



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1990

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Préambule

Le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à la fonction continue φ sur $[a, b]$, assure l'existence d'une racine ω , puisque $\varphi(a) \leq 0 \leq \varphi(b)$. La stricte croissance en assure l'unicité. Pour tout $x \in [a, b]$:

$$\varphi(x) \geq 0 \iff x \geq \omega, \quad \varphi(x) < 0 \iff x < \omega.$$

Ces équivalences justifient les décisions des deux algorithmes. Dans les parties probabilistes, la loi uniforme porte sur la position de la racine dans l'intervalle initial ; les décisions de l'algorithme dépendent de cette position.

Partie I. Étude d'une fonction

1. (a) Sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$, f est un quotient de fonctions continues dont le dénominateur est non nul. Elle y est donc continue.

Pour $x \neq 1$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{x+2}{x} \frac{x-1}{\ln x}.$$

La dérivabilité de $\ln$ en 1 donne $\ln x / (x - 1) \rightarrow 1$. Donc $(x - 1) / \ln x \rightarrow 1$, tandis que $(x + 2) / x \rightarrow 3$. Par conséquent $f(x) \rightarrow 3 = f(1)$ lorsque $x \rightarrow 1$.

La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

1. (b) Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $(x + 2)(x - 1) \rightarrow -2$. Les croissances comparées donnent $x \ln x \rightarrow 0$, avec $x \ln x < 0$ pour $0 < x < 1$. Ainsi :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{-2}{x \ln x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

1. (c) Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $(x+2)(x-1) = x^2 + x - 2 \sim x^2$. Donc :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.$$

Les croissances comparées donnent $\ln x/x \rightarrow 0$ avec un quotient positif pour $x > 1$.
Ainsi $f(x) \rightarrow +\infty$.

2. Posons $h = x - 1$. Le développement limité du logarithme à l'ordre 2 en 0 est :

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2).$$

Par multiplication par $1+h$:

$$(1+h)\ln(1+h) = h + \frac{h^2}{2} + o(h^2).$$

Le numérateur de $f(1+h)$ est $(3+h)h$. Pour $h \neq 0$, on simplifie donc :

$$f(1+h) = \frac{3+h}{1+h/2+o(h)}.$$

Pour obtenir le quotient différentiel sans composer de développements limités :

$$\frac{f(1+h)-3}{h} = \frac{(3+h)-3(1+h/2+o(h))}{h(1+h/2+o(h))}$$

$$= \frac{-h/2+o(h)}{h(1+h/2+o(h))} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Le dénominateur simplifié tend vers 1 et est donc non nul pour h suffisamment petit.
Comme $f(1) = 3$, cette limite prouve que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = -1/2$.

3. (a) Pour $x > 0$, $x \neq 1$, la règle de dérivation d'un quotient donne :

$$f'(x) = \frac{(2x+1)x \ln x - (x^2+x-2)(\ln x+1)}{x^2(\ln x)^2}.$$

Le coefficient de $\ln x$ au numérateur est $(2x+1)x - (x^2+x-2) = x^2+2$. Ainsi :

$$f'(x) = \frac{(x^2+2) \ln x - (x^2+x-2)}{x^2(\ln x)^2} = \frac{x^2+2}{x^2(\ln x)^2} g(x).$$

Le facteur $(x^2+2)/(x^2(\ln x)^2)$ est strictement positif sur le domaine considéré. Donc $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe pour $x \neq 1$. Au point 1, la valeur de la dérivée est celle calculée en I.2.

3. (b) La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$, puisque $x^2+2 > 0$. La dérivée de son terme rationnel vaut :

$$\left(\frac{x^2+x-2}{x^2+2} \right)' = \frac{(2x+1)(x^2+2) - 2x(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2+8x+2}{(x^2+2)^2}.$$

Donc :

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2-8x-2}{(x^2+2)^2} = \frac{(x^2+2)^2 + x(x^2-8x-2)}{x(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{x^4+x^3-4x^2-2x+4}{x(x^2+2)^2} = \frac{h(x)}{x(x^2+2)^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif pour $x > 0$. Le signe de g' est donc celui de h .

3. (c) On a $h(1) = 1 + 1 - 4 - 2 + 4 = 0$ et $h(-2) = 16 - 8 - 16 + 4 + 4 = 0$. La factorisation suivante se vérifie par multiplication :

$$h(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 - 2).$$

En effet, le produit vaut $x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$. Les deux facteurs du second degré se décomposent sur $\mathbb{R}$:

$$h(x) = (x - 1)(x + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

Cette décomposition utilise uniquement des racines réelles.

4. (a) Pour $x > 0$, les facteurs $x + 2$ et $x + \sqrt{2}$ sont strictement positifs. Le signe de $h(x)$, donc de $g'(x)$, est celui de $(x - 1)(x - \sqrt{2})$.

Ainsi g est strictement croissante sur $]0, 1]$, strictement décroissante sur $[1, \sqrt{2}]$, puis strictement croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.

On a $g(1) = 0$. De plus, $(x^2 + x - 2)/(x^2 + 2) \rightarrow -1$ en 0^+ et tend vers 1 en $+\infty$. Donc :

$$g(x) \rightarrow -\infty \text{ en } 0^+, \quad g(x) \rightarrow +\infty \text{ en } +\infty.$$

Enfin :

$$g(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\sqrt{2}}{4} < 0,$$

l'inégalité stricte découlant déjà de la décroissance stricte de g de 1 à $\sqrt{2}$, avec $g(1) = 0$.

x	0^+		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$g(\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

4. (b) Sur $]0, 1[$, la croissance stricte jusqu'à $g(1) = 0$ donne $g(x) < 0$, donc aucune racine. Sur $]1, \sqrt{2}]$, la décroissance stricte donne également $g(x) < 0$.

Sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, g est continue et strictement croissante, avec une valeur négative au départ et une limite $+\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance donnent une unique racine $t > \sqrt{2}$.

Il reste à prouver $t < 2$. On a $g(2) = \ln 2 - 2/3$. Pour vérifier son signe, considérons la fonction $r(x) = 1/x$ sur $[1, 2]$. Elle est strictement convexe, car $r''(x) = 2/x^3 > 0$. Sa tangente au point $3/2$ a pour équation :

$$r(3/2) + r'(3/2)(x - 3/2) = \frac{4}{3} - \frac{4}{9}x.$$

L'inégalité de la tangente pour une fonction strictement convexe donne

$1/x \geq 4/3 - 4x/9$, avec inégalité stricte dès que $x \neq 3/2$. En intégrant sur $[1, 2]$:

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx > \int_1^2 \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{9}x \right) dx = \frac{2}{3}.$$

La stricte inégalité des intégrales est justifiée, par exemple, sur un petit segment autour de 1 où la différence continue est strictement positive. Ainsi $g(2) > 0$. La racine unique de la branche croissante vérifie donc $\sqrt{2} < t < 2$.

5. (a) D'après I.4, g est négative sur $]0, t[\setminus\{1\}$, nulle en 1 et t , et positive sur $]t, +\infty[$.

Pour $x \neq 1$, le signe de f' est celui de g . Au point 1, I.2 donne $f'(1) = -1/2 < 0$; la racine $g(1) = 0$ ne correspond donc pas à un point critique de f .

Ainsi f est strictement décroissante sur $]0, t]$, puis strictement croissante sur $[t, +\infty[$.

Posons $m = f(t)$. Les deux limites de I.1 sont $+\infty$, donc m est le minimum global strict de f .

x	0^+		1		t		$+\infty$
$f'(x)$		—	$-1/2$	—	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Pour préciser le minimum sans quotient logarithmique, l'égalité $g(t) = 0$ donne

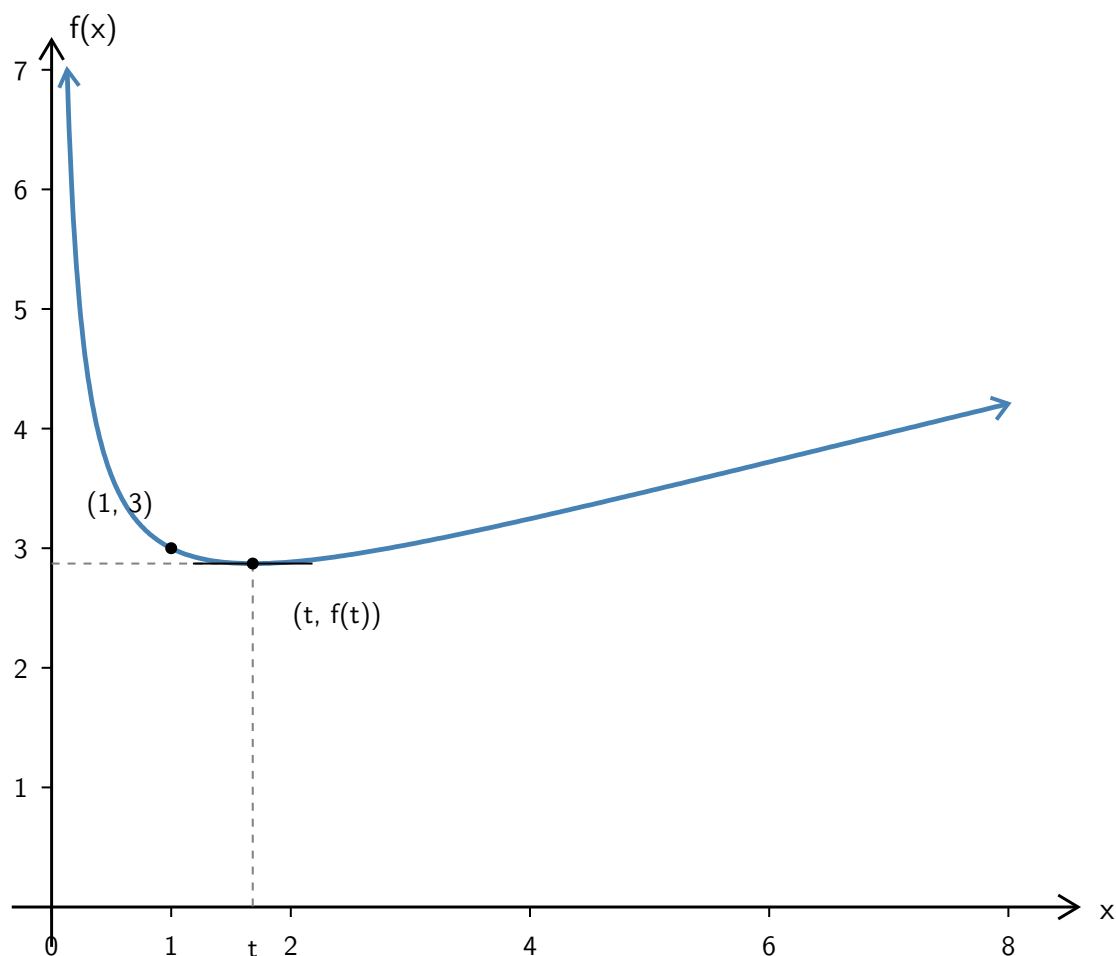
$\ln t = (t^2 + t - 2)/(t^2 + 2)$. Comme $t > \sqrt{2} > 1$, le numérateur $t^2 + t - 2 = (t + 2)(t - 1)$ est non nul. On peut simplifier :

$$m = \frac{(t + 2)(t - 1)}{t \ln t} = \frac{t^2 + 2}{t} = t + \frac{2}{t}.$$

5. (b) La courbe est continue sur $]0, +\infty[$ et admet l'axe $x = 0$ comme asymptote verticale, puisque $f(x) \rightarrow +\infty$ en 0^+ . Elle descend en passant par $(1, 3)$, puis atteint son minimum en (t, m) , avec $\sqrt{2} < t < 2$, avant de remonter vers $+\infty$.

La tangente en $(1, 3)$ a pour équation $y = 3 - (x - 1)/2$. La tangente en (t, m) est horizontale. Il n'y a pas de rupture de la courbe au point 1, malgré la formule initialement donnée par morceaux.

Le dessin suivant représente la fonction sur une fenêtre finie ; les flèches indiquent la poursuite des branches. Les positions de t et m sont approchées pour le tracé, tandis que leurs définitions exactes sont celles de I.4 et I.5(a).



6. Pour tout entier $p \geq 2$, $c_p = f(p)$. La question I.4(b) donne $t < 2$ et I.5(a) montre que f est strictement croissante sur $[t, +\infty[$.

Tous les entiers $p \geq 2$ appartiennent à cette branche croissante. Donc

$c_{p+1} = f(p+1) > f(p) = c_p$, ce qui prouve que $(c_p)_{p \geq 2}$ est strictement croissante.

Partie II. Étude d'une variable aléatoire

1. (a) La variable Z est à valeurs finies, donc son espérance existe. On écrit sa loi comme un poids $1/p$ sur chacun des entiers de 1 à $p-1$, puis un poids supplémentaire $1/p$ en $p-1$. Ainsi :

$$E(Z) = \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^{p-1} i + (p-1) \right) = \frac{1}{p} \left(\frac{p(p-1)}{2} + p-1 \right) = \frac{(p+2)(p-1)}{2p}.$$

Cette formule est aussi valable pour $p = 2$, où elle donne 1.

1. (b) Les moments d'ordre 2 existent puisque Z est bornée. Pour calculer le second moment, rappelons la formule :

$$\sum_{i=1}^m i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Elle s'établit par récurrence : elle vaut 1 à $m = 1$, et la différence entre le membre de droite aux indices $m+1$ et m vaut $(m+1)^2$. On peut donc l'utiliser avec $m = p-1$.

On obtient :

$$E(Z^2) = \frac{1}{p} \left(\frac{(p-1)p(2p-1)}{6} + (p-1)^2 \right) = \frac{(p-1)(2p^2 + 5p - 6)}{6p}.$$

La formule de Huygens donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Z) &= \frac{(p-1)(2p^2 + 5p - 6)}{6p} - \frac{(p+2)^2(p-1)^2}{4p^2} \\ &= \frac{(p-1) [2p(2p^2 + 5p - 6) - 3(p+2)^2(p-1)]}{12p^2}. \end{aligned}$$

Dans le crochet, on a $(p+2)^2(p-1) = p^3 + 3p^2 - 4$, donc :

$$2p(2p^2 + 5p - 6) - 3(p+2)^2(p-1) = p^3 + p^2 - 12p + 12 = (p-2)(p^2 + 3p - 6).$$

Finalement :

$$\mathbb{V}(Z) = \frac{(p-1)(p-2)(p^2+3p-6)}{12p^2}.$$

Pour $p = 2$, cette variance vaut 0, comme attendu pour la variable certaine $Z = 1$. Pour $p > 2$, les trois facteurs du numérateur sont strictement positifs : en particulier $p^2 + 3p - 6 \geq 12$ pour $p \geq 3$.

2. Notons J le numéro de la boîte contenant l'objet. Par hypothèse, J est uniforme sur $\{1, \dots, p\}$.

Si $J \leq p - 2$, l'algorithme ouvre exactement J boîtes, puisqu'il découvre l'objet à la J -ième ouverture. Si $J = p - 1$, il découvre l'objet à la $(p - 1)$ -ième ouverture. Si $J = p$, il ouvre aussi $p - 1$ boîtes puis déduit que l'objet est dans la seule boîte restée fermée.

Ainsi $Y = \min(J, p - 1)$ et :

$$P(Y = i) = \frac{1}{p} \text{ pour } 1 \leq i \leq p - 2, \quad P(Y = p - 1) = \frac{2}{p}.$$

C'est exactement la loi de Z . Le nombre moyen de boîtes ouvertes est donc :

$$E(Y) = \frac{(p+2)(p-1)}{2p}.$$

Pour $p = 2$, une seule ouverture suffit toujours, ce qui est cohérent avec la formule.

Partie III. Étude d'un premier type d'algorithme

1. Posons $d = (v - u)/p > 0$ et $z_j = u + jd$, pour $0 \leq j \leq p$. Alors $z_0 = u$, $z_p = v$ et les points z_j sont strictement croissants.

Premier cas : l'arrêt a lieu avec $\varphi(z_k) \geq 0$. Le préambule donne $\omega \leq z_k$. Si $k = 1$, on sait déjà $u = z_0 \leq \omega$. Si $k > 1$, l'algorithme n'a pas été arrêté à l'indice $k - 1$, donc $\varphi(z_{k-1}) < 0$ et $z_{k-1} < \omega$.

Dans tous les cas, $z_{k-1} \leq \omega \leq z_k$. Les bornes choisies sont $u' = z_{k-1}$ et $v' = z_k$. Elles sont dans $[u, v]$ et $v' - u' = d$.

Second cas : l'arrêt a lieu avec $\varphi(z_k) < 0$. Le critère d'arrêt impose alors $k = p - 1$. Ainsi $z_{p-1} < \omega \leq v = z_p$. Le choix $u' = z_{p-1}$ et $v' = z_p$ donne encore un encadrement inclus dans $[u, v]$, de longueur d .

Les conditions (1) sont donc satisfaites dans les deux cas. Si une évaluation vaut exactement 0, le premier cas s'applique et conserve la racine comme borne supérieure ; la largeur reste celle demandée, $(v - u)/p$.

2. (a) Chaque application divise la longueur par p . Avec la longueur initiale $b - a$, une récurrence immédiate donne :

$$\forall i \geq 0, \quad b_i - a_i = \frac{b - a}{p^i}.$$

La longueur dépend uniquement du nombre d'applications et non de la position de la racine.

2. (b) Puisque $b - a > 0$, la condition d'arrêt est équivalente à $p^{-n} < \varepsilon$. En prenant les logarithmes, puis en utilisant $\ln p > 0$:

$$-n \ln p < \ln \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{-\ln \varepsilon}{\ln p} =: r.$$

Comme $0 < \varepsilon < 1$, on a $r > 0$. Le plus petit entier strictement supérieur à r est $\lfloor r \rfloor + 1$, y compris lorsque r est entier. Par conséquent :

$$n = \lfloor r \rfloor + 1 = \lfloor 1 + r \rfloor = \left\lfloor 1 - \frac{\ln \varepsilon}{\ln p} \right\rfloor.$$

L'inégalité de précision est stricte : si $\varepsilon = p^{-m}$ pour un entier $m \geq 1$, il faut $m + 1$ applications et non m .

3. (a) À la première application, les p sous-intervalles de $[a, b]$ ont la même longueur $(b - a)/p$. Sous la loi uniforme, ils ont donc chacun une probabilité $1/p$. Les points de subdivision ont une probabilité nulle, ce qui permet de fixer les conventions d'appartenance aux extrémités sans modifier les lois.

Si la racine est dans le j -ième sous-intervalle, avec $j \leq p - 1$, l'algorithme s'arrête à la j -ième évaluation. Si elle est dans le dernier sous-intervalle, il s'arrête aussi après $p - 1$ évaluations. On retrouve la loi de II.2.

Pour une application ultérieure, fixons un intervalle I susceptible d'être retenu après $i - 1$ applications. Cet intervalle est l'un des p^{i-1} intervalles de la subdivision régulière, de longueur $(b - a)/p^{i-1}$. À des événements négligeables près, l'événement « l'intervalle retenu est I » est exactement $[\omega \in I]$.

La loi conditionnelle de ω sachant $[\omega \in I]$ est uniforme sur I : pour tout sous-intervalle $J \subset I$:

$$P(\omega \in J \mid \omega \in I) = \frac{|J|/(b - a)}{|I|/(b - a)} = \frac{|J|}{|I|}.$$

Chaque subdivision en p parts a donc, conditionnellement, la même loi pour le nombre d'évaluations : $1/p$ pour les valeurs $1, \dots, p - 2$, et $2/p$ pour la valeur $p - 1$. En appliquant les probabilités totales aux intervalles possibles, on obtient cette même loi sans conditionnement. Ainsi chaque Y_i a la loi de Y de II.2.

3. (b) Le nombre n d'applications est déterministe, donné en III.2(b). Chaque Y_i est bornée par $p - 1$, donc son espérance existe. La linéarité de l'espérance, qui ne nécessite pas l'indépendance, donne :

$$\bar{V}_p(\varepsilon) = E \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) = \sum_{i=1}^n E(Y_i) = n \frac{(p + 2)(p - 1)}{2p}.$$

Ainsi :

$$\overline{V}_p(\varepsilon) = \frac{(p+2)(p-1)}{2p} \left\lfloor 1 - \frac{\ln \varepsilon}{\ln p} \right\rfloor.$$

3. (c) Posons $r = -\ln \varepsilon / \ln p$. Pour p fixé, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on a $r \rightarrow +\infty$. D'après la définition de $n = \lfloor r \rfloor + 1$:

$$r < n \leq r + 1.$$

En divisant par $r > 0$, $1 < n/r \leq 1 + 1/r$, donc $n/r \rightarrow 1$. Ainsi $n \sim -\ln \varepsilon / \ln p$.

Le facteur $(p+2)(p-1)/(2p)$ est constant et strictement positif pour $p \geq 2$. D'après III.3(b) :

$$\overline{V}_p(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{(p+2)(p-1)}{2p \ln p} (-\ln \varepsilon) = \frac{c_p}{2} (-\ln \varepsilon).$$

Aucun équivalent n'est composé ni additionné : l'équivalence résulte ici du quotient explicite n/r .

3. (d) Pour une précision donnée, le facteur $(-\ln \varepsilon)/2$ est positif et ne dépend pas de p . Minimiser l'approximation revient donc à minimiser c_p parmi les entiers $p \geq 2$.

D'après I.6, c_p est strictement croissante. Son minimum est atteint uniquement en $p = 2$. L'algorithme optimal dans cette approximation asymptotique est donc A_2 , la dichotomie : une évaluation au milieu de l'intervalle par application.

La conclusion porte sur le critère demandé, fondé sur l'approximation lorsque ε tend vers 0 avec p fixé. La formule exacte comporte une partie entière, qui peut modifier des comparaisons pour des précisions particulières ; elle ne doit pas être remplacée sans justification par son équivalent pour une précision arbitraire.

Partie IV. Étude d'un second type d'algorithme

1. Posons $L = \beta - \alpha > 0$. Le point d'évaluation est $\gamma = \alpha + qL$. Comme $0 < q < 1$,
 $\alpha < \gamma < \beta$.

Si $\varphi(\gamma) \geq 0$, alors $\omega \leq \gamma$ par le préambule. Le nouvel intervalle $[\alpha, \gamma]$ contient donc la racine et sa longueur vaut $\gamma - \alpha = qL$.

Si $\varphi(\gamma) < 0$, alors $\omega > \gamma$. L'intervalle $[\gamma, \beta]$ contient la racine et sa longueur vaut $\beta - \gamma = (1 - q)L$.

Les deux intervalles sont inclus dans $[\alpha, \beta]$, et leurs longueurs sont majorées par $L \max(q, 1 - q)$. Les conditions (2) sont donc vérifiées.

2. (a) D'après IV.1, les valeurs possibles sont qL et $(1 - q)L$, où $L = \beta - \alpha > 0$.

Si $q \neq 1/2$, ces deux valeurs sont distinctes et correspondent à deux sous-intervalles de longueur strictement positive. Si $q = 1/2$, elles coïncident : $R_{1/2}$ est certaine, égale à $L/2$.

2. (b) Le premier cas de IV.1 correspond à $[\omega \leq \gamma]$. Sous la loi uniforme sur $[\alpha, \beta]$:

$$P(\omega \leq \gamma) = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = q.$$

Le cas complémentaire a probabilité $1 - q$. Pour $q \neq 1/2$:

$$P(R_q = qL) = q, \quad P(R_q = (1 - q)L) = 1 - q.$$

Pour $q = 1/2$, les deux événements conduisent à la même valeur ; il faut réunir leurs probabilités : $P(R_{1/2} = L/2) = 1$.

2. (c) La variable R_q est bornée, donc son espérance existe. Les deux branches de décision donnent :

$$E(R_q) = q(qL) + (1-q)((1-q)L) = L(q^2 + (1-q)^2) = L(2q^2 - 2q + 1).$$

La formule reste valable pour $q = 1/2$, où elle donne $L/2$.

2. (d) Méthode 1 — Transformation affine d'une Bernoulli

Soit $J = \mathbf{1}_{[\omega \leq \gamma]}$. D'après IV.2(b), $J \sim \mathcal{B}(1, q)$. Dans les deux branches :

$$R_q = L((1-q) + (2q-1)J).$$

La variance d'une transformation affine et $\mathbb{V}(J) = q(1-q)$ donnent :

$$\mathbb{V}(R_q) = L^2(2q-1)^2q(1-q).$$

Pour $q \neq 1/2$, cette variance est strictement positive. Pour $q = 1/2$, $R_q = L/2$ est certaine et sa variance vaut 0, comme le prévoit aussi la formule.

Méthode 2 — Second moment et formule de Huygens

La variable R_q est bornée, donc son second moment existe. Les deux branches donnent :

$$E(R_q^2) = q(qL)^2 + (1-q)((1-q)L)^2 = L^2(q^3 + (1-q)^3).$$

Par Huygens et IV.2(c) :

$$\mathbb{V}(R_q) = L^2 [q^3 + (1-q)^3 - (q^2 + (1-q)^2)^2].$$

On a $q^3 + (1 - q)^3 = 1 - 3q + 3q^2$ et

$(q^2 + (1 - q)^2)^2 = (1 - 2q + 2q^2)^2 = 1 - 4q + 8q^2 - 8q^3 + 4q^4$. La différence vaut :

$$q - 5q^2 + 8q^3 - 4q^4 = q(1 - q)(2q - 1)^2.$$

On retrouve donc $\mathbb{V}(R_q) = L^2 q(1 - q)(2q - 1)^2$, et la valeur 0 au cas $q = 1/2$.

3. (a) Justification de la loi uniforme après une histoire fixée

Fixons une histoire de décisions $x_1, \dots, x_{i-1} \in \{0, 1\}$. Chaque décision conserve la partie gauche de proportion q lorsque $x_j = 1$, ou la partie droite de proportion $1 - q$ lorsque $x_j = 0$. Cette histoire détermine donc un intervalle $I = [\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}]$ de longueur strictement positive.

À des choix d'extrémités sans effet sur les probabilités près, l'événement $[X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}]$ est exactement $[\omega \in I]$. Conditionnellement à cet événement, ω est uniforme sur I , car pour tout sous-intervalle $J \subset I$:

$$P(\omega \in J \mid \omega \in I) = \frac{|J|}{|I|}.$$

Chaque histoire a une probabilité strictement positive puisque son intervalle a une longueur positive. Les extrémités rencontrées pendant les N étapes forment un ensemble fini et ont une probabilité nulle sous la loi uniforme.

Le point γ_i partage I en une partie gauche de longueur $q|I|$ et une partie droite de longueur $(1 - q)|I|$. Comme $X_i = 1$ équivaut à $\omega \leq \gamma_i$, on obtient pour toute histoire :

$$P(X_i = 1 \mid X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}) = q.$$

Pour $i = 1$, c'est directement la loi uniforme sur $[a, b]$. Pour $i > 1$, les probabilités totales sur toutes les histoires donnent $P(X_i = 1) = q$ et $P(X_i = 0) = 1 - q$. Ainsi chaque X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre q .

3. (b) Il faut vérifier l'indépendance, car l'égalité des lois marginales de IV.3(a) ne suffit pas pour conclure à une loi binomiale.

Pour $(x_1, \dots, x_N) \in \{0, 1\}^N$, la formule des probabilités composées et les probabilités conditionnelles calculées en IV.3(a) donnent :

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N) = \prod_{i=1}^N q^{x_i} (1-q)^{1-x_i}.$$

Chaque facteur est $P(X_i = x_i)$. La loi conjointe est donc le produit des lois marginales, ce qui prouve l'indépendance mutuelle des X_i .

La somme de N Bernoulli indépendantes de même paramètre q suit une loi binomiale. Ainsi $S_q \sim \mathcal{B}(N, q)$, et :

$$P(S_q = k) = \binom{N}{k} q^k (1-q)^{N-k}, \quad 0 \leq k \leq N.$$

3. (c) Lorsque $X_i = 1$, la longueur est multipliée par q ; lorsque $X_i = 0$, elle est multipliée par $1 - q$. Après N étapes :

$$T_q = \beta_N - \alpha_N = (b-a) \prod_{i=1}^N q^{X_i} (1-q)^{1-X_i} = (b-a) q^{S_q} (1-q)^{N-S_q}.$$

Donc, sur $[S_q = k]$, $T_q = q^k (1-q)^{N-k} (b-a)$.

Pour $q = 1/2$, toutes ces valeurs sont égales : $T_{1/2} = (b-a)/2^N$ est certaine.

Pour $q \neq 1/2$, les valeurs correspondant à $k = 0, \dots, N$ sont distinctes. En effet, le quotient de deux valeurs consécutives vaut $q/(1-q) \neq 1$, donc la suite de ces valeurs est strictement monotone. Comme $0 < q < 1$, chaque valeur a une probabilité strictement positive.

L'ensemble des valeurs de T_q est alors :

$$\{q^k(1-q)^{N-k}(b-a) : 0 \leq k \leq N\}.$$

L'équivalence entre une valeur de T_q et le seul indice k qui la produit donne :

$$P(T_q = q^k(1-q)^{N-k}(b-a)) = P(S_q = k) = \binom{N}{k} q^k(1-q)^{N-k}.$$

La distinction $q \neq 1/2$ est indispensable pour attribuer séparément ces probabilités aux valeurs de T_q .

3. (d) Méthode 1 — Transfert à partir de la loi binomiale

Posons $L_0 = b - a > 0$, $A = q^2 + (1-q)^2$ et $B = q^3 + (1-q)^3$. Le transfert sur la variable finie S_q et la formule du binôme donnent :

$$E(T_q) = L_0 \sum_{k=0}^N q^k(1-q)^{N-k} \binom{N}{k} q^k(1-q)^{N-k}$$

$$= L_0 \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (q^2)^k ((1-q)^2)^{N-k} = L_0 A^N.$$

De même :

$$E(T_q^2) = L_0^2 \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (q^3)^k ((1-q)^3)^{N-k} = L_0^2 B^N.$$

Tous les moments existent puisque T_q prend un nombre fini de valeurs. Huygens donne donc :

$$E(T_q) = (b - a)(q^2 + (1 - q)^2)^N,$$

$$\mathbb{V}(T_q) = (b - a)^2 [(q^3 + (1 - q)^3)^N - (q^2 + (1 - q)^2)^{2N}].$$

Pour $q = 1/2$, $A = 1/2$ et $B = 1/4$. La première expression vaut $(b - a)/2^N$, et la seconde vaut $(b - a)^2(4^{-N} - 4^{-N}) = 0$. Les formules restent donc valables pour la variable certaine $T_{1/2}$.

Méthode 2 — Produit de facteurs indépendants

Posons $M_i = q$ si $X_i = 1$, et $M_i = 1 - q$ si $X_i = 0$. Les M_i sont indépendantes parce que les X_i le sont. Elles sont bornées, de même loi, et

$$T_q = L_0 \prod_{i=1}^N M_i.$$

D'après les probabilités des deux valeurs, $E(M_i) = q^2 + (1 - q)^2 = A$ et $E(M_i^2) = q^3 + (1 - q)^3 = B$. L'espérance d'un produit de variables indépendantes intégrables, appliquée à ces variables bornées, donne :

$$E(T_q) = L_0 \prod_{i=1}^N E(M_i) = L_0 A^N,$$

$$E(T_q^2) = L_0^2 \prod_{i=1}^N E(M_i^2) = L_0^2 B^N.$$

Par Huygens, $\mathbb{V}(T_q) = L_0^2(B^N - A^{2N})$. Cette méthode retrouve les deux expressions et montre le rôle direct de l'indépendance des multiplicateurs successifs. Le cas $q = 1/2$ donne des multiplicateurs tous égaux à $1/2$ et donc une longueur finale certaine.

4. Pour $q \in]0, 1[$:

$$q^2 + (1 - q)^2 = 2q^2 - 2q + 1 = \frac{1}{2} + 2 \left(q - \frac{1}{2} \right)^2.$$

Cette quantité est supérieure ou égale à $1/2$, avec égalité seulement pour $q = 1/2$.

Comme N est un entier positif, la fonction $x \mapsto x^N$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Le facteur $b - a$ est strictement positif. D'après IV.3(d), l'espérance de T_q est donc minimale uniquement pour $q = 1/2$.

Le minimum vaut $(b - a)/2^N$. L'algorithme optimal de cette famille est $B_{1/2}$: à chaque étape, on évalue φ au milieu de l'intervalle et on conserve la moitié contenant la racine.

Avec ce choix, la longueur finale est toujours $(b - a)/2^N$, et sa variance est nulle. La dichotomie minimise donc la longueur finale moyenne pour un nombre fixé N d'évaluations ; elle est également optimale pour l'approximation du nombre moyen d'évaluations étudiée en partie III, dans la famille A_p .

Relevé des adaptations

III.1. Les nouvelles bornes sont notées u' et v' dans les deux formules de mise à jour, conformément à leur définition ; les formules imprimées omettent ces primes. Les valeurs et le fonctionnement de l'algorithme sont conservés.

I.5(b). La courbe demandée est intégrée au corrigé sous forme de SVG calculé à partir de la définition exacte de f . La racine t de g et l'ordonnée $f(t)$ sont approchées numériquement uniquement pour placer les annotations ; les preuves reposent sur leurs définitions exactes.