n + 1)$ -ième tirage.
1. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = b$. On désigne par X la variable aléatoire associant à toute suite de tirages :
 - la valeur 0 si une boule blanche a été obtenue à chaque tirage ;
 - le numéro du tirage final où apparaît une boule noire, sinon.
 1. (a) Pour tout entier $n \geq 1$, déterminer la probabilité p_n d'obtenir une boule noire au n -ième tirage, autrement dit la probabilité p_n pour que $X = n$.
 1. (b) Déterminer des réels α et β tels que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1}.$$
 1. (c) Calculer $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ et en déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1.$$

Que vaut $P(X = 0)$?

1. (d) Étudier l'existence de l'espérance de X .
2. On revient au cas général. On note $P(A_n)$ la probabilité de l'événement :

$A_n =$ « une boule blanche apparaît à chacun des n premiers tirages ».

Montrer que :

$$P(A_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{ka + b}{ka + 2b} = \frac{b}{2b} \times \frac{a+b}{a+2b} \times \cdots \times \frac{(n-1)a+b}{(n-1)a+2b}.$$

3. Dans cette question, on étudie la convergence de $(P(A_n))_{n \geq 1}$.
3. (a) Soient $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ des réels positifs. Démontrer que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} x_k.$$

En déduire une minoration de $1/P(A_n)$. En conclure que $P(A_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

3. (b) On désigne par X_a la variable aléatoire associant à toute suite de tirages :
 - la valeur 0 si une boule blanche a été obtenue à chaque tirage ;
 - le numéro du tirage final où apparaît une boule noire, sinon.

Exprimer en fonction de $P(A_n)$ la probabilité qu'une boule noire soit obtenue à l'un des n premiers tirages.

En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X_a = k) = 1.$$

Que vaut $P(X_a = 0)$?

4. On désigne par Y une variable aléatoire quelconque à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout entier naturel non nul n , on pose $p_n = P(Y = n)$.

4. (a) Exprimer en fonction des termes de (p_n) le nombre réel :

$$E_n = \sum_{k=0}^n P(Y > k).$$

4. (b) On suppose que Y admet une espérance $E(Y)$. Préciser le sens de variation de (E_n) et prouver que $E_n \leq E(Y)$. En déduire que (E_n) converge.

4. (c) On suppose que (E_n) converge. Prouver que :

$$p_1 + 2p_2 + \cdots + np_n \leq E_n.$$

En déduire que Y admet une espérance.

4. (d) Sous l'une de ces hypothèses équivalentes, établir que :

$$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y > n). \quad (1)$$

À l'aide de la relation (1), on se propose d'étudier dans la fin de cette partie l'espérance de X_a définie en question 3. Pour tout entier naturel n , on note $r_n(a) = P(X_a > n)$.

5. On suppose que $a \geq b$.

5. (a) Soient a_1, a_2 deux entiers naturels non nuls tels que $a_1 \leq a_2$. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$r_n(a_1) \leq r_n(a_2).$$

En déduire la nature de la série de terme général $r_n(a)$ pour $a \geq b$.

5. (b) Étudier l'existence de l'espérance de X_a pour $a \geq b$.

6. On suppose que $1 \leq a < b$.

6. (a) Exprimer $r_{n+1}(a)$ en fonction de $r_n(a)$. Établir que $(nr_n(a))$ est décroissante à partir d'un certain rang ; en déduire qu'elle est convergente. On note λ sa limite.

6. (b) Établir que si $\lambda \neq 0$, alors $r_n(a) \geq \lambda/n$ à partir d'un certain rang. En déduire que si $\lambda \neq 0$, alors X_a n'admet pas d'espérance.

6. (c) Montrer que, pour tout entier naturel k :

$$a(k+1)r_{k+1}(a) - akr_k(a) = (a-2b)r_{k+1}(a) + br_k(a). \quad (2)$$

6. (d) En sommant les relations (2) pour k variant de 0 à n , puis en faisant tendre n vers $+\infty$, montrer que X_a admet une espérance.

En déduire que $\lambda = 0$, puis que :

$$E(X_a) = \frac{2b-a}{b-a}.$$

PARTIE II

On considère une suite croissante (u_n) d'entiers naturels telle que $u_0 = b$. On généralise la situation étudiée dans la partie I.

On effectue dans une urne contenant initialement b boules blanches et b boules noires une suite de tirages de la façon suivante : si les $n - 1$ premiers tirages ont tous donné une boule blanche, on procède au n -ième tirage. Cette condition n'est pas à prendre en compte au premier tirage.

- Si la boule obtenue est noire, ce n -ième tirage est le tirage final.
- Si la boule obtenue est blanche, elle est remplacée dans l'urne avec, en plus, $u_n - u_{n-1}$ autres boules blanches ; l'urne est alors prête pour le $(n + 1)$ -ième tirage.

Ainsi l'urne contient b boules noires et u_n boules blanches au moment où l'on procède au $(n + 1)$ -ième tirage, dans la mesure où celui-ci a lieu.

1. Dans cette question, on étudie la probabilité d'obtention d'une boule noire.
1. (a) Exprimer en fonction de b et des nombres u_k , où $1 \leq k < n$, la probabilité q_n de l'événement :

$A_n = \text{« une boule blanche apparaît à chacun des } n \text{ premiers tirages »}.$

1. (b) Étudier le sens de variation de (q_n) . En déduire que cette suite converge vers un réel $L \in [0, 1/2]$. On ne cherchera pas à expliciter ce nombre réel.
1. (c) Soit p_n la probabilité d'obtenir une boule noire au n -ième tirage. Exprimer $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ en fonction de q_n . En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1 - L.$$

1. (d) Comparer les natures de la suite de terme général $\ln(1/q_n)$ et de la série de terme général $1/u_n$.

En déduire que la probabilité de ne pas obtenir de boule noire dans la suite des tirages est nulle si et seulement si cette dernière série diverge.

1. (e) Décrire le mode de tirage et étudier l'éventualité de ne pas obtenir de boule noire dans les deux cas suivants :

- (u_n) est arithmétique, définie par $u_n = b + na$;
- (u_n) est géométrique, définie par $u_n = ba^n$, avec $a \geq 2$.

2. On suppose que $u_n = ba^n$, avec $a \geq 2$.

2. (a) Préciser l'expression de q_n , notée désormais $q_n(a)$. On ne cherchera pas à expliciter la limite $L(a)$ de $(q_n(a))$.

2. (b) On étudie la vitesse de convergence de $(q_n(a))_{n \geq 1}$. Soient n, p deux entiers naturels non nuls. Établir que :

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{a^k} \leq \frac{1}{a^{n-1}(a-1)}.$$

Établir, pour tout $x \in [0, 1]$, l'inégalité :

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + 2x.$$

Déduire de ces résultats :

$$1 \leq \frac{q_n(a)}{q_{n+p}(a)} \leq \exp \left(\frac{1}{a^{n-1}(a-1)} \right).$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, en conclure que :

$$0 \leq q_n(a) - L(a) \leq \frac{1}{(a-1)a^{n-1}}. \quad (3)$$

2. (c) On donne un réel $\varepsilon > 0$. Écrire en Python un programme demandant les valeurs de a et de ε , et affichant les valeurs de $q_n(a)$ tant que :

$$\frac{1}{(a-1)a^{n-1}} > \varepsilon.$$

On pourra utiliser `input(message)`, qui affiche le message puis renvoie la saisie sous forme de chaîne ; `int(chaine)` et `float(chaine)`, qui convertissent cette chaîne respectivement en entier et en réel ; et `print(n, q)`, qui affiche les valeurs des deux variables.

2. (d) On étudie la suite associant à tout entier $a \geq 2$ le nombre réel $L(a)$. Soient a_1, a_2 deux entiers tels que $2 \leq a_1 \leq a_2$. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$q_n(a_1) \leq q_n(a_2),$$

avec la convention $q_0(a) = 1$.

En déduire que $(L(a))_{a \geq 2}$ est croissante. En remplaçant n par 1 dans l'inégalité (3), déterminer la limite de $L(a)$ lorsque l'entier a tend vers $+\infty$.