



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1990

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Préambule

Dans tout le problème, a et b sont deux réels tels que $a < b$, et φ est une fonction continue et strictement croissante sur $[a, b]$, telle que $\varphi(a) \leq 0 \leq \varphi(b)$. On note ω l'unique réel de $[a, b]$ tel que $\varphi(\omega) = 0$.

Une évaluation de φ est le calcul d'une valeur de cette fonction. On étudie deux types d'algorithmes permettant d'obtenir, à partir de $a \leq \omega \leq b$, un encadrement plus fin par évaluations successives.

Dans le premier type, étudié en partie III, on fixe une précision et on estime le nombre moyen d'évaluations nécessaires. Dans le second type, étudié en partie IV, on fixe le nombre d'évaluations et on estime la précision moyenne obtenue. Pour chaque type, on recherche un algorithme optimal au sens précisé dans les questions.

La partie IV est indépendante des autres parties.

Partie I. Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+2)(x-1)}{x \ln(x)} & \text{si } x \neq 1, \\ 3 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est continue.
1. (b) Déterminer la limite de f en 0.
1. (c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que f est dérivable en 1 et déterminer $f'(1)$.
3. (a) Calculer la dérivée de f . Montrer que, pour $x \neq 1$, le signe de $f'(x)$ est celui de :

$$g(x) = \ln(x) - \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2}.$$

3. (b) Calculer g' et montrer que le signe de $g'(x)$ est celui de :

$$h(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4.$$

3. (c) En remarquant que 1 et -2 sont des racines de h , décomposer $h(x)$ en produit de facteurs du premier degré.
4. (a) Dresser le tableau de variation de g .
4. (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution t autre que 1. Vérifier que $\sqrt{2} < t < 2$.
5. (a) Dresser le tableau de variation de f .
5. (b) Donner l'allure de la courbe représentative de f .
6. Pour tout entier $p \geq 2$, on pose :

$$c_p = \frac{(p+2)(p-1)}{p \ln(p)}.$$

Montrer que $(c_p)_{p \geq 2}$ est strictement croissante.

Dans toute la suite du problème, p désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Partie II. Étude d'une variable aléatoire

1. On considère une variable Z à valeurs dans $\{1, 2, \dots, p-1\}$ telle que :

$$P(Z = i) = \frac{1}{p} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq p-2, \quad P(Z = p-1) = \frac{2}{p}.$$

Pour $p = 2$, Z est donc certaine, égale à 1.

1. (a) Calculer $E(Z)$.

1. (b) Calculer $V(Z)$. Contrôler le résultat pour $p = 2$.

2. On considère p boîtes $B_1, \dots, B_p$. Un objet est caché dans une boîte choisie au hasard de manière équiprobable. On cherche à déterminer le numéro de cette boîte en ouvrant successivement $B_1, B_2, \dots$, jusqu'à ce que l'objet soit découvert ou qu'une seule boîte reste fermée.

Cet algorithme permet de localiser l'objet. On note Y le nombre de boîtes ouvertes. Montrer que Y suit la même loi que Z définie en II.1. En déduire le nombre moyen de boîtes ouvertes.

Partie III. Étude d'un premier type d'algorithme

1. Algorithme A_p

À partir d'un encadrement $u \leq \omega \leq v$, où $u < v$ sont dans $[a, b]$, on veut obtenir $u' \leq \omega \leq v'$ tel que :

$$u \leq u' \leq \omega \leq v' \leq v, \quad v' - u' = \frac{v - u}{p}. \quad (1)$$

On évalue successivement :

$$\varphi\left(u + \frac{v-u}{p}\right), \quad \varphi\left(u + \frac{2(v-u)}{p}\right), \quad \dots, \quad \varphi\left(u + \frac{k(v-u)}{p}\right),$$

jusqu'à ce que $\varphi(u + k(v-u)/p) \geq 0$ ou $k = p-1$.

Si $\varphi(u + k(v-u)/p) \geq 0$, on pose :

$$u' = u + \frac{(k-1)(v-u)}{p}, \quad v' = u + \frac{k(v-u)}{p}.$$

Si $\varphi(u + k(v-u)/p) < 0$, on pose :

$$u' = u + \frac{(p-1)(v-u)}{p}, \quad v' = u + \frac{p(v-u)}{p} = v.$$

Montrer que les conditions (1) sont satisfaites.

2. Application répétée de A_p

Soit $0 < \varepsilon < 1$. À partir de $a \leq \omega \leq b$, on cherche $c \leq \omega \leq d$ tel que $d - c < \varepsilon(b - a)$.

On itère A_p pour obtenir les encadrements $a_i \leq \omega \leq b_i$, chacun déduit du précédent, avec $a_0 = a$ et $b_0 = b$. On s'arrête dès que $b_n - a_n < \varepsilon(b - a)$. L'entier n est le nombre d'applications nécessaires.

2. (a) Exprimer $b_i - a_i$ en fonction de $b - a$.

2. (b) Montrer que :

$$n = \left\lceil 1 - \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(p)} \right\rceil.$$

3. Nombre moyen d'évaluations

Pour évaluer cette méthode, on suppose que la position ω de la racine suit une loi uniforme sur $[a, b]$. Pour $1 \leq i \leq n$, on note Y_i le nombre d'évaluations de φ à la i -ième application de A_p .

3. (a) Montrer que Y_i suit la même loi que Y définie en II.2.

3. (b) On pose $V_p(\varepsilon) = Y_1 + \dots + Y_n$. Calculer son espérance, notée $\bar{V}_p(\varepsilon)$.

3. (c) Pour p fixé, montrer que :

$$\bar{V}_p(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{c_p}{2}(-\ln \varepsilon), \quad c_p = \frac{(p+2)(p-1)}{p \ln(p)}.$$

3. (d) Pour ε suffisamment proche de 0, on assimile $\bar{V}_p(\varepsilon)$ à $c_p(-\ln \varepsilon)/2$. En utilisant cette approximation, déterminer la valeur optimale de p , c'est-à-dire celle qui minimise le nombre moyen d'évaluations dans la procédure de III.2.

Partie IV. Étude d'un second type d'algorithme

On fixe un réel $q \in]0, 1[$ et un entier $N \geq 2$.

1. Algorithme B_q

À partir d'un encadrement $\alpha \leq \omega \leq \beta$, avec $\alpha < \beta$ dans $[a, b]$, on veut obtenir $\alpha' \leq \omega \leq \beta'$ tel que :

$$\alpha \leq \alpha' \leq \omega \leq \beta' \leq \beta, \quad \beta' - \alpha' \leq (\beta - \alpha) \max(q, 1 - q). \quad (2)$$

On pose $\gamma = (1 - q)\alpha + q\beta$ et on calcule $\varphi(\gamma)$.

Si $\varphi(\gamma) \geq 0$, on pose $\alpha' = \alpha$ et $\beta' = \gamma$. Sinon, on pose $\alpha' = \gamma$ et $\beta' = \beta$.

Montrer que les conditions (2) sont satisfaites et préciser $\beta' - \alpha'$ dans chaque cas.

2. Étude d'une variable aléatoire

On conserve les notations de IV.1. On suppose que ω suit une loi uniforme sur $[\alpha, \beta]$. On note R_q la longueur $\beta' - \alpha'$ obtenue après une application de B_q .

2. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par R_q . Examiner le cas $q = 1/2$.

2. (b) Déterminer la loi de R_q .

2. (c) Montrer que $E(R_q) = (2q^2 - 2q + 1)(\beta - \alpha)$.

2. (d) Calculer $V(R_q)$ en distinguant $q \neq 1/2$ et $q = 1/2$.

3. Application répétée de B_q

On itère N fois B_q pour obtenir, à partir de $a \leq \omega \leq b$, les encadrements $\alpha_i \leq \omega \leq \beta_i$, chacun déduit du précédent, avec $\alpha_0 = a$ et $\beta_0 = b$.

On suppose que ω suit une loi uniforme sur $[a, b]$, et on note $T_q = \beta_N - \alpha_N$ la longueur finale.

3. (a) Pour $1 \leq i \leq N$, on pose $\gamma_i = (1 - q)\alpha_{i-1} + q\beta_{i-1}$. La variable X_i vaut 1 si $\varphi(\gamma_i) \geq 0$, et 0 sinon. Montrer que les X_i ont une même loi, à préciser.

3. (b) On pose $S_q = X_1 + \dots + X_N$. Montrer que $S_q \sim \mathcal{B}(N, q)$.

3. (c) Montrer que, si $S_q = k$, alors :

$$\beta_N - \alpha_N = q^k(1 - q)^{N-k}(b - a).$$

En déduire les valeurs possibles de T_q . Examiner $q = 1/2$.

Si $q \neq 1/2$, montrer que, pour $k \in \{0, \dots, N\}$:

$$P(T_q = q^k(1-q)^{N-k}(b-a)) = \binom{N}{k} q^k(1-q)^{N-k}.$$

3. (d) Calculer $E(T_q)$ et $V(T_q)$ pour $q \neq 1/2$. Vérifier que les expressions obtenues restent valables pour $q = 1/2$.
4. Montrer que $q = 1/2$ minimise $E(T_q)$ lorsque N est fixé et q parcourt $]0, 1[$. Conclure.