



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1992

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PARTIE I

Tous les tirages sont uniformes parmi les boules présentes dans l'urne au moment du tirage. Les tirages successifs ne sont pas indépendants : la composition de l'urne dépend des résultats précédents. On utilisera les probabilités conditionnelles et la formule des probabilités composées.

1. (a) Supposons $a = b$. Après k tirages blancs, l'urne contient $(k + 1)b$ boules blanches et b boules noires. Conditionnellement à ces k résultats blancs, la probabilité d'obtenir encore une blanche vaut :

$$\frac{(k + 1)b}{(k + 2)b} = \frac{k + 1}{k + 2}.$$

Pour que $X = n$, il faut obtenir $n - 1$ blanches, puis une noire. Après ces $n - 1$ blanches, l'urne contient nb blanches et b noires ; la probabilité conditionnelle de noire est $1/(n + 1)$.

Par la formule des probabilités composées :

$$p_n = \left(\prod_{k=0}^{n-2} \frac{k + 1}{k + 2} \right) \frac{1}{n + 1}.$$

Pour $n \geq 2$, le produit se télescope en $1/n$. Pour $n = 1$, il s'agit d'un produit vide, égal à 1, et $p_1 = 1/2$. On obtient donc, pour tous les $n \geq 1$:

$$p_n = \frac{1}{n(n + 1)}.$$

Le paramètre b disparaît car toutes les quantités de boules sont proportionnelles à b dans ce cas particulier.

1. (b) En multipliant l'identité par $n(n + 1) > 0$, on obtient :

$$1 = \alpha(n + 1) + \beta n = (\alpha + \beta)n + \alpha.$$

Une expression affine en n est égale à 1 pour tous les entiers $n \geq 1$ si et seulement si son coefficient de n est nul et son terme constant vaut 1. Ainsi :

$$\alpha + \beta = 0, \quad \alpha = 1,$$

soit $\alpha = 1$ et $\beta = -1$. Réciproquement, ces valeurs donnent bien $1/n - 1/(n+1) = 1/(n(n+1))$.

1. (c) D'après les deux questions précédentes :

$$\sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

La somme partielle tend vers 1, donc la série converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1.$$

La variable X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, et ses valeurs strictement positives ont une probabilité totale égale à 1. Par additivité des probabilités :

$$P(X = 0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 0.$$

Ainsi une noire apparaît presque sûrement à un rang fini.

1. (d) Comme $X \geq 0$, l'existence d'une espérance finie équivaut à la convergence de la série positive

$$\sum_{n \geq 1} np_n.$$

Or :

$$np_n = \frac{1}{n+1}.$$

Cette série diverge : pour $n \geq 1$, $1/(n+1) \geq 1/(2n)$, et la série harmonique diverge. Par comparaison,

$$\sum np_n$$

diverge.

Ainsi X n'admet pas d'espérance finie. Le fait que la première noire apparaisse presque sûrement ne garantit pas que son rang possède une espérance finie.

2. Posons $A_0 = \Omega$. Conditionnellement à A_k , les k premiers tirages ont été blancs : l'urne contient $ka + b$ blanches et b noires. On a donc :

$$P(A_{k+1} | A_k) = \frac{ka + b}{ka + 2b}.$$

Ces probabilités sont strictement positives, donc les événements utilisés pour conditionner ont une probabilité non nulle. Puisque $A_{k+1} \subset A_k$, la formule des probabilités composées donne :

$$P(A_n) = \prod_{k=0}^{n-1} P(A_{k+1} | A_k) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{ka + b}{ka + 2b}.$$

En développant les premiers facteurs, on retrouve exactement l'expression de l'énoncé.

3. (a) Méthode 1 — Récurrence pour l'inégalité de produits

Pour $n = 1$, on a $1 + x_0 = 1 + x_0$. Supposons l'inégalité vraie pour n réels positifs. En multipliant par $1 + x_n > 0$:

$$\prod_{k=0}^n (1 + x_k) \geq \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} x_k\right) (1 + x_n).$$

En développant le membre de droite :

$$\left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} x_k\right) (1 + x_n) = 1 + \sum_{k=0}^n x_k + x_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k \geq 1 + \sum_{k=0}^n x_k.$$

Le dernier terme est positif. L'inégalité est donc vraie au rang suivant, puis pour tout n par récurrence.

Méthode 2 — Développement du produit

Par distributivité, le produit

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 + x_k)$$

est la somme du terme constant 1, des termes de degré 1, qui sont les x_k , et de produits d'au moins deux des x_k . Tous ces derniers produits sont positifs ou nuls. En les supprimant dans une minoration, on obtient directement :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} x_k.$$

La récurrence permet de suivre la construction du produit ; son développement met en évidence la positivité des termes supplémentaires.

Application à l'urne : chaque facteur de $P(A_n)$ est strictement positif. On peut donc écrire :

$$\frac{1}{P(A_n)} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{ka + 2b}{ka + b} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{b}{ka + b}\right) \geq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b}{ka + b}.$$

Pour $k \geq 1$, $ka + b \leq (a + b)k$, donc :

$$\frac{b}{ka + b} \geq \frac{b}{a + b} \frac{1}{k}.$$

Ainsi, pour $n \geq 2$:

$$\frac{1}{P(A_n)} \geq 2 + \frac{b}{a + b} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \rightarrow +\infty.$$

Par inversion de quantités positives, $P(A_n) \rightarrow 0$.

3. (b) Obtenir une noire parmi les n premiers tirages est l'événement complémentaire de A_n . Sa probabilité vaut donc $1 - P(A_n)$.

Cet événement est aussi l'union disjointe des événements $[X_a = k]$, pour $k = 1, \dots, n$.

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^n P(X_a = k) = 1 - P(A_n).$$

Par 3. (a), le membre de droite tend vers 1, d'où :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X_a = k) = 1, \quad P(X_a = 0) = 0.$$

On peut également identifier précisément l'événement d'une suite infinie de blanches : $A_\infty = \bigcap_{n \geq 1} A_n$. Les événements A_n sont décroissants, donc la continuité monotone des probabilités donne $P(A_\infty) = \lim_n P(A_n) = 0$. Cet événement est exactement $[X_a = 0]$.

4. (a) Méthode 1 — Décomposition des sommes

Pour tout $k \geq 0$, les événements $[Y = j]$, pour $j \geq k + 1$, sont disjoints et leur union est

$[Y > k]$. Donc :

$$P(Y > k) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} p_j.$$

Pour $0 \leq k \leq n$, séparons les indices jusqu'à n de ceux au-delà :

$$P(Y > k) = \sum_{j=k+1}^n p_j + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j,$$

où la première somme est vide pour $k = n$. En sommant les $n + 1$ identités, un terme p_j avec $1 \leq j \leq n$ apparaît pour $k = 0, \dots, j - 1$, donc j fois. La somme de queue apparaît $n + 1$ fois. On obtient :

$$E_n = \sum_{j=1}^n j p_j + (n + 1) \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$$

L'échange effectué concerne seulement des sommes finies ; la somme de queue est une probabilité, toujours définie. Aucun théorème d'échange de deux séries infinies n'est utilisé.

Méthode 2 — Variable tronquée

Pour une valeur entière $j \geq 1$, le nombre d'entiers $k \in \{0, \dots, n\}$ tels que $j > k$ est $\min(j, n + 1)$. Ainsi, issue par issue :

$$\min(Y, n + 1) = \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{[Y > k]}.$$

Cette variable est bornée ; son espérance existe et, par linéarité d'une somme finie :

$$E(\min(Y, n+1)) = \sum_{k=0}^n P(Y > k) = E_n.$$

Par transfert, en séparant les valeurs $1, \dots, n$ des valeurs supérieures :

$$E(\min(Y, n+1)) = \sum_{j=1}^n jp_j + (n+1) \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$$

On retrouve la même formule. Cette seconde interprétation rend les inégalités des questions suivantes plus intuitives : E_n est l'espérance d'une version plafonnée de Y .

4. (b) Pour tout $n \geq 1$:

$$E_{n+1} - E_n = P(Y > n+1) \geq 0.$$

La suite est donc croissante. Comme $0 \leq \min(Y, n+1) \leq Y$ et que Y possède une espérance finie par hypothèse, la croissance de l'espérance donne :

$$E_n = E(\min(Y, n+1)) \leq E(Y).$$

La suite est croissante et majorée ; le théorème de la limite monotone assure sa convergence vers un réel fini.

4. (c) La formule de 4. (a) donne directement :

$$\sum_{j=1}^n jp_j \leq E_n,$$

puisque le terme de queue est positif. Si (E_n) converge vers un réel M , elle est croissante et $E_n \leq M$.

Les sommes partielles

$$\sum_{j=1}^n jp_j$$

sont également croissantes, car leurs termes sont positifs, et sont majorées par M . Elles convergent donc vers un réel fini. La série positive

$$\sum_{j \geq 1} jp_j$$

converge, ce qui est précisément la condition d'existence de l'espérance de Y .

4. (d) Méthode 1 — Encadrement par les sommes partielles

Sous l'une des hypothèses équivalentes de 4. (b) et 4. (c), Y possède une espérance finie et (E_n) converge. Les deux questions donnent :

$$\sum_{j=1}^n jp_j \leq E_n \leq E(Y).$$

Le membre de gauche tend vers $E(Y)$ par définition de l'espérance discrète. Par encadrement, $E_n \rightarrow E(Y)$. Mais E_n est la somme partielle de la série de terme général $P(Y > n)$. On a donc :

$$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y > n).$$

Méthode 2 — Contrôle du reste de la formule de 4. (a)

La convergence de

$$\sum_{j \geq 1} jp_j$$

implique que son reste tend vers 0. Pour $j \geq n + 1$, on a $n + 1 \leq j$, donc :

$$0 \leq (n + 1) \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} jp_j \longrightarrow 0.$$

Dans l'identité

$$E_n = \sum_{j=1}^n jp_j + (n + 1) \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j,$$

le premier terme tend vers $E(Y)$ et le second vers 0. On retrouve donc $E_n \rightarrow E(Y)$ et la relation (1). Cette méthode montre explicitement pourquoi le terme lié au plafonnement disparaît.

Pour appliquer la relation à X_a , on utilise 3. (b) : sa loi est concentrée sur $\mathbb{N}^*$, puisque $P(X_a = 0) = 0$. On peut, si nécessaire, changer sa valeur sur cet événement négligeable pour obtenir une variable effectivement à valeurs dans $\mathbb{N}^*$; sa loi, ses moments et toutes les probabilités considérées restent les mêmes.

Notons une précaution utile pour la suite : $[X_a > n]$ n'est pas exactement A_n , car la suite infinie de blanches donne $X_a = 0$. Pour $n \geq 0$:

$$[X_a > n] = A_n \setminus A_\infty,$$

avec $A_0 = \Omega$. Puisque $P(A_\infty) = 0$, on a bien :

$$r_0(a) = 1, \quad r_n(a) = P(A_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{ka + b}{ka + 2b} \quad (n \geq 1).$$

5. (a) Pour $k \geq 0$, écrivons :

$$\frac{ka + b}{ka + 2b} = 1 - \frac{b}{ka + 2b}.$$

Si $a_1 \leq a_2$, alors $ka_1 + 2b \leq ka_2 + 2b$, donc :

$$\frac{ka_1 + b}{ka_1 + 2b} \leq \frac{ka_2 + b}{ka_2 + 2b}.$$

Les facteurs sont positifs ; on peut multiplier ces inégalités pour $k = 0, \dots, n-1$. On obtient $r_n(a_1) \leq r_n(a_2)$ pour $n \geq 1$. Pour $n = 0$, les deux valeurs sont 1.

Lorsque $a = b$, le produit se télescope :

$$r_n(b) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{n+1},$$

formule valable aussi pour $n = 0$. Si $a \geq b$, la comparaison précédente donne donc :

$$r_n(a) \geq r_n(b) = \frac{1}{n+1}.$$

La série de droite diverge ; par comparaison de séries positives,

$$\sum_{n \geq 0} r_n(a)$$

diverge pour tout $a \geq b$.

5. (b) La question 4 établit l'équivalence entre l'existence d'une espérance finie et la convergence de la série des probabilités de dépassement. Ici cette série diverge d'après 5. (a). Ainsi, pour tout $a \geq b$, X_a n'admet pas d'espérance finie.

Cette conclusion inclut le cas limite $a = b$, déjà étudié en 1. (d).

6. (a) Pour $n \geq 0$, la formule du produit donne :

$$r_{n+1}(a) = \frac{an + b}{an + 2b} r_n(a).$$

Pour $n \geq 1$, tous les facteurs sont strictement positifs et :

$$\frac{(n+1)r_{n+1}(a)}{nr_n(a)} = \frac{(n+1)(an+b)}{n(an+2b)}.$$

La suite $nr_n(a)$ diminue à l'étape considérée exactement lorsque ce rapport est au plus 1. Cela équivaut à :

$$(n+1)(an+b) \leq n(an+2b),$$

puis, en développant et en simplifiant, à :

$$(a-b)n + b \leq 0 \iff n \geq \frac{b}{b-a}.$$

Le dénominateur $b-a$ est strictement positif par hypothèse. Ainsi $nr_n(a)$ est décroissante à partir de tout rang entier au moins égal à $b/(b-a)$. Elle est positive, donc minorée par 0. Le théorème de la limite monotone donne une limite finie $\lambda \geq 0$.

6. (b) Rectification locale du PDF : le symbole non défini apparaissant dans l'hypothèse est remplacé par λ , notation de la limite introduite en 6. (a).

Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda > 0$. La suite $nr_n(a)$ est décroissante à partir d'un certain rang et converge vers λ ; chacun de ses termes à partir de ce rang est donc supérieur ou égal à sa limite. Ainsi :

$$r_n(a) \geq \frac{\lambda}{n}.$$

La série harmonique diverge et $\lambda > 0$. Par comparaison,

$$\sum r_n(a)$$

diverge, donc, d'après 4, X_a n'admet pas d'espérance finie dans cette hypothèse.

6. (c) La relation de récurrence de 6. (a) donne, pour tout $k \geq 0$:

$$(ak+2b)r_{k+1}(a) = (ak+b)r_k(a).$$

En soustrayant $akr_k(a)$ et en réorganisant :

$$ak(r_{k+1}(a) - r_k(a)) = br_k(a) - 2br_{k+1}(a).$$

Ajoutons $ar_{k+1}(a)$ aux deux membres. Le membre de gauche devient $a(k+1)r_{k+1}(a) - akr_k(a)$; le membre de droite devient $(a-2b)r_{k+1}(a) + br_k(a)$. C'est la relation (2).

Pour $k=0$, elle vaut également : $r_0(a) = 1$, $r_1(a) = 1/2$, et ses deux membres sont égaux à $a/2$.

6. (d) Écrivons $r_k = r_k(a)$ et

$$S_n = \sum_{k=0}^n r_k.$$

En sommant (2) de $k=0$ à n , le membre de gauche se télescope, et on obtient :

$$a(n+1)r_{n+1} = (a-2b) \sum_{k=0}^n r_{k+1} + b \sum_{k=0}^n r_k.$$

Comme $r_0 = 1$, on a

$$\sum_{k=0}^n r_{k+1} = S_n - 1 + r_{n+1}.$$

Ainsi :

$$a(n+1)r_{n+1} = (a-b)S_n + (2b-a) + (a-2b)r_{n+1}.$$

Après regroupement :

$$(b-a)S_n = (2b-a) - (an+2b)r_{n+1}.$$

Le coefficient $b-a$ est strictement positif. Nous savons par 3. (a) que $r_{n+1} \rightarrow 0$, et par 6.

(a) que $(n+1)r_{n+1} \rightarrow \lambda$. Par conséquent :

$$(an+2b)r_{n+1} = a(n+1)r_{n+1} + (2b-a)r_{n+1} \rightarrow a\lambda.$$

L'identité précédente prouve donc directement que :

$$S_n \longrightarrow \frac{2b - a - a\lambda}{b - a},$$

une limite finie. On ne suppose pas la convergence de la série avant cette étape : elle vient d'être démontrée par l'identité télescopique.

D'après 4, X_a possède donc une espérance finie. Si $\lambda \neq 0, 6$. (b) affirmerait le contraire ; on en déduit $\lambda = 0$. Enfin la relation (1) donne :

$$E(X_a) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n(a) = \frac{2b - a}{b - a}.$$

On peut aussi lire la majoration $S_n \leq (2b - a)/(b - a)$ directement dans l'identité finie, puisque $(an + 2b)r_{n+1} \geq 0$. Elle confirme que la preuve d'existence est indépendante de la valeur finale de λ .

PARTIE II

Dans cette partie, (u_n) est croissante et $u_0 = b > 0$, donc $u_n \geq b$ pour tout n . On utilise $A_0 = \Omega$ et $q_0 = 1$.

1. (a) Après k tirages blancs, l'urne contient u_k blanches et b noires. La probabilité conditionnelle de blanche au tirage suivant est $u_k/(u_k + b)$.

La formule des probabilités composées donne :

$$q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{u_k + b} = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{u_k + b}.$$

Pour $n = 1$, le dernier produit est vide et vaut 1, donc $q_1 = 1/2$. Tous les facteurs sont strictement positifs, ce qui justifie les conditionnements et les quotients utilisés dans la suite.

1. (b) Le produit précédent donne, pour $n \geq 0$:

$$q_{n+1} = q_n \frac{u_n}{u_n + b}.$$

Comme $u_n > 0$ et $b > 0$, $0 < u_n/(u_n + b) < 1$. On a donc $0 < q_{n+1} < q_n$. La suite est strictement décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel $L \geq 0$.

Pour $n \geq 1$, $q_n \leq q_1 = 1/2$, donc $L \in [0, 1/2]$. On ne cherche pas à expliciter cette limite.

1. (c) L'événement d'une première noire au rang k est $A_{k-1} \setminus A_k$. Sa probabilité est :

$$p_k = q_{k-1} - q_k = q_{k-1} \frac{b}{u_{k-1} + b}.$$

En sommant de $k = 1$ à n , les termes se télescopent :

$$\sum_{k=1}^n p_k = q_0 - q_n = 1 - q_n.$$

Puisque $q_n \rightarrow L$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1 - L.$$

L'événement de ne jamais tirer de noire est $A_\infty = \bigcap_{n \geq 1} A_n$. Par continuité monotone des probabilités pour la suite décroissante (A_n) :

$$P(A_\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = L.$$

Ainsi L est précisément la probabilité d'une suite infinie de tirages blancs.

1. (d) Comme $q_n > 0$, le logarithme est défini. En prenant le logarithme du produit :

$$\ln \left(\frac{1}{q_n} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{b}{u_k} \right).$$

On établit des bornes permettant de comparer cette somme aux sommes partielles de

$$\sum 1/u_k$$

sans supposer que u_k tend vers l'infini.

Pour $t \geq 0$, l'identité $\ln(1+t) = \int_0^t \frac{ds}{1+s}$ donne :

$$\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t.$$

En effet, sur $[0, t]$, $1/(1+t) \leq 1/(1+s) \leq 1$. Pour $0 \leq t \leq 1$, on en déduit $t/2 \leq \ln(1+t) \leq t$.

Ici $0 < b/u_k \leq 1$, puisque $u_k \geq b$. En appliquant les bornes à chaque terme puis en sommant :

$$\frac{b}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leq \ln \left(\frac{1}{q_n} \right) \leq b \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}.$$

Si

$$\sum 1/u_k$$

converge, les sommes de logarithmes sont croissantes et majorées par une constante finie. Elles convergent vers un réel ℓ , et :

$$q_n = \exp \left(-\ln \left(\frac{1}{q_n} \right) \right) \rightarrow e^{-\ell} > 0.$$

Ainsi $L > 0$ dans ce cas.

Si

$$\sum 1/u_k$$

diverge, ses termes sont positifs, donc ses sommes partielles tendent vers $+\infty$. La minoration donne $\ln(1/q_n) \rightarrow +\infty$, d'où $q_n \rightarrow 0$ et $L = 0$.

Nous avons donc l'équivalence complète :

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{u_k} \text{ converge} \iff \left(\ln \frac{1}{q_n} \right) \text{ converge vers un réel fini} \iff L > 0.$$

Dans le cas contraire, la série diverge et le logarithme tend vers $+\infty$. D'après 1. (c), la probabilité de ne jamais obtenir une noire est donc nulle si et seulement si

$$\sum 1/u_k$$

diverge. Commencer la série à $k = 1$ au lieu de $k = 0$ ne change pas sa nature.

1. (e) Cas arithmétique : $u_n = b + na$

Après une blanche au rang n , on ajoute $u_n - u_{n-1} = a$ boules blanches. On retrouve exactement l'urne de la partie I.

Pour $n \geq 1$, $b + na \leq (a + b)n$, donc :

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{b + na} \geq \frac{1}{a + b} \frac{1}{n}.$$

La série harmonique diverge ; par comparaison,

$$\sum 1/u_n$$

diverge. La probabilité de ne jamais obtenir de noire est donc nulle : une noire apparaît presque sûrement.

Cas géométrique : $u_n = ba^n$, avec $a \geq 2$

Après une blanche au rang n , on ajoute :

$$u_n - u_{n-1} = ba^n - ba^{n-1} = b(a - 1)a^{n-1}.$$

Ainsi le nombre de blanches, égal à ba^{n-1} avant le tirage, est multiplié par a après chaque tirage blanc, tandis que le nombre de noires reste égal à b .

On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{a}{b(a-1)} < +\infty,$$

car $0 < 1/a < 1$. D'après 1. (d), la probabilité $L(a)$ de ne jamais tirer de noire est donc strictement positive. Elle est au plus $1/2$ d'après 1. (b) ; la probabilité d'obtenir finalement une noire vaut $1 - L(a)$.

2. (a) En remplaçant $u_k = ba^k$ dans 1. (a), on obtient :

$$q_n(a) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{ba^k}{ba^k + b} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{a^k + 1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + a^{-k}}.$$

Le paramètre b disparaît. En particulier $q_1(a) = 1/2$, et la récurrence associée est :

$$q_{n+1}(a) = \frac{q_n(a)}{1 + a^{-n}}.$$

D'après 1. (e), $q_n(a)$ converge vers $L(a) > 0$ pour $a \geq 2$. Nous ne cherchons pas de formule explicite pour cette limite.

2. (b) Somme géométrique

Puisque $a > 1$, pour tous $n, p \geq 1$:

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{a^k} = a^{-n} \frac{1 - a^{-p}}{1 - a^{-1}} = \frac{1 - a^{-p}}{a^{n-1}(a - 1)} \leq \frac{1}{a^{n-1}(a - 1)}.$$

Posons $C_n = 1/(a^{n-1}(a - 1))$. Comme $a \geq 2$ et $n \geq 1$, on a $0 < C_n \leq 1$.

Inégalités exponentielles

Nous aurons besoin de $e < 3$. La série exponentielle est convergente et :

$$e = 2 + \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j!}.$$

Pour $j \geq 2$, $j! \geq 2^{j-1}$, puisque chacun des $j - 1$ facteurs de $2 \times 3 \times \dots \times j$ est au moins 2. L'inégalité est stricte dès $j \geq 3$. Donc :

$$\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j!} < \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{j-1}} = 1,$$

ce qui prouve $e < 3$ avec des séries usuelles du programme.

Méthode 1 — Convexité de l'exponentielle

La fonction exponentielle est convexe puisque sa dérivée seconde est strictement positive. Elle se situe au-dessus de sa tangente en 0, d'où $e^x \geq 1 + x$.

Sur le segment $[0, 1]$, la convexité donne aussi :

$$e^x = e^{(1-x)0+x \cdot 1} \leq (1-x)e^0 + xe^1 = 1 + (e-1)x \leq 1 + 2x.$$

Ainsi $1 + x \leq e^x \leq 1 + 2x$ pour $x \in [0, 1]$.

Méthode 2 — Série exponentielle

Pour $0 \leq x \leq 1$, tous les termes de la série exponentielle sont positifs et $x^j \leq x$ pour

$j \geq 1$. Donc :

$$e^x = 1 + x + \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{x^j}{j!} \geq 1 + x,$$

et :

$$e^x = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^j}{j!} \leq 1 + x \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j!} = 1 + (e - 1)x \leq 1 + 2x.$$

Les comparaisons portent sur des séries positives convergentes. Elles donnent les mêmes bornes, y compris pour $x = 0$ et $x = 1$. La première méthode utilise la géométrie d'une fonction convexe ; la seconde contrôle directement ses termes positifs.

Quotient des probabilités

Les produits définissant $q_n(a)$ sont strictement positifs. En simplifiant les facteurs communs :

$$\frac{q_n(a)}{q_{n+p}(a)} = \prod_{k=n}^{n+p-1} (1 + a^{-k}) \geq 1.$$

Pour chaque $k \geq n \geq 1$, $a^{-k} \in [0, 1]$, et l'inégalité $1 + x \leq e^x$ donne :

$$\prod_{k=n}^{n+p-1} (1 + a^{-k}) \leq \prod_{k=n}^{n+p-1} e^{a^{-k}} = \exp \left(\sum_{k=n}^{n+p-1} a^{-k} \right) \leq e^{C_n}.$$

On a donc l'encadrement demandé $1 \leq q_n(a)/q_{n+p}(a) \leq e^{C_n}$.

Contrôle de l'erreur

Comme $L(a) > 0$, on peut faire tendre p vers $+\infty$ dans le quotient et obtenir :

$$1 \leq \frac{q_n(a)}{L(a)} \leq e^{C_n}.$$

Ainsi :

$$0 \leq q_n(a) - L(a) \leq L(a)(e^{C_n} - 1).$$

Nous avons $L(a) \leq 1/2$ et $C_n \in [0, 1]$. En appliquant $e^x \leq 1 + 2x$ à $x = C_n$:

$$0 \leq q_n(a) - L(a) \leq \frac{1}{2} \cdot 2C_n = C_n = \frac{1}{(a-1)a^{n-1}}.$$

Cela établit (3) pour tous les $a \geq 2$ et $n \geq 1$, sans calculer $L(a)$.

2. (c) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Voici un programme qui demande les données et affiche chaque $q_n(a)$ pour lequel la borne d'erreur est strictement supérieure à ε :

Python

```
a = int(input("a, entier au moins egal a 2 : "))
epsilon = float(input("epsilon, reel strictement positif : "))

n = 1
q = 0.5
borne = 1 / (a - 1)
facteur = 1 / a

while borne > epsilon:
    print(n, q)
    q = q / (1 + facteur)
    facteur = facteur / a
    borne = borne / a
    n = n + 1
```

On suppose que les saisies respectent $a \geq 2$ et $\varepsilon > 0$, comme dans le sujet. Aucune importation n'est nécessaire.

Au début de chaque passage dans la boucle, l'invariant est :

$$q = q_n(a), \quad \text{facteur} = a^{-n}, \quad \text{borne} = \frac{1}{(a-1)a^{n-1}}.$$

L'initialisation est correcte puisque $q_1(a) = 1/2$. L'affectation $q = q / (1 + \text{facteur})$ applique exactement la récurrence $q_{n+1}(a) = q_n(a)/(1 + a^{-n})$. Les divisions suivantes actualisent a^{-n} en $a^{-(n+1)}$ et la borne d'erreur du rang n en celle du rang $n + 1$. Enfin $n = n + 1$ met à jour le rang, donc l'invariant est conservé.

En arithmétique exacte, la borne est une suite géométrique de raison $1/a \leq 1/2$, qui tend vers 0. Pour tout $\varepsilon > 0$, le test devient donc faux après un nombre fini d'étapes. Le programme affiche bien les seuls rangs pour lesquels la condition demandée est vraie. Si la borne initiale est déjà inférieure ou égale à ε , il n'affiche aucune valeur.

À la sortie, la variable q contient une approximation de $L(a)$ au rang courant et la relation (3) garantit $0 \leq q - L(a) \leq \varepsilon$ en arithmétique exacte. Comme tout calcul en Python avec des nombres flottants, l'exécution ajoute des erreurs d'arrondi numériques.

Code exécuté : pour $a = 2$ et $\varepsilon = 0,1$, les rangs affichés sont 1, 2, 3, 4. Les valeurs sont approximativement 0,5, 0,333333, 0,266667 et 0,237037. La boucle s'arrête avec $n = 5$, une borne égale à 0,0625 et $q_5(2) \simeq 0,223094$.

Le cas d'un seuil égal à la borne initiale et d'autres valeurs de a ont également été exécutés pour contrôler l'inégalité stricte et les indices. Ces calculs valident le fonctionnement du programme ; les garanties mathématiques proviennent de la démonstration de (3).

2. (d) Question adaptée au programme actuel : les paramètres a_1, a_2 et la suite $L(a)$ sont considérés pour $a \geq 2$, domaine fixé au début de la question 2. La convention $q_0(a) = 1$ explicite le cas $n = 0$ demandé.

Soient $2 \leq a_1 \leq a_2$. Pour $k \geq 0$, on a $a_1^k \leq a_2^k$, donc :

$$a_1^{-k} \geq a_2^{-k}, \quad \frac{1}{1 + a_1^{-k}} \leq \frac{1}{1 + a_2^{-k}}.$$

Les facteurs sont positifs. En multipliant pour $k = 0, \dots, n - 1$, on obtient :

$$q_n(a_1) \leq q_n(a_2) \quad (n \geq 1).$$

Pour $n = 0$, les deux produits sont vides et valent 1. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité entre deux suites convergentes :

$$L(a_1) \leq L(a_2).$$

Ainsi $(L(a))_{a \geq 2}$ est croissante. Elle est majorée par $1/2$, mais on peut déterminer sa limite directement grâce à (3). Pour $n = 1$, $q_1(a) = 1/2$, donc :

$$0 \leq \frac{1}{2} - L(a) \leq \frac{1}{a-1}.$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque l'entier a tend vers $+\infty$. Par encadrement :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} L(a) = \frac{1}{2}.$$

Cette limite traduit le fait qu'une première blanche, de probabilité $1/2$, rend les suivantes de plus en plus probables lorsque le facteur de renforcement devient grand.

Relevé des adaptations

- I. 6. (b) : rectification du symbole non défini dans l'hypothèse, remplacé par λ , limite déjà introduite en I. 6. (a). La borne demandée et la suite du raisonnement sont conservées.
- II. 2. (c) : demande de programme convertie en Python, avec les mêmes entrées et la même condition d'affichage. Les commandes de saisie, conversion et affichage sont expliquées dans le sujet.
- II. 2. (d) : harmonisation du domaine en $a \geq 2$, conformément aux hypothèses de II. 2; explicitation de $q_0(a) = 1$ pour traiter le rang nul.