



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1990

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie I

Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{si } x \in]0, \frac{\pi}{2}], \quad f(0) = 0.$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ dans l'intervalle de définition.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
4. Étudier la variation de f et construire sa courbe représentative.

Partie II

Soit $A_n = (a_{ij})$ la matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ dont les coefficients sont définis par $a_{ij} = 1$ si $|i - j| = 1$ et $a_{ij} = 0$ si $|i - j| \neq 1$. Ainsi,

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

la définition par les coefficients valant pour tout $n \geq 2$.

On se propose d'abord de diagonaliser A_n , puis d'étudier une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A_n .

On identifie les matrices colonnes $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ aux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ muni de sa base

canonique, et les matrices à une ligne et une colonne aux nombres réels. Pour $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$, on écrit ainsi

$${}^tXY = {}^tYX = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

La notation tX désigne la transposée de X .

1. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on pose $q_n(X) = {}^tX A_n X$. Calculer $A_n X$ et vérifier que

$$q_n(X) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

2. Étude du cas particulier $n = 2$

(a) Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, $-{}^tXX \leq q_2(X) \leq {}^tXX$.

(b) Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A_2 .

(c) Trouver les éléments $X \in \mathbb{R}^2$ tels que $|q_2(X)| = {}^tXX$.

3. Encadrement des valeurs propres de A_n

(a) Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$-\sum_{i=1}^{n-1} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq q_n(X) \leq \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^2 + x_{i+1}^2).$$

(b) En déduire que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $-2{}^tXX \leq q_n(X) \leq 2{}^tXX$, et que l'égalité $|q_n(X)| = 2{}^tXX$ équivaut à $X = 0$.

(c) Soient λ une valeur propre de A_n et X un vecteur propre associé. Montrer que $q_n(X) = \lambda {}^tXX$. En conclure que $-2 < \lambda < 2$.

4. Diagonalisation de A_n

Pour tout $\lambda \in]-2, 2[$, on note E_λ l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que $u_{k+2} = \lambda u_{k+1} - u_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On pose $\lambda = 2 \cos t$, où $t \in]0, \pi[$.

- (a) Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E_\lambda$. Exprimer u_k en fonction de u_0, u_1, k et t .
- (b) Soit $F_\lambda(n)$ le sous-espace vectoriel de E_λ constitué des suites vérifiant en outre $u_0 = u_{n+1} = 0$. Déterminer, en discutant selon les valeurs de t , les éléments de $F_\lambda(n)$.
- (c) Soient $\lambda \in]-2, 2[$ et $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. On définit une suite par $u_0 = 0, u_k = x_k$ pour $1 \leq k \leq n, u_{n+1} = 0$, puis $u_{n+k+2} = \lambda u_{n+k+1} - u_{n+k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Montrer que λ est une valeur propre de A_n et que X est un vecteur propre associé si et seulement si cette suite appartient à $F_\lambda(n)$.

- (d) En conclure que les valeurs propres de A_n sont les nombres $\lambda_p = 2 \cos \theta_p$, où $\theta_p = \frac{p\pi}{n+1}$ et $1 \leq p \leq n$. Montrer que les vecteurs

$$X_p = \begin{pmatrix} \sin \theta_p \\ \sin(2\theta_p) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_p) \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

5. Application

On applique les résultats précédents à la matrice M_n dont les colonnes sont les vecteurs X_p .

- (a) Soient λ et μ des valeurs propres distinctes de A_n , et X, Y des vecteurs propres associés respectivement à λ, μ . Vérifier que $\lambda^t XY = \mu^t XY$.

En déduire que, pour $p, q \in \{1, \dots, n\}$ distincts,

$$\sum_{k=1}^n \sin(k\theta_p) \sin(k\theta_q) = 0.$$

(b) À l'aide des formules d'addition, vérifier l'identité réelle

$$2 \sin \theta \cos(2k\theta) = \sin((2k+1)\theta) - \sin((2k-1)\theta).$$

En l'appliquant à $\theta = \theta_p$ et en sommant pour $k = 0, \dots, n$, montrer que

$$\sum_{k=0}^n \cos(2k\theta_p) = 0.$$

En déduire que

$$\sum_{k=1}^n \cos(2k\theta_p) = -1,$$

puis montrer que ${}^t(X_p)X_p = \frac{n+1}{2}$.

(c) Soit $M_n = (b_{k\ell})$ la matrice carrée d'ordre n définie par

$$b_{k\ell} = \sin\left(\frac{k\ell\pi}{n+1}\right) = \sin(k\theta_\ell) = \sin(\ell\theta_k).$$

En utilisant les résultats précédents, montrer que $M_n^2 = \alpha_n I_n$, où I_n est la matrice unité d'ordre n et α_n un réel que l'on précisera. En déduire que M_n est inversible et déterminer son inverse.

Partie III

On conserve les notations θ_p et M_n de la partie II, avec $n \geq 2$.

1. À tout $A = {}^t(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, on associe la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(t) = \sum_{k=1}^n a_k \sin(kt).$$

(a) On rappelle que, pour tous réels a, b , $2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$. Pour tous entiers naturels k, ℓ , calculer $\int_0^\pi \sin(kt) \sin(\ell t) dt$.

(b) En déduire que

$$\int_0^\pi g(t)^2 dt = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

(c) Calculer $M_n A$. Montrer que, pour $1 \leq k \leq n$,

$$a_k = \frac{2}{n+1} \sum_{p=1}^n g(\theta_p) \sin(k\theta_p).$$

(d) Soit $B = {}^t(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique $A \in \mathbb{R}^n$ tel que, pour $1 \leq p \leq n$, $g(\theta_p) = b_p$.

On étudie ensuite l'unique fonction de la forme

$$g_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k(n) \sin(kt)$$

vérifiant $g_n(\theta_p) = 1$ pour $1 \leq p \leq n$.

2. Étude des coefficients $a_k(n)$

(a) Montrer que $a_k(n) = 0$ si k est pair, et que, si k est impair,

$$a_k(n) = \frac{2}{n+1} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)}.$$

On pourra s'inspirer de la méthode employée à la question II.5.(b).

(b) Grâce aux résultats de la partie I, en déduire que, pour tout entier impair k tel que $1 \leq k \leq n$,

$$0 \leq \frac{4}{k\pi} - a_k(n) \leq \frac{4}{(n+1)\pi}.$$

(c) Soit k un entier naturel non nul fixé, pair ou impair. Déterminer $\beta_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_k(n)$, la suite étant considérée pour $n \geq \max(2, k)$.

3. Pour tout réel t , on pose

$$h_n(t) = \sum_{k=1}^n \beta_k \sin(kt).$$

(a) En utilisant les résultats de III.1.(b) et III.2.(b), montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi [g_n(t) - h_n(t)]^2 dt = 0.$$

(b) On admet que

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi [1 - h_n(t)]^2 dt = 0$.

(c) En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $J_n = \int_0^\pi [1 - g_n(t)]^2 dt$.