



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1991

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, x désigne un réel appartenant à $]0, 1[$.

Partie I

1. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$s(n, 0) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Calculer $s(n, 0)$ et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$s(n, 1) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n + 1)x^n.$$

2. (a) Exprimer $(1 - x)s(n, 1)$ à l'aide de $s(n, 0)$ et en déduire la limite de $s(n, 1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. (b) Retrouver ce résultat à l'aide de la dérivation.

3. Plus généralement, pour tout couple (n, r) d'entiers naturels, on pose :

$$s(n, r) = \sum_{k=0}^n \binom{r+k}{r} x^k.$$

3. (a) On suppose que n et r sont non nuls. On rappelle que, pour tout entier naturel non nul k :

$$\binom{r+k}{r} - \binom{r+k-1}{r} = \binom{r+k-1}{r-1}.$$

En déduire que :

$$(1 - x)s(n, r) = s(n, r - 1) - \binom{n+r}{r} x^{n+1}.$$

3. (b) Déterminer les limites des suites de termes généraux $n^r x^n$ et $\binom{n+r}{r} x^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

En déduire par récurrence que, lorsque n tend vers $+\infty$, $s(n, r)$ tend vers :

$$s(r) = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

3. (c) Soit $y > 0$. Déterminer, suivant la valeur de y , la nature de la série de terme général $\binom{r+k}{r} y^k$, le nombre r étant fixé.

Partie II

On désigne par n, N des entiers naturels non nuls. On considère une succession éventuellement infinie de jets indépendants d'une pièce. La probabilité d'obtenir pile lors d'un jet est $1-x$ et celle d'obtenir face est x .

On désigne par S_n le nombre de piles obtenus au cours des n premiers jets, et par T_n le numéro du jet où l'on obtient pile pour la n -ième fois. On convient que $S_0 = 0$.

A/

1. Préciser la loi de S_n . Calculer son espérance et sa variance.
2. Préciser la loi de T_1 . Calculer son espérance et sa variance.
3. On souhaite calculer l'espérance et la variance de T_r . Soient $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}^*$.
3. (a) Montrer que l'événement $[T_r = k+r]$ est réalisé si et seulement si les événements $[S_{k+r-1} = r-1]$ et « pile est obtenu au $(k+r)$ -ième jet » le sont.

En déduire la loi de T_r . Vérifier que la somme des probabilités des événements $[T_r = k+r]$, pour $k \in \mathbb{N}$, vaut 1.

3. (b) Calculer l'espérance de T_r en utilisant la limite $s(r)$ de $s(n, r)$ introduite dans la partie I.

3. (c) Calculer de même $E(T_r^2) + E(T_r)$. En déduire la variance de T_r .

B/

On décide que le jeu s'arrête dès que pile ou face a été obtenu pour la N -ième fois. Soit Z le nombre de jets nécessaires pour que le jeu s'arrête.

1. Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre Z .
2. En utilisant une méthode analogue à celle de A/3. (a), déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la probabilité que le jeu s'arrête au $(N + k)$ -ième jet, pile étant obtenu pour la N -ième fois.
3. Donner la loi de probabilité de Z .

C/

Soient $a > 0$ et $\lambda > 1$. Un joueur parie de la façon suivante : lors du n -ième jet, il mise la somme a^{n-1} , en francs.

- Si pile sort, il reçoit la somme λa^{n-1} et il perd sa mise.
- Sinon, il perd sa mise.

On désigne par G_n la somme des profits et des pertes, celles-ci comptées négativement, du joueur après son n -ième succès, à l'issue du jet de numéro T_n .

1. Dans cette question, $a = 1$: le joueur parie un franc à chaque jet.
1. (a) Exprimer G_1 en fonction de T_1 et calculer l'espérance de G_1 .
1. (b) Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, exprimer G_r en fonction de T_r et en déduire l'espérance de G_r .
2. Dans cette question, $a > 1$.

2. (a) Exprimer G_1 en fonction de a^{T_1} . Déterminer a en fonction de λ de telle sorte que G_1 ne dépende pas des valeurs prises par T_1 .

Dans le cas général, étudier l'existence des espérances de a^{T_1} et de G_1 . Lorsque ces espérances existent, les calculer.

2. (b) Exprimer G_2 en fonction de a^{T_1} et de a^{T_2} . Étudier l'existence et déterminer la valeur de son espérance.
2. (c) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la même méthode, étudier l'existence de l'espérance de G_r , en distinguant si nécessaire le cas $r = 1$.

Montrer que lorsque $ax < 1$, cette espérance existe et vaut :

$$E(G_r) = \frac{1}{a-1} \left(1 - \frac{a^r(1-x)^r}{(1-ax)^r} \right) (1 - \lambda(1-x)).$$

Traiter séparément les éventuels cas où G_r possède une espérance alors que $ax \geq 1$.

2. (d) En déduire, si elles existent, la limite de $E(G_r)$ lorsque r tend vers $+\infty$ et la limite de $E(G_r)$ lorsque a tend vers 1 par valeurs supérieures.
3. Dans cette question, $a < 1$.
3. (a) Les conditions d'existence de l'espérance de a^{T_1} sont-elles vérifiées ? La formule de 2. (c) reste-t-elle valable ? En déduire la limite de $E(G_r)$ lorsque r tend vers $+\infty$.
3. (b) Soit g_k la somme des profits et des pertes réalisés lors du k -ième jet. Exprimer g_k en fonction d'une variable de Bernoulli associée au k -ième jet.
3. (c) Soit H_m le gain algébrique réalisé après m jets. Calculer son espérance et la limite de $E(H_m)$ lorsque m tend vers $+\infty$.