



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1991

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

Le paramètre x appartient à $]0, 1[$. Dans les questions faisant intervenir r , cet entier est fixé lorsque n ou k tend vers l'infini.

1. Il s'agit d'une somme géométrique finie de raison $x \neq 1$. Ainsi :

$$s(n, 0) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Comme $0 < x < 1$, $x^{n+1} \rightarrow 0$. Le dénominateur est strictement positif, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n, 0) = \frac{1}{1 - x}.$$

La formule est valable aussi pour $n = 0$, où elle vaut 1.

2. (a) En multipliant la somme finie par $1 - x$, les coefficients intermédiaires se soustraient :

$$(1 - x)s(n, 1) = 1 + \sum_{k=1}^n ((k+1) - k)x^k - (n+1)x^{n+1}.$$

Donc :

$$(1 - x)s(n, 1) = s(n, 0) - (n+1)x^{n+1}.$$

La croissance comparée des puissances et d'une exponentielle décroissante donne $(n+1)x^{n+1} \rightarrow 0$. Pour le voir, on peut écrire $x = e^{-c}$ avec $c = -\ln x > 0$: le terme devient $(n+1)e^{-c(n+1)}$, qui tend vers 0.

Avec le résultat de 1 et puisque $1 - x > 0$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n, 1) = \frac{1}{(1 - x)^2}.$$

2. (b) On dérive uniquement une identité entre fonctions comportant des sommes finies. Pour une variable réelle $t \in]0, 1[$:

$$t \sum_{k=0}^n t^k = \sum_{k=0}^n t^{k+1} = \frac{t - t^{n+2}}{1 - t}.$$

La dérivée du membre de gauche vaut

$$\sum_{k=0}^n (k+1)t^k.$$

La règle de dérivation d'un quotient donne pour le membre de droite :

$$\frac{(1 - (n+2)t^{n+1})(1-t) + (t - t^{n+2})}{(1-t)^2} = \frac{1 - (n+2)t^{n+1} + (n+1)t^{n+2}}{(1-t)^2}.$$

En prenant $t = x$:

$$s(n, 1) = \frac{1 - (n+2)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

Chacun des deux termes comportant un facteur linéaire en n et une puissance de x tend vers 0, par croissance comparée comme en 2. (a). La limite vaut donc à nouveau $1/(1-x)^2$.

Cette preuve ne dérive pas une série infinie et n'échange pas une limite avec une dérivée.

3. (a) Posons $c_k = \binom{r+k}{r}$. En soustrayant deux sommes finies :

$$(1-x)s(n, r) = c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k - c_{k-1})x^k - c_n x^{n+1}.$$

On a $c_0 = 1$, et l'identité de Pascal rappelée donne :

$$c_k - c_{k-1} = \binom{r+k-1}{r-1}.$$

Or $\binom{r-1}{r-1} = 1$, donc :

$$1 + \sum_{k=1}^n \binom{r+k-1}{r-1} x^k = s(n, r-1).$$

Par conséquent :

$$(1-x)s(n, r) = s(n, r-1) - \binom{n+r}{r} x^{n+1}.$$

Les indices sont valides puisque $r \geq 1$. L'égalité vaut aussi pour $n = 0$, bien que l'énoncé ne le demande pas.

3. (b) Écrivons encore $x = e^{-c}$ avec $c > 0$. Pour tout entier fixé $r \geq 0$, la croissance comparée donne :

$$n^r x^n = n^r e^{-cn} \rightarrow 0.$$

Si $r = 0$, $\binom{n}{0} x^n = x^n \rightarrow 0$. Pour $r \geq 1$:

$$\binom{n+r}{r} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+r)}{r!} \leq \frac{(n+r)^r}{r!}.$$

Pour $n \geq r$, $(n+r)^r \leq 2^r n^r$. Ainsi :

$$0 \leq \binom{n+r}{r} x^n \leq \frac{2^r}{r!} n^r x^n \rightarrow 0.$$

On obtient aussi $\binom{n+r}{r} x^{n+1} \rightarrow 0$, puisque le facteur supplémentaire x est constant.

Procédons maintenant par récurrence sur r . Au rang $r = 0$, la question 1 donne la limite $1/(1-x)$. Supposons, pour un entier $r \geq 1$, que :

$$s(n, r-1) \rightarrow \frac{1}{(1-x)^{r-1}}.$$

L'identité de 3. (a), et la limite nulle du terme de bord que nous venons de démontrer, donnent :

$$(1-x)s(n, r) \rightarrow \frac{1}{(1-x)^r}.$$

En divisant par $1 - x > 0$, on obtient $s(n, r) \rightarrow 1/(1 - x)^{r+1}$. La récurrence est achevée, et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r+k}{r} x^k = s(r) = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

Cette égalité de série provient directement de la convergence de ses sommes partielles.

3. (c) Si $0 < y < 1$, on applique 3. (b) avec y à la place de x : la série positive converge, et sa somme vaut $1/(1 - y)^{r+1}$.

Si $y = 1$, chaque terme vaut $\binom{r+k}{r} \geq 1$, donc il ne tend pas vers 0. La série diverge.

Si $y > 1$, chaque terme est au moins y^k , qui tend vers $+\infty$. La condition nécessaire de convergence d'une série n'est donc pas satisfaite, et la série diverge.

Ainsi, pour $y > 0$, la série converge exactement lorsque $y < 1$. Aucun critère de quotient ou de racine n'est nécessaire.

Partie II

On pose $p = 1 - x \in]0, 1[$. Un succès signifie l'obtention de pile. La probabilité d'un succès est p , celle d'un échec est x .

A/

1. Si B_j est l'indicatrice de pile au jet j , les B_j sont mutuellement indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p . On a

$$S_n = \sum_{j=1}^n B_j.$$

Il en résulte :

$$S_n \sim \mathcal{B}(n, p), \quad P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k x^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n).$$

La variable est bornée, donc ses moments existent. Les formules de la binomiale donnent :

$$E(S_n) = np = n(1 - x), \quad V(S_n) = np x = nx(1 - x).$$

2. Pour que le premier succès survienne au jet $m \geq 1$, il faut $m - 1$ faces puis une pile.

Par indépendance :

$$P(T_1 = m) = x^{m-1} p.$$

La probabilité des m premiers échecs vaut $x^m \rightarrow 0$, donc un premier succès survient presque sûrement. On reconnaît la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p :

$$T_1 \sim \mathcal{G}(p).$$

Puisque $0 < p < 1$, son espérance et sa variance existent et valent :

$$E(T_1) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1 - x}, \quad V(T_1) = \frac{1 - p}{p^2} = \frac{x}{(1 - x)^2}.$$

3. (a) La r -ième pile survient au jet $k + r$ si et seulement si les $k + r - 1$ premiers jets comportent exactement $r - 1$ piles et si le dernier jet est pile. Cela donne exactement l'égalité d'événements de l'énoncé.

L'événement relatif aux premiers jets est indépendant du résultat du jet $k + r$. Pour $k + r - 1 \geq 1$, on utilise la loi binomiale ; pour $r = 1, k = 0$, on utilise la convention $S_0 = 0$. Dans tous les cas :

$$P(T_r = k + r) = \binom{k + r - 1}{r - 1} p^{r-1} x^k \cdot p = \binom{k + r - 1}{r - 1} p^r x^k.$$

Les rangs inférieurs à r sont impossibles. La somme de ces probabilités est, grâce à I. 3.

(b) :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(T_r = k + r) = p^r \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+r-1}{r-1} x^k = p^r \frac{1}{(1-x)^r} = 1.$$

Ainsi le r -ième succès survient presque sûrement à un rang fini. La loi de T_r est entièrement donnée par la formule précédente sur $\{r, r+1, \dots\}$; aucune loi supplémentaire n'est supposée connue. Sur l'événement négligeable où ce succès n'aurait pas lieu, une valeur arbitraire peut être attribuée à T_r sans changer sa loi.

3. (b) Méthode 1 — Utilisation de la somme $s(r)$

La variable T_r est positive. Pour établir l'existence de son espérance et la calculer, étudions la série de son premier moment. L'identité factorielle :

$$(k+r) \binom{k+r-1}{r-1} = r \binom{k+r}{r}$$

donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+r) P(T_r = k+r) = rp^r \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+r}{r} x^k.$$

La série de droite converge par I. 3. (b). Elle vaut $rp^r s(r) = rp^r/p^{r+1}$, donc l'espérance existe et :

$$E(T_r) = \frac{r}{p} = \frac{r}{1-x}.$$

Méthode 2 — Temps d'attente entre succès

Posons $T_0 = 0$ et $D_j = T_j - T_{j-1}$ pour $1 \leq j \leq r$. Pour des entiers fixés $d_1, \dots, d_r \geq 1$,

l'événement $[D_1 = d_1, \dots, D_r = d_r]$ impose successivement $d_j - 1$ faces puis une pile dans chaque bloc. Il concerne un nombre fini, fixé, de jets. Leur indépendance donne :

$$P(D_1 = d_1, \dots, D_r = d_r) = p^r x^{\sum_{j=1}^r (d_j - 1)} = \prod_{j=1}^r (px^{d_j - 1}).$$

Chaque facteur est la probabilité d'une géométrie de paramètre p . La factorisation de cette loi conjointe, dont les probabilités marginales ont une somme égale à 1, prouve que les D_j sont mutuellement indépendantes et suivent toutes $\mathcal{G}(p)$.

Il est important de justifier cette indépendance par la loi conjointe : le seul fait de parler de blocs dont les longueurs sont aléatoires ne suffit pas.

Comme $T_r = D_1 + \dots + D_r$ presque sûrement et que chaque D_j possède une espérance finie, la linéarité donne :

$$E(T_r) = \sum_{j=1}^r E(D_j) = \frac{r}{p}.$$

La première méthode suit la demande de l'énoncé ; la seconde explique l'attente du r -ième succès comme une somme de r attentes identiques.

3. (c) Méthode 1 — Second moment obtenu par les coefficients binomiaux

L'identité factorielle :

$$(k+r)(k+r+1) \binom{k+r-1}{r-1} = r(r+1) \binom{k+r+1}{r+1}$$

donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+r)(k+r+1) P(T_r = k+r) = r(r+1) p^r \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+r+1}{r+1} x^k.$$

La dernière série converge par I. 3. (b) et vaut $s(r+1) = p^{-(r+2)}$. Donc :

$$E(T_r(T_r + 1)) = \frac{r(r+1)}{p^2}.$$

Ce calcul justifie l'existence du second moment, car $0 \leq T_r^2 \leq T_r(T_r + 1)$. Par linéarité d'espérances désormais connues comme finies :

$$E(T_r^2) + E(T_r) = \frac{r(r+1)}{p^2},$$

$$E(T_r^2) = \frac{r(r+1)}{p^2} - \frac{r}{p}.$$

La formule de Huygens donne :

$$V(T_r) = \frac{r(r+1)}{p^2} - \frac{r}{p} - \frac{r^2}{p^2} = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{rx}{p^2}.$$

Méthode 2 — Somme d'attentes indépendantes

Les variables D_j définies en 3. (b) sont indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$, et possèdent des moments d'ordre deux. La somme finie T_r possède donc aussi un second moment. La variance d'une somme indépendante donne :

$$V(T_r) = \sum_{j=1}^r V(D_j) = \frac{rx}{p^2}.$$

Avec $E(T_r) = r/p$, la formule de Huygens entraîne :

$$E(T_r^2) + E(T_r) = \frac{rx}{p^2} + \frac{r^2}{p^2} + \frac{r}{p} = \frac{r(x+r+p)}{p^2} = \frac{r(r+1)}{p^2},$$

puisque $x+p=1$. On retrouve les deux résultats demandés. Les sommes de coefficients donnent un calcul direct des moments; la décomposition indépendante permet de retrouver la variance plus rapidement.

B/

1. Il faut au moins N jets pour obtenir N occurrences d'un des deux résultats, donc $Z \geq N$.

Après $2N - 1$ jets, il est impossible que pile et face soient tous deux apparus au plus $N - 1$ fois : leur nombre total serait au plus $2N - 2$. Le jeu a donc nécessairement fini, et $Z \leq 2N - 1$.

Pour chaque $k \in \{0, \dots, N - 1\}$, la suite composée de $N - 1$ piles, puis de k faces, puis d'une pile termine exactement au rang $N + k$. Sa probabilité est $p^N x^k > 0$. Tous les rangs entre les bornes sont donc possibles :

$$Z(\Omega) = \{N, N + 1, \dots, 2N - 1\},$$

au sens des valeurs de probabilité strictement positive. En particulier, si $N = 1$, $Z = 1$.

2. Si $0 \leq k \leq N - 1$, une fin par pile au rang $N + k$ impose $N - 1$ piles et k faces parmi les $N + k - 1$ premiers jets, puis une pile au dernier jet.

Ces décomptes assurent que le jeu n'a pas fini auparavant : ni pile ni face n'atteint N occurrences dans les premiers jets. Par indépendance et dénombrement :

$$P(\text{fin au rang } N + k \text{ par pile}) = \binom{N + k - 1}{N - 1} p^N x^k.$$

Si $k \geq N$, la fin au rang $N + k$ est impossible d'après 1. On ne doit pas appliquer sans restriction la loi de T_N : elle permettrait des trajectoires où face a déjà arrêté le jeu.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la probabilité demandée vaut la formule précédente pour $0 \leq k \leq N - 1$, et 0 pour $k \geq N$.

3. En échangeant les rôles de pile et face, la probabilité d'une fin par face au rang $N + k$ est, pour $0 \leq k \leq N - 1$:

$$\binom{N + k - 1}{N - 1} x^N p^k.$$

Les fins par pile et par face sont disjointes : le dernier jet ne peut pas être les deux à la

fois. On additionne donc leurs probabilités :

$$P(Z = N + k) = \binom{N + k - 1}{N - 1} (p^N x^k + x^N p^k), \quad 0 \leq k \leq N - 1.$$

Pour tous les autres entiers, la probabilité est nulle. L'ensemble des événements ainsi décrits couvre toutes les trajectoires, puisque le jeu termine au plus tard au rang $2N - 1$; leur somme de probabilités vaut donc 1.

Pour $N = 1$, la seule probabilité vaut $p + x = 1$, conformément à $Z = 1$.

C/

On conserve $p = 1 - x$. Une pile au jet k rapporte λa^{k-1} mais coûte aussi la mise a^{k-1} . Le gain net est donc $(\lambda - 1)a^{k-1}$; une face donne le gain net $-a^{k-1}$.

Les succès jusqu'au r -ième apparaissent aux rangs $T_1, \dots, T_r$. En comptant séparément les paiements reçus et toutes les mises engagées, on a l'identité presque sûre :

$$G_r = \lambda \sum_{j=1}^r a^{T_j-1} - \sum_{k=1}^{T_r} a^{k-1}.$$

C'est une identité entre sommes finies pour chaque trajectoire où T_r est fini, événement de probabilité 1. Elle n'utilise aucune règle d'arrêt probabiliste.

1. (a) Lorsque $a = 1$, un seul paiement de montant λ a été reçu à la date T_1 , et T_1 mises d'un franc ont été engagées. Ainsi :

$$G_1 = \lambda - T_1.$$

La variable T_1 possède une espérance finie ; $|G_1| \leq \lambda + T_1$ garantit l'existence de celle de G_1 . Par linéarité :

$$E(G_1) = \lambda - \frac{1}{p} = \lambda - \frac{1}{1-x}.$$

1. (b) Au rang T_r , le joueur a reçu r paiements de montant λ et engagé T_r mises d'un franc. Ainsi :

$$G_r = r\lambda - T_r.$$

Comme $E(T_r) = r/p < +\infty$, l'espérance de G_r existe et :

$$E(G_r) = r\lambda - \frac{r}{p} = r \left(\lambda - \frac{1}{1-x} \right).$$

Le signe de l'espérance dépend donc de la comparaison entre $\lambda(1-x)$ et 1.

2. (a) Pour $a > 1$, la somme géométrique des mises jusqu'au premier succès vaut $(a^{T_1} - 1)/(a - 1)$. Ainsi :

$$G_1 = \lambda a^{T_1-1} - \frac{a^{T_1} - 1}{a - 1} = \frac{1}{a - 1} + \left(\frac{\lambda}{a} - \frac{1}{a - 1} \right) a^{T_1}.$$

Posons $c = \lambda/a - 1/(a - 1)$. Les valeurs $T_1 = 1$ et $T_1 = 2$ ont toutes deux une probabilité strictement positive et donnent deux valeurs distinctes de a^{T_1} , puisque $a > 1$. Par conséquent, G_1 est constant si et seulement si $c = 0$.

Cette condition équivaut à $\lambda(a - 1) = a$, puis à :

$$a = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Cette valeur est bien supérieure à 1 car $\lambda > 1$. Dans ce cas :

$$G_1 = \frac{1}{a - 1} = \lambda - 1,$$

quelle que soit la date du premier succès, et son espérance existe toujours.

Étude de $E(a^{T_1})$: la variable est positive. D'après la loi géométrique :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} a^m P(T_1 = m) = ap \sum_{k=0}^{+\infty} (ax)^k.$$

Cette série géométrique converge exactement lorsque $ax < 1$. Dans ce cas :

$$E(a^{T_1}) = \frac{ap}{1 - ax}.$$

Si $ax \geq 1$, la série diverge : a^{T_1} n'admet pas d'espérance finie.

Étude de $E(G_1)$: si $c = 0$, G_1 est constant, même lorsque a^{T_1} n'est pas intégrable. Il faut donc traiter ce cas avant toute utilisation de la linéarité.

Si $c \neq 0$, l'identité $G_1 = 1/(a-1) + ca^{T_1}$ montre que l'intégrabilité de G_1 et celle de a^{T_1} sont équivalentes. En effet, dans un sens $|G_1| \leq 1/(a-1) + |c|a^{T_1}$; dans l'autre :

$$a^{T_1} = \frac{|G_1 - 1/(a-1)|}{|c|} \leq \frac{|G_1| + 1/(a-1)}{|c|}.$$

Ainsi, si $c \neq 0$, l'espérance de G_1 existe exactement lorsque $ax < 1$. Dans ce domaine :

$$E(G_1) = \frac{1}{a-1} + \left(\frac{\lambda}{a} - \frac{1}{a-1} \right) \frac{ap}{1-ax} = \frac{\lambda p - 1}{1-ax}.$$

La simplification utilise $p+x=1$. En résumé, $E(G_1)$ existe si et seulement si $ax < 1$ ou $a = \lambda/(\lambda-1)$; sa valeur dans le cas constant est $\lambda-1$.

2. (b) L'identité générale des gains donne :

$$G_2 = \lambda a^{T_1-1} + \lambda a^{T_2-1} - \frac{a^{T_2} - 1}{a-1},$$

soit, avec le même coefficient c :

$$G_2 = \frac{1}{a-1} + \frac{\lambda}{a} a^{T_1} + ca^{T_2}.$$

Pour calculer les moments exponentiels, utilisons la loi obtenue en A/3. (a). Pour tout $j \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^{k+j} P(T_j = k+j) = a^j p^j \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+j-1}{j-1} (ax)^k.$$

Par I. 3. (c), cette série converge exactement lorsque $ax < 1$. Dans ce cas, en posant :

$$Q = \frac{ap}{1-ax},$$

on a $E(a^{T_j}) = Q^j$. En particulier les deux moments nécessaires au gain G_2 sont finis. Par domination par une somme finie de variables intégrables, G_2 est intégrable et :

$$E(G_2) = \frac{1}{a-1} + \frac{\lambda}{a} Q + cQ^2.$$

Une forme simplifiée, utile pour la suite, est :

$$E(G_2) = \frac{1 - \lambda p}{a - 1} (1 - Q^2).$$

Pour la vérifier, écrivons l'expression précédente comme

$\frac{\lambda}{a}(Q + Q^2) - (Q^2 - 1)/(a - 1)$, puis utilisons :

$$Q - 1 = \frac{a - 1}{1 - ax}, \quad \frac{Q}{a} = \frac{p}{1 - ax}.$$

Il reste à établir la non-existence pour $ax \geq 1$, sans supposer qu'une différence de variables non intégrables ne pourrait jamais se simplifier.

Si $c = 0$, on a $G_2 = 1/(a - 1) + (\lambda/a)a^{T_1} > 0$. Comme $E(a^{T_1})$ n'est pas finie, G_2 n'est pas intégrable.

Si $c \neq 0$, considérons les événements disjoints $E_k = [T_1 = 1, T_2 = k + 2]$, pour $k \geq 0$. Ils imposent une pile, k faces, puis une pile, donc $P(E_k) = p^2 x^k$. Sur E_k :

$$G_2 = \frac{1}{a - 1} + \lambda + ca^{k+2}.$$

Le terme constant est fixe et $a^{k+2} \rightarrow +\infty$. Pour k assez grand, l'inégalité triangulaire inversée donne donc $|G_2| \geq |c|a^{k+2}/2$. Si G_2 était intégrable, pour tous les entiers $M \geq K$ avec K assez grand, la sommation sur les événements disjoints donnerait :

$$E(|G_2|) \geq \frac{|c|a^2 p^2}{2} \sum_{k=K}^M (ax)^k.$$

Lorsque $ax \geq 1$, ces sommes finies augmentent sans borne quand M tend vers l'infini. Elles ne peuvent être majorées par une espérance absolue finie. Ainsi G_2 n'est pas intégrable.

Conclusion

pour $a > 1$, G_2 possède une espérance exactement lorsque $ax < 1$, et sa valeur est celle donnée ci-dessus.

2. (c) Question adaptée au programme actuel : la formule est demandée dans le domaine $ax < 1$, et le cas exceptionnel d'une espérance existante pour $r = 1$ est traité séparément. La formulation générale du PDF omet ce cas et peut conduire à une expression indéfinie lorsque $ax = 1$.

Pour tout $r \geq 1$, l'identité des gains devient :

$$G_r = \frac{1}{a-1} + \frac{\lambda}{a} \sum_{j=1}^{r-1} a^{T_j} + ca^{T_r},$$

avec une somme vide si $r = 1$. Elle s'écrit aussi :

$$G_r = \frac{\lambda}{a} \sum_{j=1}^r a^{T_j} - \frac{a^{T_r} - 1}{a-1}.$$

Existence lorsque $ax < 1$

Tous les a^{T_j} , pour $1 \leq j \leq r$, possèdent une espérance finie, comme montré en 2. (b), et $E(a^{T_j}) = Q^j$. L'identité finie garantit alors l'intégrabilité de G_r , sans qu'il soit nécessaire de supposer les T_j indépendants.

Par linéarité :

$$E(G_r) = \frac{\lambda}{a} \sum_{j=1}^r Q^j - \frac{Q^r - 1}{a-1}.$$

Pour $a > 1$ et $ax < 1$, on a $Q > 1$ car $Q - 1 = (a-1)/(1-ax) > 0$. La somme géométrique finie donne :

$$\sum_{j=1}^r Q^j = \frac{Q(Q^r - 1)}{Q - 1}, \quad \frac{\lambda}{a} \frac{Q}{Q-1} = \frac{\lambda p}{a-1}.$$

Ainsi :

$$E(G_r) = \frac{\lambda p - 1}{a - 1} (Q^r - 1) = \frac{1 - \lambda p}{a - 1} \left(1 - \frac{a^r p^r}{(1 - ax)^r} \right),$$

qui est la formule demandée, avec $p = 1 - x$.

Non-existence pour $ax \geq 1$, sauf un cas au premier succès

Si $c \neq 0$, fixons les $r - 1$ premiers jets comme des piles, suivis de k faces puis d'une pile. L'événement E_k ainsi obtenu a une probabilité $p^r x^k$ et impose $T_j = j$ pour $j < r$, puis $T_r = r + k$. Les E_k sont disjoints. Sur chacun d'eux :

$$G_r = A_r + ca^{r+k}, \quad A_r = \frac{1}{a - 1} + \frac{\lambda}{a} \sum_{j=1}^{r-1} a^j.$$

La quantité A_r est constante pour r fixé. Pour k assez grand, $|G_r| \geq |c|a^{r+k}/2$. Si G_r était intégrable, pour tous les entiers $M \geq K$ avec K assez grand, le calcul sur ces événements donnerait :

$$E(|G_r|) \geq \frac{|c|a^r p^r}{2} \sum_{k=K}^M (ax)^k.$$

Les sommes de droite augmentent sans borne lorsque M tend vers l'infini, puisque $ax \geq 1$. Elles ne peuvent être majorées par une espérance absolue finie. Ainsi G_r n'est pas intégrable.

Si $c = 0$ et $r \geq 2$, on a :

$$G_r = \frac{1}{a - 1} + \frac{\lambda}{a} \sum_{j=1}^{r-1} a^{T_j} \geq \frac{\lambda}{a} a^{T_1} > 0.$$

Le moment de a^{T_1} n'est pas fini lorsque $ax \geq 1$, donc celui de G_r ne l'est pas non plus.

Enfin, si $c = 0$ et $r = 1$, la somme est vide et $G_1 = 1/(a - 1) = \lambda - 1$ est constant. Son espérance existe pour toute valeur de $x \in]0, 1[$, y compris $ax \geq 1$.

Conclusion complète : pour $r \geq 2$, l'espérance de G_r existe exactement lorsque $ax < 1$. Pour $r = 1$, elle existe lorsque $ax < 1$ ou lorsque $a = \lambda/(\lambda - 1)$. Dans ce dernier cas, elle vaut $\lambda - 1$. En particulier, si $a = 1/x$ et $\lambda = 1/p$, le gain G_1 reste constant mais la formule du PDF contient un dénominateur nul ; sa rectification est nécessaire.

2. (d) Limite lorsque $r \rightarrow +\infty$

On fixe $a > 1$. Pour que toutes les espérances à partir de $r = 2$ soient définies et finies, il faut $ax < 1$. Si $ax \geq 1$, le cas constant au premier succès ne définit pas une suite d'espérances finies ; il ne permet donc pas de demander une telle limite.

Supposons $1 < a < 1/x$. Alors $Q > 1$, donc $Q^r \rightarrow +\infty$. La formule précédente donne :

$$E(G_r) = \frac{\lambda p - 1}{a - 1} (Q^r - 1).$$

Puisque $a - 1 > 0$, on obtient :

- Si $\lambda p > 1$, $E(G_r) \rightarrow +\infty$.
- Si $\lambda p < 1$, $E(G_r) \rightarrow -\infty$.
- Si $\lambda p = 1$, $E(G_r) = 0$ pour tout r , donc la limite vaut 0.

Dans les deux premiers cas, il s'agit de limites infinies ; seule la troisième fournit une limite réelle finie.

Limite lorsque $a \rightarrow 1^+$, pour r fixé

Les paramètres r , x et λ sont désormais fixés. Comme $x < 1$, les valeurs de $a > 1$ suffisamment proches de 1 vérifient $ax < 1$. La formule est donc valide dans tout un voisinage à droite de 1.

On a $Q(a) \rightarrow 1$ et, exactement :

$$\frac{Q(a) - 1}{a - 1} = \frac{1}{1 - ax}.$$

La factorisation $Q^r - 1 = (Q - 1)(1 + Q + \dots + Q^{r-1})$ donne :

$$E(G_r) = (\lambda p - 1) \frac{1 + Q(a) + \dots + Q(a)^{r-1}}{1 - ax}.$$

Le numérateur de la fraction tend vers r et le dénominateur vers $p > 0$. Ainsi :

$$\lim_{a \rightarrow 1^+} E(G_r) = \frac{r(\lambda p - 1)}{p} = r \left(\lambda - \frac{1}{1 - x} \right).$$

On retrouve exactement le résultat de C/1. (b). La factorisation finie suffit ; aucune règle de l'Hôpital n'est utilisée.

3. (a) L'hypothèse générale $a > 0$ reste en vigueur : on a donc $0 < a < 1$. Puisque $x < 1$, $ax < 1$. Les conditions d'existence de $E(a^{T_1})$ sont vérifiées ; plus directement $0 < a^{T_1} \leq 1$, donc cette variable est bornée.

Pour tous les $j \geq 1$, le calcul de série de C/2. (b) reste valable et donne :

$$E(a^{T_j}) = Q^j, \quad Q = \frac{ap}{1 - ax}.$$

Chaque gain élémentaire est de valeur absolue au plus Ma^{k-1} , avec $M = \max(1, \lambda - 1)$. Ainsi, sur chaque trajectoire :

$$|G_r| \leq M \sum_{k=1}^{T_r} a^{k-1} \leq \frac{M}{1 - a}.$$

L'espérance de G_r existe donc pour tout r . L'identité des gains reste valable pour $a \neq 1$, et le calcul de la somme finie des Q^j reste valable pour $Q \neq 1$. Or :

$$Q - 1 = \frac{a - 1}{1 - ax} < 0,$$

donc $0 < Q < 1$. Le même calcul que dans C/2. (c) donne :

$$E(G_r) = \frac{1 - \lambda p}{a - 1} (1 - Q^r).$$

Comme $Q^r \rightarrow 0$, on obtient :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} E(G_r) = \frac{1 - \lambda p}{a - 1} = \frac{\lambda(1 - x) - 1}{1 - a}.$$

Cette limite est finie pour les paramètres considérés.

3. (b) Posons $B_k = \mathbf{1}_{[\text{pile au jet } k]}$. Alors B_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1 - x$.

Si $B_k = 1$, le gain net vaut $(\lambda - 1)a^{k-1}$; si $B_k = 0$, il vaut $-a^{k-1}$. Ces deux valeurs se résument par :

$$g_k = a^{k-1}(\lambda B_k - 1).$$

Cette variable est bornée pour k fixé, et son espérance est :

$$E(g_k) = a^{k-1}(\lambda E(B_k) - 1) = a^{k-1}(\lambda p - 1).$$

3. (c) Par définition,

$$H_m = \sum_{k=1}^m g_k.$$

C'est une somme finie de variables intégrables. Par linéarité :

$$E(H_m) = \sum_{k=1}^m E(g_k) = (\lambda p - 1) \sum_{k=1}^m a^{k-1}.$$

Pour $0 < a < 1$, la somme géométrique vaut $(1 - a^m)/(1 - a)$, donc :

$$E(H_m) = \frac{\lambda(1 - x) - 1}{1 - a}(1 - a^m).$$

Puisque $a^m \rightarrow 0$:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} E(H_m) = \frac{\lambda(1 - x) - 1}{1 - a}.$$

Cette limite coïncide avec celle de C/3. (a). Les deux calculs sont indépendants : ici l'arrêt se fait après un nombre déterministe de jets ; auparavant il se faisait au rang aléatoire du r -ième succès. Aucun échange entre une somme infinie et une espérance n'est nécessaire pour établir ces limites.

Relevé des adaptations

- II. A/3. (a) : explicitation de $S_0 = 0$, nécessaire au cas $r = 1, k = 0$; aucune modification de la loi ni des résultats demandés.
- II. C/2. (c) : précision du domaine $ax < 1$ pour la formule annoncée et traitement séparé du cas exceptionnel $r = 1, a = \lambda/(\lambda - 1)$. Le PDF affirme la formule dès que l'espérance existe, alors que ce cas peut donner un gain constant avec $ax = 1$, où la formule contient un dénominateur nul. L'étude d'existence est conservée intégralement.